普通高等教育"九五"教育部重点教材

21世纪数学规划教材

数学基础课系列

3rd Edition

实变函数论（第三版）

Theory of Real Variable Function

周民强 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育

博雅 21世纪数学规划教材

数学基础课系列

3rd Edition

实变函数论（第三版）

Theory of Real Variable Function

周民强 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/周民强编著. —3 版. —北京：北京大学出版社，2016.10
(21 世纪数学规划教材 · 数学基础课系列)
ISBN 978-7-301-27647-1

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①实变函数论—高等学校—教材
Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 243098 号

书　　名	**实变函数论(第 3 版)**
	SHIBIAN HANSHULUN
著作责任者	周民强　编著
责任编辑	尹照原　刘　勇
标准书号	ISBN 978-7-301-27647-1
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
电子信箱	zpup@pup.cn
新浪微博	@北京大学出版社
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	890 毫米×1240 毫米　A5　11.125 印张　324 千字
	2001 年 7 月第 1 版　2008 年 5 月第 2 版
	2016 年 10 月第 3 版　2016 年 10 月第 1 次印刷
定　　价	33.00 元

内 容 简 介

本书是普通高等教育"九五"教育部重点教材,主要内容为Lebesgue测度与积分理论.全书共分六章,内容包括:集合与点集,Lebesgue测度,可测函数,Lebesgue积分,微分与不定积分,L^p空间等.

作者30年来一直在北京大学等院校讲授"实变函数"课程,具有丰富的教学经验,且深知学生的疑难与困惑,因此本书内容、背景材料的选取以及内容的难易程度都是经过作者深思熟虑安排的,是作者教学实践经验的总结.书中编有丰富的范例,为读者展示出广阔的应用空间.每章精选了一些思考题和习题,为读者提供了自我训练的恰当基地.作者在每章末尾所做的注记,拓宽或加深了正文所述的内容,这或许对有志于进一步学习实分析的读者有所助益.如果读者对近代积分论的前后发展感兴趣,还可阅读开篇"积分论评述"以及附录中的"勒贝格传".为便于读者参考,书后附录中给出了思考题和习题的部分解答,供读者选读.

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范院校数学专业学生的"实变函数"课程教材或教学参考书.对于青年数学教师和数学工作者,本书也是较好的学习参考书.

针对学生做习题时遇到的疑难与困惑,作者编写了《**实变函数解题指南**》,作为本书配套的学习辅导书,供读者使用.

作者简介

周民强　北京大学数学科学学院教授. 1956年大学毕业，从事调和分析（实变方法）的研究，并担任数学分析、实变函数、泛函分析、调和分析等课程的教学工作四十余年，具有丰富的教学经验. 出版教材和译著多部. 出版的教材有《数学分析》《实变函数论》（普通高等教育"九五"教育部重点教材）《实变函数解题指南》《调和分析讲义》《数学分析习题演练》《微积分专题论丛》等. 多次获得北京大学教学优秀奖和教学成果奖. 曾任北京大学数学系函数论教研室主任、《数学学报》和《数学通报》编委、北京市自学考试命题委员等职.

第 3 版序言

本书自 2001 年第 1 版出版以来，受到了广大读者的欢迎和认可，作者深感欣慰，并在此表示谢意.

实变函数作为学习近代分析数学的基础课程，其主体内容早已有了比较明确的陈述. 然而，从教学的角度审视，如何将其中丰富的内涵表现出来，且较顺畅地传递给初学者，还有许多事情可做. 这也就给编写适当的教材提出了重要任务.

基于以上认识，这次修改工作的重点放在与教学实践密切结合这方面，因此必须在教学材料上做出严谨安排，从而舍去了某些过多的陈述，而对一些有参考价值的知识，则用小字排出，供读者选用.

作　者

2016 年 4 月

第 1 版前言

“实变函数”的核心内容是测度和积分的理论，它是近代分析数学领域的基础知识，现已成为各大专院校数学系高年级学生的必修或选修课程.

“数学分析”主要的考查对象是定义在区间(或区域)上的连续函数，“复变函数”是探讨定义在区域上解析函数的性质，而“实变函数”则把研究对象扩大到定义在可测集上的可测函数，并运用集合论的观点对函数及其定义域作更加细致的剖析. 这就使得实分析处理问题的思想方法更加活跃，可使微积分在较宽松的环境中加以运用，其结果也就更加深入和具有多样性.

本书以 n 维欧氏空间为基地，重点介绍 Lebesgue(勒贝格)测度和积分，并在论述中力图使其与抽象理论磨合.

实变函数课程一直是学生学习难度较大的课程之一. 为使教与学的过程能较顺利些，作者在本书中加强了导引性论述，使读者了解所研究课题的概貌，更加明确目的性，甚至插入了若干段数学史评注和数学家传记，以提高学习兴趣. 书中列入的丰富例题，可当作理论应用的某种示范并开阔思路；为了协助读者养成“会学”的习惯，书中点缀了若干由正文直接派生的思考题. 在每章末尾所写的注记，目的是对正文所阐述的理论有一个进一步的交代或更实质性的议论，可为有兴趣的读者参考以开启创新之门. 书中还编入了相当数量的练习，并力图与正文紧密配合. 当然，在使用本书时，应根据实际情况作取舍或补充.(书中标有“*”号的内容可以先不读，众多练习也不必全都做)

本书前身《实变函数》第一次出版是在 1985 年，后经补改在

1995年出修订版,1997年在同行们的鼓励下,又开始修订.现在,在北京大学出版社的大力支持下,又有了这个版本.虽经多次修订,体系仍无大变动,欢迎广大读者指教.最后,赠诗一首与读者共勉:

道虽远,不行不至;
事虽难,不为不成.

编　者
2000年12月

积分论评述

(一) 谈谈 Riemann 积分及其进展

实变函数的中心内容是 H. L. Lebesgue(1875—1941)测度与积分理论,它是经典的 B. Riemann(1826—1866)积分的一次深刻变革与发展,创立于 20 世纪初期,为近代分析数学奠定了基础.因而,在这里对 Riemann 积分理论作一简单回顾,将会有助于我们今后的学习.

在数学史上,第一个提出用分割区间、作和式的极限来明确地定义积分的要推 A. Cauchy(1789—1857).他考查的积分对象是在区间$[a,b]$上的连续函数,并用连续函数的中值性质来推导积分的存在性. Cauchy 还提出用极限来定义函数在无界区域上的积分以及函数具有瑕点的积分.

然而 Cauchy 所做的积分存在性的证明只适用于函数至多有有限个不连续点的情形,于是具有无穷多个不连续点的函数的积分存在性问题引起了许多学者的兴趣.

在对积分学发展起过推动作用的早期的工作中,应该提到 J. Fourier(1768—1830)关于三角级数的工作.在 1807 年,他指出:任一定义在$[-\pi,\pi]$上的函数 $f(x)$可表示为三角级数

$$
\begin{aligned}
&a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_n\cos nx + \cdots,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x
\end{aligned}\right. \quad (n = 0,1,\cdots).
$$

虽然这一陈述缺乏严格的论证,但由于这一结果在物理学中的成功应用引起了数学界的极大重视.例如,P. Dirichlet (1805—1859)对

此给出过一些充分条件，其中特别提到了函数的可积性问题.

Riemann 在研究三角级数时，注意到上述工作，并特别讨论了函数的可积性问题. 他不先假定函数是连续的，而去探求一个函数可积与否是什么性态. 从这样一个角度出发，他在 1854 年的论文“关于一个函数展开成三角级数的可能性”中，给出了积分的定义以及函数可积的充要条件. 这一条件，后来由 Darboux (1842—1917) 以更加明确的形式给出.

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数. 作分划

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

且令

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x):\ x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}, \\ m_i &= \inf\{f(x):\ x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\} \end{aligned} \qquad (i = 1,2,\cdots,n),$$

$$\overline{S}_{\triangle} = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad \underline{S}_{\triangle} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

我们考虑 Darboux 上积分与下积分:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf_{\Delta} \overline{S}_{\triangle}, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\Delta} \underline{S}_{\triangle}.$$

如果这两个值相等，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 **Riemann 可积的**（简记为 $f \in R([a,b])$），记其公共值为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

且称它为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分.**

若令 $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}:\ i = 1,2,\cdots,n\}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的充分且必要条件是

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = 0. \tag{1}$$

Riemann 积分的重要性是不言而喻的，它对于处理诸如逐段连续的函数以及一致收敛的级数来说是足够的，并至今仍然是“微积分”课程的主要内容之一. 然而，随着点集理论工作的深入，人们越来越多地接触到具有各种“奇特”现象的函数. 对此，不仅在研究函数的可积性，而且在积分理论的处理上还出现了许多困难. 下面就 Riemann 积分理论中的几个主要方面来做一些简要分析.

（1）可积函数的连续性

上面提到，函数的可积性是与(1)式等价的，由于(1)式涉及两个因素：分割子区间的长度(x_i-x_{i-1})以及函数在其上的振幅(M_i-m_i)，故为使(1)成立，粗略说来，就是在$|\Delta|\to 0$的过程中，其振幅(M_i-m_i)不能缩小的那些相应项的子区间的长度的总和可以很小(Riemann 注意到，定义在$[a,b]$上的单调函数只能存在有限个点使函数在其上的振幅超过预先给定的值，从而是可积的)．我们知道，函数振幅的大小与该函数的连续性有关．于是，条件(1)迫使函数的不连续点可用长度总和为任意小的区间所包围．这就是说，可积函数必须是“基本上”连续的．Riemann 积分的理论是以“基本上”连续的函数为研究对象的．

（2）极限与积分次序交换问题

在数学分析中，经常遇到的一个重要运算是交换两种极限过程的次序，尤其是积分与函数列的极限的交换．

我们知道，在一般微积分教科书中，都是用函数列一致收敛的条件来保证极限运算与积分运算的次序可以交换的．不过，这一要求是过分强了．

例 1　设 $f_n(x)=x^n(0\leqslant x\leqslant 1)$．它是点收敛而不是一致收敛于

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

的，但仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

在 Riemann 积分意义下，存在下述有界收敛定理(一个初等证明可参见 Amer. Math. Monthly，78，1986)．

定理(有界收敛定理)　设

(i) $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$是定义在$[a,b]$上的可积函数；

(ii) $|f_n(x)|\leqslant M(n=1,2,\cdots,x\in[a,b])$；

(iii) $f(x)$是定义在$[a,b]$上的可积函数，且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad x\in[a,b],$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里,不仅受到条件(ii)的限制,而且还必须假定极限函数$f(x)$的可积性.下例表明,即使函数列是渐升的也不能保证其极限函数的可积性.

例 2 设$\{r_n\}$是$[0,1]$中的全体有理数列,作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots,r_n,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots).$$

显然有 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots\leqslant 1$,且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这里,每个 $f_n(x)$皆是$[0,1]$上的 Riemann 可积函数且积分值为零,故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

但极限函数 $f(x)$不是 Riemann 可积的,这是因为

$$\overline{\int_0^1}f(x)\mathrm{d}x=1,\quad \underline{\int_0^1}f(x)\mathrm{d}x=0,$$

从而也就谈不上积分号下取极限的问题.

有界收敛定理看起来也有点使人惊异,因为我们不难证明,若有定义在$[a,b]$上的可积函数列$\{f_n(x)\}$,$\{g_n(x)\}$,而且满足$|f_n(x)|\leqslant M$,$|g_n(x)|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$,$x\in[a,b]$,以及

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad \lim_{n\to\infty}g_n(x)=f(x),\quad x\in[a,b],$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x.$$

但 $f(x)$之积分仍然可以不存在.然而,上述积分之极限值并不依赖于$\{f_n(x)\}$本身,而依赖于 $f(x)$.既然如此,就不妨定义其积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这说明 Riemann 积分的定义太窄了.

（3）关于微积分基本定理

我们知道，积分和微分之间的联系乃是微积分学的中枢：设 $f(x)$在$[a,b]$上是可微函数，且 $f'(x)$在$[a,b]$上是可积的，则有

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a), \quad x \in [a,b]. \tag{2}$$

这就是说，从 $f'(x)$通过积分又获得了 $f(x)$. 显然，为使这一微积分基本定理成立，$f'(x)$必须是可积的. 然而，早在 1881 年，V. Volterra (1860—1940)就做出了一个可微函数，其导函数还是有界的，但导函数不是 Riemann 可积的. 这就大大限制了微积分基本定理的应用范围. 实际上，不难证明 $f' \in R([a,b])$的充分必要条件是，存在 $g \in R([a,b])$，使得

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

（4）可积函数空间的完备性

Riemann 积分的另一局限性还表现在可积函数空间的不完备性上. 在积分理论中，可积函数类用距离

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$$

（或

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

等）做成距离空间是完备的这一事实具有重要意义. 近代泛函分析中的许多基本技巧往往最终要用到空间的完备性.

记 $R([0,1])$为$[0,1]$上 Riemann 可积函数的全体. 引进距离

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x, \quad f,g \in R([0,1])$$

（其中认定当 $d(f,g)=0$ 时，f 与 g 是同一元）. 我们说 $R([0,1])$不是完备的意思，是指当 $f_n \in R([0,1])$ $(n=1,2,\cdots)$且满足

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(f_n,f_m) = 0$$

时，并不一定存在 $f \in R([0,1])$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f) = 0.$$

现在，令$\{r_n\}$是$(0,1)$中有理数的全体，设 I_n 是$[0,1]$中的开区

间，$r_n \in I_n$，$|I_n|<1/2^n(n=1,2,\cdots)$，并作函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.\end{cases}$$

易知 $f(x)$在$[0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 内的点上是不连续的，它不是 Riemann 可积的，且不存在 Riemann 可积函数 $g(x)$，使得 $d(f,g)=0$. 但若作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\bigcup_{k=1}^{n} I_k,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k,\end{cases}$$

则 $f_n\in R([0,1])$ $(n=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d(f_n,f_m)=0,$$

以及 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$. 故 $R([0,1])$按上述距离 d 是不完备的.

随着微积分各种课题的深入探讨，人们对积分理论的研究工作也进一步展开，并认识到积分问题与函数的下方图形——点集的面积如何界定和度量有关. 在 19 世纪 80 年代，G. Peano 就提出点集内外容度(长度、面积概念的推广)的观念，紧接着 C. Jordan 在 1892 年扩展了 G. Peano 的工作，建立起所谓 Jordan 可测集的理论(其测度也称容度)，且模拟 Riemann 积分的做法，给出了新的积分思路.(作为积分的对象的函数不再限于在$[a,b]$上定义，而可以在有界 Jordan 可测集上定义，从而对$[a,b]$的子区间分划也就换成了可测子集的分划.)然而，Jordan 的测度论存在着严重的缺陷，如存在不可测的开集、有理数集也不可测等. 为了克服这一点，E. Borel 在 1898 年的著作中引进了现称之为 Borel 集的概念. 他从开集出发构造了一个 σ-代数，从而使他的测度理论具有可数可加的性质.(在 Jordan 测度论中，即使每一个 E_n 都是可测的，但 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n$ 不一定是 Jordan 可测的，且他本人并未注意到这一点.)但是，Borel 并没有把他的测度理论

与积分理论联系起来.

现代在应用上最广泛的测度与积分系统是法国数学家 H. L. Lebesgue (1875—1941)完成的. 1902 年,他在“积分、长度与面积”的博士论文中所阐述的思想成为古典分析过渡到近代分析的转折点. 他证明了有界 Lebesgue 可测集类构成一个 σ-环;Lebesgue 测度是可数可加且是平移不变的;也确实存在着非 Jordan 可测和非 Borel 可测的 Lebesgue 可测集,并建立了 Lebesgue 可测集与 Borel 可测集的关系. 他还断定：有非 Lebesgue 可测集存在,虽然没有做出来(1905 年 Vitali 给出一例). Lebesgue 积分理论不仅蕴涵了 Riemann 积分所达到的成果,而且还在较大程度上克服了它的局限性.

测度论思想升华的重要一步是匈牙利数学家 F. Riesz 在 1914 年迈出的,他放弃了在 σ-环上建立测度的思想,而直接从积分出发来导出整个理论,且将其定义在环上. 同一年,C. Carathéodory 进一步发展了外测度理论,导致所谓测度的完备化,特别是做出了从环到 σ-环的扩张.

对积分理论做出重要贡献的,还有 Stieltjes,Radon 等数学家. 使积分理论跳出欧氏空间背景并将其建立在$(X,\mathscr{R},\mu)$上的首要工作是属于 Fréchet(1915 年)的,而用更加一般的观点来考查积分的应归功于 Daniell 局部紧空间上的积分理论.

当然,今天我们来学习 Lebesgue 测度与积分的理论时,不一定拘泥于原有的体系.

（二）Lebesgue 积分思想简介

对于定义在$[a,b]$上的有界正值函数,为使 $f(x)$在$[a,b]$上可积,按照 Riemann 的积分思想,必须使得在划分$[a,b]$后,$f(x)$在多数小区间 Δx_i 上的振幅能足够小. 这迫使具有较多激烈振荡的函数被排除在可积函数类之外. 对此,Lebesgue 提出,不从分割区间入手,而是从分割函数值域着手,即任给 $\delta>0$,作

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_{i-1} < y_i < \cdots < y_n = M,$$

其中 $y_i - y_{i-1} < \delta$,m,M 是 $f(x)$在$[a,b]$上的下界与上界,并作点集

$$E_i = \{x: y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\},\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

这样，在 E_i 上，$f(x)$ 的振幅就不会大于 δ. 再计算

$$|I_i| = \text{矩形面积} = y_{i-1}(\text{高}) \times |E_i|\ (\text{底边长度}),$$

并作和

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|E_i| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|.$$

它是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上积分（面积）的近似值. 然后，让 $\delta \to 0$，且定义

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|E_i|$$

（如果此极限存在）. 也就是说，采取在 y 轴上的划分来限制函数值变动的振幅，即按函数值的大小先加以归类. Lebesgue 对这一设计做了生动的譬喻，大意如下：假定我欠人家许多钱，现在要归还. 此时，应先按照钞票的票面值的大小分类，再计算每一类的面额总值，然后相加，这就是我的积分思想；如果不管面值大小如何，而是按某种先后次序（如顺手递出）来计算总数，那就是 Riemann 积分的思想.

当然，按照 Lebesgue 的积分构思，会带来一系列的新问题. 首先，分割函数值范围后，所得到的点集

$$E_i = \{x : y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

不一定是一个区间，$[a,b]$ 也不一定是互不相交的有限个区间的并，而可能是一个分散而杂乱无章的点集及其并集. 因此，所谓底边长度 $|E_i|$ 的说法是不清楚的，即如何度量其“长度”以及是否存在“长度”均成问题. 这促使 Lebesgue 去寻找一种测量一般点集“长度”的方案，并称点集 E 的“长度”为测度，记为 $m(E)$. 当然，这一方案必须满足一定的条件，才符合常理. 如 $E=[0,1]$ 时，应有

$$m([0,1]) = 1;$$

又如 $E_1 \subset E_2$ 时，应满足

$$m(E_1) \leqslant m(E_2);$$

特别是 $E_n (n=1,2,\cdots)$ 且 $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$ 时，希望有

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

然而，这些限制使人们无法设计出一种测量方案，能使一切点集都有

度量.因此,欲使 Lebesgue 积分思想得以实现,必须要求分割得出的点集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$是可测量的——可测集.这一要求能否达到,与所给函数 $y=f(x)$的性质有关.从而规定:凡是对任意 $t\in\mathbf{R}$,点集

$$E=\{x: f(x)>t\}$$

均为可测集时,称 $f(x)$为可测函数.这就是说,积分的对象必须属于可测函数范围.

为了系统介绍 Lebesgue 积分理论,就形成了测度—可测函数—积分这样一个系统①,它构成了本书的第二、三、四章.当然,作为一门数学课程,我们还要先介绍点集理论的有关知识,这对点集测度理论是必要的准备,它作为本书的第一章.

注　Lebesgue 积分理论仍有其不足之处.例如,在公式(2)中仍需假设 $f'(x)$在$[a,b]$上可积,致使换元公式

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

的证明复杂化;又如,在 Lebesgue 积分的意义下,反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是不存在的;等等.此外,1960 年左右,R. Henstock 等学者在相似于 Riemann 积分思想结构的基础上还开发出以他的名字命名的比 Riemann 积分更广的积分理论.

① 随着积分论的发展,还建立了其他积分论的体系.