国内外经典教材辅导系列·理工类

同济大学数学系《高等数学》

（第7版）（上册）

笔记和课后习题（含考研真题）详解

主编：圣才考研网
www.100exam.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

国内外经典教材辅导系列·理工类

同济大学数学系《高等数学》(第7版)(上册)笔记和课后习题(含考研真题)详解

主编：圣才考研网

www.100exam.com

中国石化出版社

内 容 提 要

国内外经典教材辅导系列是一套全面解析当前国内外各大院校权威教科书的学习辅导资料。本书是同济大学数学系《高等数学》(第7版)(上册)的学习辅导书。本书遵循第7版(上册)的章目编排，共分为7章，每章由三部分组成：第一部分为复习笔记，总结本章的重难点内容；第二部分为课(章)后习题详解，对第7版(上册)的所有习题都进行了详细的分析和解答；第三部分为考研真题详解，精选近年考研真题，并提供了详细的解答。

圣才考研网(www.100exam.com)提供同济大学数学系《高等数学》网授精讲班【教材精讲＋考研真题串讲】、3D电子书、3D题库(详细介绍参见本书书前彩页)。随书赠送大礼包增值服务【200元视频课程＋30元3D电子书＋40元3D题库＋70元手机版电子书/题库＋20元圣才学习卡】。扫一扫本书封面的二维码，可免费下载本书手机版；摇一摇本书手机版，可找到所有学习本书的学友，交友学习两不误；本书提供名师考前直播答疑，手机电脑均可观看，直播答疑在考前推出(具体时间见网站公告)。

图书在版编目(CIP)数据

同济大学数学系《高等数学》(第7版)(上册)笔记和课后习题(含考研真题)详解/圣才考研网主编.—北京:中国石化出版社,2015.9
(国内外经典教材辅导系列.理工类)
ISBN 978－7－5114－3620－7

Ⅰ.①同… Ⅱ.①圣… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第214296号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
保定华泰印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 23印张 4彩页 563千字
2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
定价:49.00元

《国内外经典教材辅导系列·理工类》

编　委　会

序 言

我国各大院校一般都把国内外通用的权威教科书作为本科生和研究生学习专业课程的参考教材，这些教材甚至被很多考试（特别是硕士和博士研究生入学考试）和培训项目作为指定参考书。为了帮助读者更好地学习专业课，我们有针对性地编著了一套与国内外教材配套的复习资料，并提供配套的名师讲堂、3D电子书和3D题库。

同济大学数学系主编的《高等数学》（上册）（高等教育出版社）是我国高校采用较多的高等数学权威教材之一。作为该教材的配套辅导书，本书具有以下几个方面的特点：

1. 整理名校笔记，浓缩内容精华。本书每章的复习笔记均对本章的重难点进行了整理，并参考了国内名校名师讲授该教材的课堂笔记。因此，本书的内容几乎浓缩了该教材的所有知识精华。

2. 解析课后习题，提供详尽答案。本书参考大量高等数学相关资料，对同济大学数学系《高等数学》（上册）的课（章）后习题进行了详细的分析和解答。

3. 精选考研真题，巩固重难点知识。为了强化对重要知识点的理解，本书精选了近几年考研数学中关于高等数学部分的真题，并提供详细的解答。所选考研真题基本涵盖了各个章节的考点和难点。

与本书相配套，圣才考研网提供同济大学数学系《高等数学》（上册）网授精讲班【教材精讲+考研真题串讲】、3D电子书、3D题库（免费下载，送手机版）（详细介绍参见本书书前彩页）。

圣才学习网编辑部

目　录

第一章　函数与极限

1.1　复习笔记

一、映射与函数

1. 映射

(1)映射概念

设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 f：$X \to Y$，其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即 $R_f=f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}$.

(2)映射三要素

包括：①定义域 $D_f=X$；②值域 $f(X)$；③对应法则 f.

(3)映射的特点

对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是惟一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是惟一的.

(4)满射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的满射.

(5)单射

若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射.

(6)一一映射(双射)

f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射(或双射).

(7)逆映射与复合映射

①逆映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有惟一的 $x \in X$，适合 $f(x)=y$. 则可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即 g：$R_f \to X$，对每个 $y \in R_f$，规定 $g(y)=x$，则 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

注：只有单射才存在逆映射.

②复合映射

设有两个映射 g：$X \to Y_1$，f：$Y_2 \to Z$，其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g : X \to Z,\ (f \circ g)(x)=f[g(x)],\ x \in X$$

③复合映射的条件

在两个映射 g：$X\to Y_1$，f：$Y_2\to Z$ 组成的复合映射中，g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g\subset D_f$.

2. 函数

(1)函数的概念

①函数的定义

设数集 $D\subset R$，则称映射 f：$D\to R$ 为定义在 D 上的函数，简记为 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量. D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

②函数值域

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

③相同函数所具备的的特点

a. 定义域相同；

b. 对应法则也相同.

④函数的表示方法

表格法、图形法、解析法(公式法).

(2)函数的性质

①有界性

a. 上界：若存在 K_1，对任意 $x\in I$ 有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界.

b. 下界：若存在 K_2，对任意 $x\in I$ 有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界.

c. 有界：若对任意 $x\in I$，存在 $M>0$，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

②单调性

a. 单调递增　当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$.

b. 单调递减　当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$.

③周期性

a. 定义　$f(x+T)=f(x)$(T 为正数).

b. 最小正周期　函数所有周期中最小的周期称为最小正周期.

④奇偶性

$f(x)$ 的定义域关于原点对称，则

a. 偶函数 $f(-x)=f(x)$，图形关于 y 轴对称.

b. 奇函数 $f(-x)=-f(x)$，图形关于原点对称.

(3)反函数与复合函数

①反函数的定义

设函数 f：$D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 f^{-1}；$f(D)\to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

②反函数的特点

a. 当 f 在 D 上是单调递增函数，f^{-1} 在 $f(D)$ 上也是单调递增函数；

b. 当 f 在 D 上是单调递减函数，f^{-1} 在 $f(D)$ 上也是单调递减函数；

c. f 的图像和 f^{-1} 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－1－1 所示.

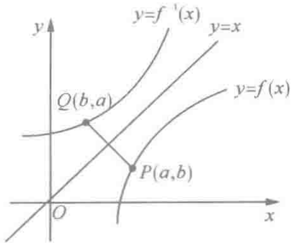

图 1－1－1

③复合函数

a. 复合函数定义

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g\subset D_f$，则函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D_g$ 称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

注：函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按“先 g 后 f”的次序复合的函数，记为 $f\circ g$，即 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

b. 构成复合函数的条件

g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 的值域 R_g 必须包含于函数 f 的定义域 D_f，即 $R_g\subset D_f$.

(4)函数的运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域依次为 D_f，D_g，$D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$，则可以定义这两个函数的下列运算

$$\text{和(差)}f\pm g：(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)，x\in D$$
$$\text{积}f\cdot g：(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)，x\in D$$
$$\text{商}\frac{f}{g}：\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}，x\in D\setminus\{x\,|\,g(x)=0，x\in D\}$$

(5)初等函数

①5 类基本初等函数

a. 幂函数：$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数).

b. 指数函数：$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$).

c. 对数函数：$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$).

d. 三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等.

e. 反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

②初等函数定义

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

二、数列的极限

1. 数列极限的定义

(1)数列的概念

如果按照某一法则，对每个 $n\in\mathbf{N}_+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列 x_1，x_2，x_3，…，x_n，…就称为数列，简记为数列$\{x_n\}$.

(2)数列的项与通项

数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项(或通项).

(3)数列极限

①数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，又称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

②数列发散

如果不存在这样的常数 a，称数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或数列 $\{x_n\}$ 是发散的，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

③表达符号

"对于任意给定的 $\varepsilon>0$"写成"$\forall\varepsilon>0$"，"存在正整数 N"写成"$\exists$ 正整数 N"，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义可表达为：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

注："$\forall$"表示"对于任意给定的"或"对于每一个"，"$\exists$"表示"存在".

2. 收敛数列的性质

(1)惟一性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它的极限惟一.

(2)有界性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

①有界数列

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使得对于一切 x_n 都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

②无界数列

对于数列 $\{x_n\}$，如果不存在正数 M，使得对于一切 x_n 都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

(3)保号性

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$(或 $a<0$)，则存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

推论：如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geqslant0$(或 $x_n\leqslant0$)且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a\geqslant0$(或 $a\leqslant0$).

(4)收敛数列与其子数列间的关系

①如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

②如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限，则数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

③一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

三、函数的极限

1. 函数极限的定义

(1)函数的极限

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数，则这个确定的数就称为在这一变化过程中函数的极限.

(2)函数 $f(x)$ 极限的两种情形

①自变量 x 趋于有限值 x_0 时函数的极限

a. 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（当 $x\to x_0$）.

注：定义中 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$，所以 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限，与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系.

b. 简单表述

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

c. 左极限

在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，则 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$.

d. 右极限

在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，则 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

e. 单侧极限

左极限与右极限统称为单侧极限.

f. $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件

左极限及右极限各自存在并且相等.

②自变量 x 趋于无穷大时函数的极限

a. 定义

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty)$$

b. 简单表述

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 函数极限的性质

(1) 惟一性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则这极限惟一.

(2) 局部有界性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 局部保号性

①如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

②如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A\neq 0)$，则存在着 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$时，有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

③如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

(4)函数极限与数列极限的关系

如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0$ $(n\in\mathbf{N}_+)$，则相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

四、无穷小与无穷大

1. 无穷小

如果函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的极限为零，则称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小. 特别地，以零为极限的数列$\{x_n\}$称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

2. 无穷大

(1)定义

设函数$f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大)，总存在正数 δ(或正数 X)，只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)，对应的函数值$f(x)$总满足不等式$|f(x)|>M$，则称函数$f(x)$是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大.

(2)注意事项

当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大的函数$f(x)$的极限是不存在的，也称“函数的极限是无穷大”，并记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$). 如果在无穷大的定义中，把$|f(x)|>M$换成$f(x)>M$(或$f(x)<-M$)，就记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty\ (\text{或}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=-\infty)$$

(3)渐近线

设曲线 $y=f(x)$，则：

①斜渐近线 $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$$

特别地，当 $k=0$ 时，曲线有水平渐近线 $y=b$.

②垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或者左、右极限趋于无穷)，则垂直渐近线为 $x=x_0$.

3. 无穷大与无穷小之间的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

五、极限运算法则

1. 极限运算法则相关定理

(1)定理1

两个无穷小的和是无穷小. 有限个无穷小之和也是无穷小.

(2)定理2

有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

①推论1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

②推论2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3)定理3

如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

①$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

②$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

③若又有 $B\neq 0$，则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$$

a. 推论1 如果 $\lim f(x)$存在，而 c 为常数，则

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$$

b. 推论2 如果 $\lim f(x)$存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$$

(4)定理4

设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则

①$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$;

②$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$;

③当 $y_n\neq 0(n=1, 2, \cdots)$且 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

(5)定理5

如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=A$，$\lim\psi(x)=B$，则 $A\geqslant B$.

(6)定理6(复合函数的极限运算法则)

设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成，$f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0, \delta_0)$时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

2. $x\to x_0$ 时有理分式函数的极限

设多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x)&=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\\&=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}a_n\end{aligned}$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0)$$

又设有理分式函数

$$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

其中 $P(x)$，$Q(x)$都是多项式，于是

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0),\ \lim_{x\to x_0}Q(x)=Q(x_0)$$

如果 $Q(x_0)\neq0$，则

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=F(x_0)$$

注：若 $Q(x_0)=0$，则关于商的极限的运算法则不能应用，那就需要特别考虑.

六、极限存在准则及两个重要极限

1. 极限存在准则

(1)夹逼准则

①夹逼准则 1

如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

a. 从某项起，即$\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，当 $n>n_0$ 时，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

b. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

②夹逼准则 2

如果

a. 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\ r)$(或$|x|>M$)时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

b. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在，且等于 A.

(2)单调有界准则

单调有界数列必有极限.

①单调增加数列

如果数列$\{x_n\}$满足条件 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$，就称数列$\{x_n\}$是单调增加的.

②单调减少数列

如果数列$\{x_n\}$满足条件 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots$，就称数列$\{x_n\}$是单调减少的.

③单调数列

单调增加和单调减少的数列统称为单调数列.

(3)左极限存在准则

设函数$f(x)$在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界，则$f(x)$在 x_0 的左极限$f(x_0^-)$必定存在.

(4)柯西极限存在准则

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，存在正整数 N，使得当 $m>N$，$n>N$ 时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$.

2. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{ 及}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

3. 常见函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1.$ （令 $t=\arcsin x$）.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{-t}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$（令 $t=-x$）.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$（$\sin x$ 有界，$\dfrac{1}{x}$（$x\to\infty$）为无穷小），$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & \text{当 } n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m\\ \infty, & \text{当 } n<m\end{cases}$，其中 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m 和 n 为非负整数.

(7) 幂指函数的极限

一般地，对于形如 $u(x)^{v(x)}$（$u(x)>0$，$u(x)\neq 1$）的函数（通常称为幂指函数），如果 $\lim u(x)=a>0$，$\lim v(x)=b$，则 $\lim u(x)^{v(x)}=a^b$.

注：这里三个 lim 都表示在同一自变量变化过程中的极限.

4. 有关 sin*x*，*x*，tan*x* 的不等式

$$\sin x<x<\tan x,\quad \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\text{或}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

七、无穷小的比较

1. 相关无穷小的定义

(1) 高阶无穷小

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 低阶无穷小

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) 同阶无穷小

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则 β 与 α 是同阶无穷小.

(4) k 阶无穷小

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，则 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(5) 等价无穷小