



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

DESARGUES THEOREM
—ABOUT PROJECTIVE GEOMETRY

Desargues定理 ——射影几何趣谈

冯克勤 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



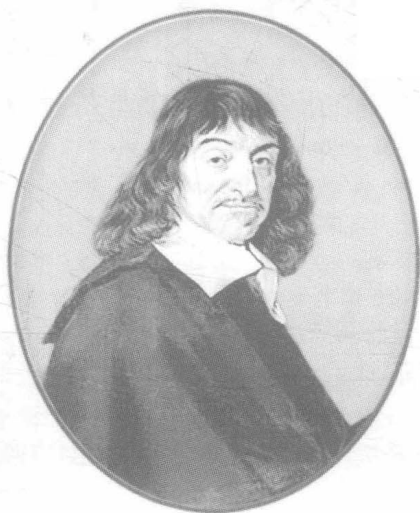
国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

DESARGUES THEOREM
—ABOUT PROJECTIVE GEOMETRY

Desargues 定理 ——射影几何趣谈

冯克勤 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书深入地探讨和介绍了射影几何这一几何分支的基本内容,并讲述了平面射影几何中的一些有趣的定理和概念.同时通过大量的例子来说明,如何利用射影几何的知识和方法解决平面几何学中的问题.

本书适合初、高中师生,以及高等师范类院校数学教育专业的大学生和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Desargues 定理:射影几何趣谈/冯克勤著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.7

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6777 - 4

I. ①D… II. ①冯… III. ①射影几何 IV. ①O185

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 173531 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 钱辰琛

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 15 字数 166 千字

版 次 2017 年 7 月第 1 版 2017 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6777 - 4

定 价 68.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。

真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,我便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、元曲,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

前言

射影几何具有悠久的发展历史. 远在公元前 4 世纪, 古希腊人已经发现了圆锥曲线. 公元前 3 世纪, 希腊数学家欧几里得 (Euclid) 和阿波罗尼 (Apollonius) 都发表了关于圆锥曲线的专门著作. 他们发现了关于圆锥曲线的许多有趣的性质, 这些性质属于现在射影几何的内容. 15 世纪和 16 世纪, 欧洲的学者由于绘画、雕塑和建筑的需要, 发现了透视原理. 到了 17 世纪, 法国数学家笛卡儿 (R. Descartes, 1596—1650) 引入了直角坐标系, 使几何学代数化. 许多几何问题归结于代数上的解联立方程组, 从而把几何图形的性质归结为一些代数运算, 这就是解析几何. 解析几何的出现, 对于力学、物理学和数学本身的发展, 起了很大的推动作用. 但是, 在另一方面, 几何本身仍有它自身的直观性和优美性. 与笛卡儿同时代的法国数学家德沙格 (G. Desargues, 1591—1661) 和帕斯卡 (B. Pascal, 1623—1662) 创立了射

影几何. 1639 年, 德沙格通过对透视的研究, 建立了无穷远点和射影空间的概念. 1649 年, 帕斯卡发现了关于圆锥曲线的著名定理. 由此, 一个优美的数学学科——射影几何产生了.

18 世纪是解析几何得到广泛应用的时代, 而 19 世纪则是射影几何大发展的时代. 射影几何的发展, 首先应归功于法国另一位数学家彭色列 (J. V. Poncelet, 1788—1867). 他于 1822 年出版了有名的著作《论图形的射影性质》, 系统地研究了图形在中心射影之下不变的性质. 在这之前, 射影几何是在欧氏几何的框架里进行研究的. 但是欧氏几何中的最基本概念——距离, 以及角度、面积等性质, 在中心射影之下是变化的. 既然是这样, 为什么射影几何一定要依附于以距离为基石的欧氏几何? 于是, 在 1847 年, 德国数学家冯·施道特 (K. G. C. von Staudt, 1798—1867) 等人建立了射影几何自己的公理系统. 至此, 射影几何作为一个独立的几何学科, 基本上完整地建立了起来. 射影几何有别于欧氏几何, 最显著的差别是射影几何中没有“直线平行”这个概念, 在射影平面中的任意两条不同的射影直线均恰好交于一点. 在这期间, 法国数学家庞加莱 (H. J. Poincaré, 1854—1912), 匈牙利数学家波约依 (J. Bolyai, 1802—1860) 和俄国数学家罗巴切夫斯基 (Н. И. Лобачевский, 1792—1856) 各自独立地建立了另一些非欧几何的模型. 在这些不同的几何学的基础上, 1872 年德国数学家克莱因 (F. Ch. Klein, 1849—1925) 在著名的爱尔兰根纲领中给几何学下了一个经典的定义: 几何学是研究空间在某个变换群下不变性的一门学问.

以上我们扼要地叙述了射影几何的产生和发展,以及射影几何在整个几何学发展中所处的地位.19世纪是射影几何的光辉时代,以至于当时英国数学家凯莱(A. Cayley, 1821—1895)说过这样一句名言:一切几何都是射影几何!

在这本书里,我们打算通俗地介绍平面射影几何中的一些有趣的定理和概念.我们也以大量的例子来说明,如何利用射影几何的知识和方法来解决平面几何学中的问题.从上面关于几何学的发展历程中看出,解析几何和射影几何是以不同的风格平行地前进;与此同时,它们也是相互渗透和相互促进的.在射影几何中采用了解析几何的手段和工具,如射影坐标等.但是,我们在本书中更多的是采用几何方法,以体现射影几何本身的内在美.我们也说过,射影几何已是一门独立的几何学科,它有着自己的公理系统.但是,作为一本通俗性读物,我们不打算从公理出发严格地板着面孔讲述,而宁愿先从射影几何中一个精彩的定理——帕斯卡定理出发.我们在第1章中,先给出这个优美定理的一个初等几何的证明;然后,再给出另外两个证明,后一个证明中体现出射影几何的思想,特别是引出了中心射影的概念和添加无穷远点的自然想法.随后,在第2章中,我们逐节介绍平面射影几何中的主要概念(射影平面、射影坐标、复比、对偶性、配极理论等)和主要定理,尤其是要着重讲述关于圆锥曲线的一些优美性质,以及如何用这些概念和性质解决平面几何中的问题.最后,在第3章中,我们讲述射影几何在整个几何学中的地位,告诉大家什么是射影几何,介绍它的“子几何”——仿射几何,再说明欧氏几何又是仿射

几何的“子几何”.我们用射影几何构作出非欧几何的模型,使大家理解克莱因的几何定义,并且懂得在现实世界中存在着许多不同的几何.

我们希望本书能使读者增强几何直观形象思维的能力和对几何学明快典雅风格的喜爱.另一方面,我们(特别是在书的后半)也使用了一些代数工具(解线性方程组的行列式理论、坐标方法等),希望读者对于这些中学数学知识能够灵活运用和融会贯通.因为整个数学是一个有机的整体,而许多新思想往往在不同学科交汇处产生和发展起来,射影几何充分体现了这一点.

◎
目
录

第1章 从帕斯卡定理谈起 //1

1.1 帕斯卡定理和它的初等证明 //1

1.2 反演——帕斯卡定理的第二个证明 //4

1.3 中心射影——为什么要引入无穷远点 //12

1.4 用射影几何解题——帕斯卡定理的第三个证明 //25

第2章 平面射影几何 //35

2.1 “此时无穷胜有穷”——再谈射影平面 //36

2.2 复比和它的应用 //47

2.3 美的构图——调和点列 //58

2.4 射影坐标——代数工具的引入 //69

2.5 对偶原理——射影几何的内在美 //82

2.6 再谈奇妙的圆锥曲线 //91

第3章 什么是几何学 //102

3.1 仿射几何——射影几何的“子几何” //102

3.2 用仿射几何解题 //115

3.3 什么是几何学 //124

3.4 谈谈非欧几何 //131

部分练习题提示和答案 //142

附录 I F_1 上的射影几何和高斯二项式系数 //163

1. 介绍 //163

2. 高斯二项式系数 //163

3. 射影几何 //167

4. 进一步研究的方向 //174

附录 II 10 阶有限射影平面的搜索 //176

1. 序言 //176

2. 问题的历史 //177

3. 最终结果的初始研究 //183

4. 恰中要害的伸展 //188

5. 终点线 //193

6. 这是真正的结束吗 //195

7. 后记 //196

附录 III 环与体 //201

编辑手记 //215

从帕斯卡定理谈起

第 1 章

1.1 帕斯卡定理和它的初等证明

帕斯卡在 16 岁的时候发现了下面一个美妙的定理:

帕斯卡定理 设 $ABCDEF$ 是圆 O 的内接六边形. 对边 AB 和 DE 交于点 X , 对边 BC 和 EF 交于点 Y , 对边 CD 和 AF 交于点 Z , 则 X, Y 和 Z 在一条直线上(图 1.1).

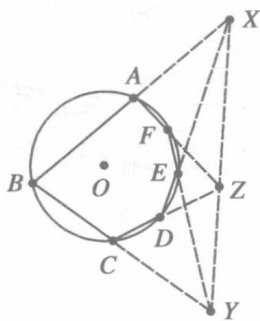


图 1.1

帕斯卡的许多关于圆锥曲线的著作,不幸都失传了. 德国数学家莱布尼茨

Desargues 定理

(G. W. Leibniz, 1646—1716) 说他看见过帕斯卡的这个定理, 并且将它称作“神奇的六边形”. 我们不知道当年帕斯卡是如何证明这个定理的, 但是现在人们已经给出它的许多种证明. 本章中我们给出其中的三个证明, 下一章中还要给出另一个证明. 在这一节中, 我们先给出一个初等几何的证明. 为此, 我们需要两个预备定理.

预备定理 1 设圆 O 和 O' 交于两个点 P 和 Q . 过点 P 作直线 AB , 与圆 O 和 O' 分别交于点 A 和 B . 过点 Q 作直线 $A'B'$, 与圆 O 和 O' 分别交于点 A' 和 B' . 则 $AA' \parallel BB'$.

证明 联结 PQ (图 1.2). 由圆内接四边形的性质可知 $\angle \alpha = \angle \beta$, $\angle \beta = \angle \gamma$. 于是 $\angle \alpha = \angle \gamma$. 从而 $AA' \parallel BB'$. 证毕.

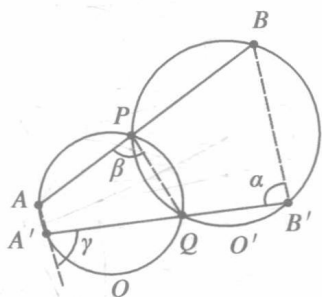


图 1.2

预备定理 2 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应边平行, 即 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$. 如果直线 AA' , BB' , CC' 两两相交, 则这三条直线必相交于一点.

证明 设 AA' 和 BB' 交于点 S . 我们只需证明 C' 一定在直线 SC 上. 现在过 A' 作直线平行于 AC , 并且与