博雅

北京大学力学学科规划教材

微积分导引（上）

An Introduction to Calculus

唐少强 编著

京大学出版社
NG UNIVERSITY PRESS

博雅

微积分导引（上）

An Introduction to Calculus

唐少强 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分导引. 上 / 唐少强编著. —北京：北京大学出版社，2018.8
ISBN 978-7-301-29778-0

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①唐… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ① O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 184918 号

书　　名	微积分导引（上） WEIJIFEN DAOYIN
著作责任者	唐少强　编著
责任编辑	刘啸
标准书号	ISBN 978-7-301-29778-0
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
电子信箱	zpup@pup.cn
新浪微博	@北京大学出版社
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62754271
印 刷 者	三河市北燕印装有限公司
经 销 者	新华书店
	730 毫米 × 980 毫米　16 开本　12 印张　229 千字 2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	39.00 元

前　　言

微积分是近现代科学最重要的数学工具, 也是所有理工科学生必备的基础知识. 微积分在不同的学校、专业, 常常以《数学分析》或《高等数学》为名出现在本科生培养方案中. 习惯上, 名之以《数学分析》时, 更加偏重数学基础, 也就是说, 要讲授并要求学生掌握严格的极限理论, 甚至实数定义. 而名之以《高等数学》时, 主要要求学生掌握求导求积分这些工具. 更加细致地, (一元) 微积分可由浅入深分成以下四个层次来理解和讲授.

1. 牛顿–莱布尼茨公式. 从作为变化率 (几何上就是斜率) 意义的导数入手, 给出导 (函) 数以及导数的基本运算法则 (四则运算、复合、参数表示、反函数、隐函数), 再给出求导的逆运算 (逆算子) 不定积分, 以及作为总求和量 (面积) 的定积分. 牛顿–莱布尼茨公式也称为微积分学基本定理, 联系导数和积分这两种运算, 即定积分可以用不定积分求出 (以及反过来不定积分可以用变上限积分得到). 这就给出了一个完整的作为计算体系的微积分 (用于分析相关应用问题).

2. 泰勒公式. 牛顿所称的求导与莱布尼茨所说的微分对一元函数而言是等价的. 微分以局部线性近似为基本出发点, 即函数的增量主要由线性部分 (微分) 刻画, 其余部分是高阶无穷小量 ($o(\Delta x)$). 这里的线性变化率 (微商) 就是导数, 它逐点变化. 对于逐点变化的变化率, 如果再看它的线性增量, 就得到二阶导数, 相当于对原来的函数做二阶多项式近似, 不够准确的部分是更高阶的无穷小量 ($o((\Delta x)^2)$). 如此续行得到的多项式逼近就是泰勒展开. 泰勒展开式包含了丰富的信息, 譬如单调性、极值、凸性等等. 与微分相应, 定积分的理论基础是有限和, 其中每一项来自于对小区间 Δx 上函数下方的面积做矩形近似, 这与微分异曲同工. 非常有意义的是, 上述局部近似得到的有限和在分割无限加密时, 准确地给出了定积分这样的整体信息. 另一方面, 在泰勒公式基础上发展出函数的精确近似: 泰勒级数. 更为一般的级数和函数项级数, 是微积分进一步的知识, 其中特别值得重视的是傅里叶级数 (和傅里叶变换). 几乎可以说, 把微积分作为应用工具时, 掌握了傅里叶级数就 “走遍天下都不怕”, 因为绝大多数应用都 (近似) 是线性问题, 而傅里叶级数和傅里叶变换处理线性问题特别有效.

3. 极限. 如果说前面两个层次更多的是计算的微积分, 那么极限就是分析的微

积分. 导数和积分是两种特殊的极限. 极限的根本在于它定义了一个过程, 而不是仅仅着眼于数值本身. 以无穷小为例, 除了 0 没有一个数是无穷小的, 因为总还有比它绝对值更小的数 (例如它的一半). 无穷小描述的是一个不断接近于 0 的过程. 如果以日常生活为例, 考虑一个孩子可能提出的问题: 汽车最慢开多快? 不能回答 0, 因为这时汽车是停着的而不是开着的. 也不能回答 0.001 米/秒, 因为还可以更慢. 正确的回答是看似答非所问的: 汽车慢慢停下来. 这个停下来的过程包含了所有 "慢" 速度, 把不恰当的提问更正为一个可以数学上准确刻画的命题. 定义了作为过程的极限, 就能跳出简单比较大小的窠臼, 进入清晰的无穷大/小的讨论和分析, 微分和积分就有了干净准确的语言基础. 什么是一个微积分意义下的证明, 也就是可以判定, 从而可以传授的了.

4. 实数. 实数的准确定义, 迄今只不过百年左右, 晚于极限, 更晚于导数和积分. (一元实值) 函数就是实数间的一个映射, 而实数定义里已包含极限过程, 这在本书采用的规范无尽小数定义中格外明晰. 实数四则运算基于上确界和下确界, 确界原理的证明则包括了构造和证明这两个过程, 而且都具备了清晰的极限证明的特征. 完全可以说, 实数的定义、四则运算、比较大小、确界原理不仅在理论上是微积分坚实的基础, 而且在技术和深度上也是微积分知识中的高峰.

以自然数和实数为基础 (**起**) 的数学分析, 给出了极限的严格定义, 这种定义方式符合数学的内在逻辑, 我们要同时看到与自然理解中极限 (x 越靠近 a, 则 $f(x)$ 越靠近某个 A) 的叙述方式不同. 一旦获得对极限的理解, 就可以通过局部线性近似 (**承**) 得到可微与可导, 并进一步用导函数的办法通过运算得到一般的 (初等) 函数的导数. 接着, 从罗尔定理开始, 发展一系列中值定理 (**转**), 由此不但推出了洛必达法则、泰勒展开, 更重要的是揭示了函数与导函数的关系是可以反求的 —— 当然在差一个常数的意义下, 于是就得到不定积分. 最后, 牛顿–莱布尼茨公式联系了不定积分和定积分 (**合**), 一元微积分的理论也就圆满建成.

作为应用的微积分, 微分运算对于研究函数的极值、单调性、凸性等有着系统简便的讨论方法, 不定积分对于常微分方程求解是一个基本手段, 而在几何、物理等应用中人们通过微元法大量应用定积分的知识处理问题. 即便未能清晰掌握数学分析的理论基础和内在逻辑, 仅仅求导、不定积分、定积分、洛必达法则求极限、费马定理求极值这几个重要的工具, 就在近现代科学中起到了支柱作用. 特别值得强调的是, 这是非常系统、基础和相当完备统一的处理方式, 完全没有数学竞赛风格的炫技. 微积分清楚深刻 (**真**)、可学好用 (**善**)、雍容大度 (**美**).

对于学习和成长来说, 微积分帮助大家从中学教育过渡到大学学习. 首先, 微积分与中学的数学课程一样, 都是严谨建立的, 而不是来自于不同方面的知识堆积, 充分体现了数学 "以概念、因逻辑、求真理、得自在" 的风范. 而在大学今后的学习中, 演绎性的知识体系常常会掺进去不少归纳得来的重要结论. 其次, 微积分课程

至少开始时教师会比较完整地带着同学们逐步积累概念、推导性质、证明定理、实施运算、开展应用. 而且, 微积分是大学阶段不多的有习题课的课程之一. 经过这些过程, 学生将逐渐学会自主学习.

更加细致地说, 微积分 (和分析类数学) 对于构建知识体系有四个方面的作用.

1. 工具. 近现代科学的范式基本上定格在牛顿力学, 而微积分工具决定了科学的基本思维方式是分析 —— 不断分而析之直至无穷小, 以及在此基础上的综合 —— 求积分. 细思一下, 按理说人们应该对离散的算术/数学更加熟悉, 但现代科学几乎完全是连续数学 (微分方程为代表) 的天下 (直到计算机普及才有所改观). 于是, 学习作为工具的微积分必须达到算得又快又准的水平. 一般而言, 算得慢与不熟练有关, 不熟练就容易出错. 而对于后续的理工科课程, 求导求积分是个基本功, 大量用到, 因此微积分计算直接决定了后续课程的学习进度和质量, 无论怎样强调都不为过.

2. 语言. 微积分作为语言的含义有二. 一方面, 它是微分方程、复变函数、泛函分析等分析类课程的基础, 成熟的学科一般都有独特的控制方程, 譬如弹性力学方程组、纳维–斯托克斯方程组、薛定谔方程、麦克斯韦方程组、反应动力学方程组, 等等, 这些学科的叙述方式就依赖于微积分提供的语言. 可以说, 不懂微积分就无法登堂入室. 另一方面, 微积分提供了准确清晰的词汇、语法和章法, 这对于叙述、思考和解决问题以及交流是基础性的. 这正如今日的我们很难理解古人对于马, 或者法国人对于葡萄酒和奶酪有很多分法, 也就更不可能进一步深入探讨. 语言对于思维的重要性, 从德语的严谨和德国产生的一批哲学家、数学家等也可见一斑. 语言为思想编织了一个网, 大学一入门先编上一套缜密结实的微积分之网是今后学习所必需的①.

3. 思想. 牛顿以微积分为语言率先发展出的力学体系, 具备了欧几里得几何那样清晰、准确、通用的特点, 对于科学的发展、人类思想的进步提供了前所未有的可能性. 虽然与哲学、法律等同样强调逻辑、思辨, 但科学上概念和命题的清晰使得结论可以也必须通过平等开放的交流达到, 而非凭权力、财富、声望、地位来主宰钳制. 就数学而言, 如果同一个问题两个人得到不一致的结论, 那么至少一个人是错的②. 基于微积分等数学语言发展、表述出来的现代科学及技术, 充分表明这种基于平等、自由的思考是如何深刻、先进、势不可当. 我们学习微积分, 需要认真体会这种思想, 努力向着 “概念清” 前进, 这也是数学分析区别于高等数学的重要方面. 证明题对概念清尤为重要, 知道一个命题需要证明、什么是一个证明、如何得到证明的关键想法, 以及怎样完整严谨地论述, 这是科学思维训练的核心, 从这个角度看, 数学技巧反而只是术而非道.

① 这个网由细入粗易, 由粗入细难.

② 转引自石根华教授, 这里 “错的” 似应包括不完整.

4. 人格. 由于微积分的上述特点, 学习了微积分, 并且以此作为基本手段进一步学习工作的人, 浸淫日久, 就会受其影响, 在思考、做事、为人上都有所不同. 首先, 建立了一种分析的思维方式, 讨论事情讲求明确、准确, 研究问题善用逻辑、计算, 认识世界相信万物自有理在其中; 其次, 对于定量化有更高的期待, 也有更高明的手段进行处理; 再次, 能够从细小处着手, 不断积累、转变、提高, 直至取得完整的认识. 由此而往, 对世界的理解不断精进, 对一己的期待不断努力而又自知自足, 认识到在 "数" (自然规律、社会规律) 面前人人平等, 生出不卑不亢、不喜不悲之心. 世人心目中发呆的数学家, 又何尝不正是得大智慧者的形象呢?

对于学习微积分, 光有上述 "心法" 远远不够. 我们还是从课前、课上、课后, 以及教材、参考书、习题分别来说.

新入大学的同学容易有一个误解, 以为大学听听课、写写作业、考前突击一下就能完成学业. 其实不然. 大学, 尤其是强手如林的好大学, 一个基本的特点就是学习时间不够用. 对于平均智力和基础的同学, 普通难度的课程, 不很突出的成绩期望值, 一门课程的总学习时间大概是课时的 3 倍. 以 "微积分" 为例, 每周 4 学时大课加上 2 学时习题课, 课后应该花大概每周 12 小时 (4 个 3 小时时段 —— 上午、下午、晚上). 如果期待有更大的提高, 还得继续增加时间. 学习时间如果达不到, 就不必讨论学习方式的改进了. 在足量学习时间的前提下, 学习方式其实包括两部分: 一是过去已经建立好的学习习惯, 譬如预习、复习的习惯, 积累错题的习惯, 与同学讨论交流、咨询主讲老师和助教的习惯, 都应该悉数保留; 另一部分是大学特色的新的学习方式, 这是应该要努力学习、尝试、建立的. 大学学习更为自主, 学习方式因人而异, 没有最好的, 只有最合适的. 而因为尝试最费时间, 所以不建议一年级的同学选很多课, 参加过多的课外活动和社会服务. "微积分" 需要长时间静心的学习才能有效掌握知识技能. 课前的预习未必要花很多时间, 稍看一下, 搞清楚大致的来龙去脉、跟已学知识的关系, 特别是看出难点、重点在哪里, 接着课上就可以选择性地集中注意力听讲、思考. 课后是大学学习中最主要的. 一般而言, 应该先读书, 回顾主要知识点, 然后再开始完成作业, 并且补充完成足量作业外的习题来熟悉各种思路和题型, 此外留出时间思考和讨论. 思考, 是指自己花时间整理知识和技巧; 讨论, 是指就自己不明白的问题问别人, 和帮助别人解释消化他 (她) 的难点. 大家一般都愿意花时间思考, 但是对于讨论, 往往只愿意问别人自己不明白的, 不怎么情愿把时间花在为别人解难. 其实, 对于知识点多、逻辑深长的微积分, 给别人讲解往往对自己的帮助更大, 自己以为明白和能给别人讲明白之间有一个很大的飞跃, 只有真正清楚, 又善于言语表达才能做到后者, 这里且不说助人为乐带来的人品提升. 而通过训练自己真正清楚, 以及通过理解别人之所以不理解相关内容的困难所在, 对于更好掌握知识体系和逻辑结构绝对很有帮助.

教材是教员授课的基础, 一般也是考试的依据. 对于学生而言, 教材有一定可

能性不适合个人喜好, 这可能是因为叙述方式, 也可能是因为知识安排, 甚至书本的印刷排版风格都会影响阅读体验. 譬如, 有的同学喜欢逻辑严谨、一板一眼的教材, 有的同学则喜欢从例子入手, 先讲清楚目标用途, 再说具体技术细节的教材. 当教材不适合作为唯一读物, 就要选择 $1 \sim 2$ 本参考书, 可以到图书馆、书店直接查找, 不需要非得跟教材的要求、水准一致, 看得顺眼、跟得舒服就好, 因为微积分的主要内容在不同的书里都是差不多的, 先通过适合自己的参考书掌握到大的方面, 再去读教材求精就更有成效一些. 接着就要说到习题和习题课. 可以说, 大课 (主讲) 往往只提供微积分学习的一个基础, 上课觉得听懂了, 跟能够顺利理解和应用所学知识做题之间有很大距离. 这其实是一个建模的过程, 即把要完成的作业上的问题化成微积分大课传授的知识技能所能解决的模型, 习题课就带着同学们学会走过这段距离. 习题是真正自己学会课程内容、应用解题最重要的部分, 只有通过解题, 才能真正理解和掌握微积分, 术之不存, 道将焉附? 那么, 题目应该做多少才合适呢? 一般而言, 多多益善. 微积分可以说是人类智慧最密集的课程, 数百年来最聪明的脑袋积累下来的知识, 经过上百年的几乎所有正规大学理工科的讲授整合, 知识密度不是一两个学期做题就能完全解压的. 在肯定做不完的前提下, 可以有一些选题的技巧, 那就是: 每段内容基本 (简单) 题要完整地做几道, 掌握基础和规范表述, 其他基本题跳着比划一下, 有思路就可以放掉, 直至遇到新题、中等题. 中等题需要根据时间多做一些, 这部分是提高自己水平最有用的, 没有思路的时候, 可以适当找一些例题、解答, 但一定要自己想过之后再找答案. 难题是一定有的, 而且必须总有几道装在脑子里, 目的不是为了解出来, 而就是为了训练思维. 正如禽类的嗉囊, 里面的沙子没有什么营养, 但可以用来磨食. 正因为不会做, 所以能够逼着自己左冲右突、尝试各种可能, 即便这些可能性最后都没帮助实现解决问题的目标, 尝试的过程对于理解概念、定理、技术的各个侧面会裨益甚大. 需要特别指出的是, 这里所说的难易程度, 因人而异、因时而异.

从 1997 年起, 我在北京大学力学系和之后的工学院讲 “数学分析/微积分”, 迄今 10 轮. 我们一直选用北京大学出版社经典之作, 张筑生教授编著的《数学分析新讲》. 它知识完整、结构清晰、逻辑缜密, 是一本难以逾越的教材, 我从中受益匪浅. 北大力学系源自于 1952 年成立的数力系力学专业, 是全国第一个理科力学专业, 理科力学对于数学的要求在所有非数学专业中是最高的. 因此, 数学分析课一直与数学系 (后来称数学科学学院) 同等要求, 并于 1999 年就作为组成部分纳入北京大学 “数学分析” 本科生优秀主干基础课体系. 由于生源不同、后续培养方案和应用背景不同, 对于力学专业的学生和以发展 “science-based-engineering” 为己任的工学院的学生而言, 授课的要求和方式也有所不同. 譬如, 我们首先要求学生 “算得快”, 在此基础上再要求学生 “概念清”. 再如, 数学系有后续实变函数等课程可以加深学生对实数理论的理解, 而我们没有, 因此为了知识的完整必须一开始就把实

数理论讲全, 这对初入黉门的不少学生而言有很大挑战性. 在教学过程中, 我们发现需要更新一些内容、调整一些讲法、增加一些浅显的陈述、勾连一些蛛丝马迹, 以帮助我们的学生更愿意学、学得更有效, 因此, 本人不揣浅陋, 将历年讲义蒐集成册, 名之曰《微积分导引》. 导引中编入的习题, 量相当小, 只够帮助粗粗消化主要内容, 应该配合《吉米多维奇习题集》服用.

感谢前辈老师, 特别是武际可老师、王敏中老师、叶以同老师, 和一同教学的同事们, 以及历年来的助教.

感谢参加这门课程学习的同学们. 北京大学之所以成为北京大学, 是因为你们, 而不是我们; 将因为你们, 并不是我们.

感谢协助讲义输入的白彬、郝进华, 此外, 董子超同学提供了部分习题.

感谢北大出版社的刘啸同志在编辑出版上的帮助, 以及力学系王勇教授的校阅.

目　　录

第一章 实数与直线

说起实数 (real number), 我们通常都觉得很熟悉. 其实仔细推敲一下, 事情并不那么简单. 要知道, 微积分是牛顿 (Isaac Newton, 1642 — 1727) 和莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 — 1716) 在 17 世纪创立的, 而实数理论则过了二百年, 在戴德金 (Dedekind) 等人手上才真正弄明白.

俗话说: 不入虎穴, 焉得虎子? 只有深入, 才能浅出, 本章介绍的实数理论实际上是微积分课程中最为深刻的一段. 我们将几乎是空手 (但逻辑是要用到的) 定义出自然数、有理数、实数、四则运算, 而微积分的核心概念 "极限" 就建立在这些定义的基础之上. 在学完一元微积分后, 应当重新学习本章, 你就会有更深的理解和体会.

1.1 实数的定义与直线

问题: 什么是 $\sqrt{2}$?

这看起来是个很简单的问题. 我们可以试着这么回答: $\sqrt{2}$ 是 2 的正平方根. 但什么是 2? 什么是正? 什么是平方根? 为什么 2 有正的平方根? 是不是只有一个? 如果是, 为什么?

要回答这些问题, 我们得从自然数讲起. 大家知道, 自然数[①] (natural number) 是指 $1, 2, 3, \cdots$, " 严格" 的定义可以用枚举的办法, 也就是说 $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 但这省略号表示什么呢? 事实上, 自然数的定义是和加法联系在一起的, 换言之, 自然数可以用第一个数 1 和后继为基础说清楚. 自然数集合的严格定义如下:

公理 1.1 (皮亚诺, Peano)

(P1) *有数 1;*

(P2) *每一个数 m 都有一个后继, 记为 $m+1$;*

(P3) *1 不是任何数的后继;*

(P4) *若 $m+1 = n+1$, 则 $m = n$;*

(P5) *(归纳公理) 若自然数集的一个子集合满足 (P1) 和 (P2), 则它就是自然数集.*

[①] 本书自然数集合的定义不包括 0, 与中小学阶段略有不同.

这里定义了一个以 1 为首的一列 "数字" 队伍, 我们依次称它们为 $2, 3, 4, \cdots$, 这就解释了省略号的意思. 大致说来, (P1) 和 (P3) 说明了 1 是个头; (P2) 说明了有一个排好队的链; (P4) 和 (P5) 说这个链不打圈, 而且就只是这一个链.

自然数的加法来自于我们把后继解释为加 1, 具体地说, n 的后继为 $n+1$, 而 $m+n$ 可以定义为 $[(m+1)+1]+1+\cdots$, 或者递归定义 $m+(n+1)=(m+n)+1$. 可以证明 (试一试!) 这样定义的加法满足:

(1) 交换律 $m+n=n+m$;

(2) 结合律 $(m+n)+p=m+(n+p)$.

我们就交换律做示例性的证明.

首先, 我们看到 $1+1=1+1$, 那么, 由 2 的定义知道 $1+2=1+(1+1)$, 再由加法的递归定义, 知道 $3=2+1=(1+1)+1=1+(1+1)$. 这样, 结合二者就得到 $1+2=2+1$.

类似地, $1+3=1+(2+1)=(1+2)+1=3+1$. 如此, 可以递归地证明 $m+1=1+m$[①].

再试试增大加号后边的 n. 我们知道 $2+2=2+2$, 表示 2 后边第二个后继, 即 4. 那么 $3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=(2+2)+1=2+(2+1)$. 请试着讨论一下, 这里的每一步是用的自然数定义、加法递归定义的哪一条.

因为自然数集合通过后继来定义, 我们就得到了数与数之间的一种 "序" 的关系, 大于、等于和小于的意思于是就知道了: 排在后边的数较前边的数更大. 任给两个自然数 m 和 n, 必有三种关系中的一种出现, 而且只有一种. 这就是说, 自然数可以比较大小. 后面我们将看到, 实数比较大小要困难许多.

自然数这个定义对于微积分来说, 非常重要的是第一次清晰、准确地刻画了一个无穷的概念. 我们没有定义任何一个数是无穷大. 事实上, 任给一个自然数 n, 都存在比它更大的数, 如 $n+1$. 但是, 自然数逐渐加大这样一个无穷的过程, 定义了一个无穷. 我们今后会不断看到这样一个作为过程的 "无穷".

顺便提一下, 数学归纳法的基础正是源于自然数的定义.

定义 1.1 (数学归纳法) 要证明当 n 等于任意一个自然数时命题 A 成立, 可将其分下面两步:

(1) 命题 A 对 $n=1$ 成立;

(2) 假设命题 A 对 $n=m$ (或 $1 \leqslant n \leqslant m$) 成立, 则它对 $n=m+1$ 成立. 那么, 命题 A 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立.

整数 (integer number) 的定义, 来自于人们对加法的逆运算 —— 减法的需要. 如果 $m+p=n$, 那么定义 $n-m=p$. 和加法一样, 其实我们也可以只是定义减 1,

①递归指数学归纳法, 含义见下一段.

而减 n 就是重复 n 次减 1. 但问题是, 1 减 1 是什么? 进而问 $n-m(n<m)$ 是什么? 这在自然数集中是无法说清楚的, 也就是说, 自然数集对减法不封闭. 整数应运而生.

这里, 特别值得一提的是 0. 如果说自然数的出现是从生活中 "有 1 个苹果, 再有 1 个苹果, 就有了 2 个苹果" 加以抽象的话, 那么 0 的出现则是人类思维的一个突破, 用 "有 0 个苹果" 表示了 "没有苹果".

从 $1-1=0$ 我们可以用数学归纳法证明 $n-n=0(\forall n\in\mathbb{N})$[①], 于是有 $n+0=0+n=n$, 而 0 就称为加法的单位元 (零元). 负数可以定义为逆元, 也就是说, $-n$ 定义为满足 $n+(-n)=(-n)+n=0$ 的数. 整数集合是所有自然数和它们的逆元以及 0 的并集. 试着用减法的定义、加法的性质和 0 的性质证明一下, 这样的数 $-n$ 是唯一的. 特别地, 0 的逆元是它本身. 自然数又称正整数 (positive integer), 自然数的逆元给出的数称为负整数 (negative integer).

运用 0 的性质和交换律、结合律, 现在加法已经可以定义到整数集 $\mathbb{Z}$[②] 上: 如果两个都是正数, 就用自然数加法的定义; 如果都是负数, 定义为 $(-m)+(-n)=-(m+n)$, 其中 $m+n$ 用自然数加法的定义; 如果一正一负, 定义为 $(-m)+n=-(m-n)$ (如果 $m\geqslant n$) 或 $(-m)+n=n-m$ (如果 $m\leqslant n$). 容易知道, 这样的加法是良定义的, 并满足交换律和结合律.

两个整数大小的比较可以通过自然数的大小来确定. 以大于为例, 两个正整数的比较就是自然数的比较, 任一个正整数比 0 大, 0 又比负整数大 (大于有传递性, 因而这就隐含了正整数比负整数大), 而两个负整数 $-m>-n$ 当且仅当 $n>m$.

人类 "偷懒" 的力量是无止境的. 有了加法, 人们还想到乘法. 事实上, 前面自然数 n 就是定义为 1 的第 $(n-1)$ 个后继, 或者 n 个 1 连加 (因为有结合律, 连加不引起歧义).

说到这里, 上面所有的内容并不涉及自然数的记法. 有了乘法, 就可以有数的进制. 例如, 我们通常用的十进制数只要十个数字 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, 而数

$$a_na_{n-1}\cdots a_0=a_n\times\underbrace{10\times\cdots\times 10}_{n}+a_{n-1}\times\underbrace{10\times\cdots\times 10}_{n-1}+\cdots+a_0,$$

其中 $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, i=1,2,\cdots,n, a_n\neq 0$.

还是为了 "偷懒", 人们称 n 个相同的数 a 的连乘为乘方 (power), 记为 a^n. 特别地, 2 个连乘为平方 (square), 3 个连乘为立方 (cubic). 于是上式可记为

$$a_na_{n-1}\cdots a_0=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_0.$$

① 这里 $\forall$ 表示集合中随便哪一个元素, 读成 "任给", 从 any 的第一个字母 a 大写成 A 再倒过来而得.

② 来自于德语 Zahl (数).

现在回到乘法上来. 结合加法的性质可以知道, 整数的乘法有

(1) 交换律 $a\times b=b\times a$;

(2) 结合律 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$;

(3) 乘法关于加法的分配律 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.

整数乘法的单位元 (幺元) 是 1, 即 $a\times 1=1\times a=a$.

与减法的想法类似, 我们也可以定义除法为乘法的逆运算: 如果 $a\times b=d$, 其中 $a,b\in\mathbb{Z}$, 则定义 $d\div a=b$. 与减法的困境类似, 整数关于除法也是不封闭的. 这里不封闭有两种情况: 一是给定数 $d,a\in\mathbb{Z},a\neq 0$, 不存在 $b\in\mathbb{Z}$ 满足 $a\times b=d$, 这时称 d 不能整除 a ; 二是 $a=0$, 无论 d 是多少, $d\div a$ 都没有意义 (如果 $d=0$, 任何 $b\in\mathbb{Z}$ 都有 $a\times b=d$; 如果 $d\neq 0$, 则不存在 $b\in\mathbb{Z}$ 使 $a\times b=d$).

人们对于这两种情形的处理方式截然不同. 对于后者, 人们规定 0 不可以作除数; 对于前者, 人们则发展出有理数 (rational number)① 的概念. 这两种处理事物的方式, 广泛应用于数学和其他学科的研究中. 适当的推广往往是新兴理论的萌芽, 因为在推广了的情形下, 原先的理论所赖以成立的条件有的就不再满足, 而原先理论中各种结论是否成立的讨论, 则给出新理论发展所需要的动力并指明方向, 试图证明或证否这些结论的过程, 不但发展了新的理论, 更加深了我们对原理论的理解.

有理数应该说对算术是恰当的, 不仅可以圆满解决日常生活中的各种基本需要, 而且四则运算 (加减乘除) 在有理数集 $\mathbb{Q}$② 中都是封闭的. 由于任何两个整数都有公倍数, 事实上还有最小公倍数, 加减和大小判断可以通过通分来实现. 一般来说, 把两个有理数写为有着共同分母的分数, 就可以 "为所欲为" 了!

例 1.1 比较 22/7 与 335/113 的大小.

解 我们可以把它们分别写为

$$\frac{22}{7}=\frac{22\times 113}{7\times 113}=\frac{2486}{791},\frac{335}{113}=\frac{335\times 7}{113\times 7}=\frac{2345}{791},$$

于是知道

$$\frac{22}{7}>\frac{335}{113}.$$

自然数 (整数) 有公倍数这个性质, 在这里起了重要作用. 换句话说, 通过采用更小的单位 (1/791), 我们看到 22/7 是 2486 个单位, 而 335/113 是 2345 个单位, 这和我们量尺寸时使用米尺、千分尺的过程是一样的. 用几何的语言说, 我们能用 1/791 这个单位公度上述两个有理数.

由于有理数这么 "好", 古希腊的毕达哥拉斯 (Pythagoras) 只承认有理数, 传说他因此把其门徒中认识到一定有无理数 (irrational number) 的希帕索斯 (Hippasus)

①rational 来自于字根 ratio (比).

②来源于 quotient (商).

扔进了海里. 事实上, 无理数不仅存在, 而且比有理数"多得多", 但这个"多得多"的具体意思这里暂且按下不表.

最先发现的无理数或许是 $\sqrt{2}$. 我们知道, 与中国《周髀算经》发现"勾三股四弦五"一样, 毕达哥拉斯本人发现了直角三角形边长间的关系, 因此, 勾股定理在西方称为毕达哥拉斯定理. 而单位正方形的对角线长便是这个令毕达哥拉斯挥之不去的 $\sqrt{2}$. 可能他是知道 $\sqrt{2}$ 不是有理数的, 但悔不该恼羞成怒, 错斩贤徒, 自毁长城和一世英名!

例 1.2 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

证明 反证法. 若 $\sqrt{2}$ 是有理数, 设 $\sqrt{2}=p\div q$, 其中 $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, (p,q) 表示它们的最大公约数. 两边同时平方, 得 $p^2=2q^2$, 即 p^2 为偶数, 因此必有 p 为偶数. 设 $p=2m$, $m\in\mathbb{N}$, 代回得 $q^2=2m^2$, 因而 q 为偶数. 所以, 2 是 p,q 的公倍数, 与 $(p,q)=1$ 矛盾. 因此, $\sqrt{2}$ 不是有理数①.

值得注意的是, 通过这个证明, 我们并没有得到 $\sqrt{2}$ 的定义, 因为对于无理数, 我们并没有定义其乘法, 于是 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ 并不能定义出来 $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ 的定义我们还得等到后面定义了实数乘法才能说得更清楚一点. 实数, 可以对应于数轴 (定义了原点和单位长度的直线) 上的点. 其严格定义, 一般用戴德金分割. 我们这里用的是另一种等价的, 更为直观一点的构造式的定义. 我们定义实数为"规范的无尽小数". 无尽小数形如

$$a=\pm a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots.$$

这里有四个部分: 正负号、整数部分 a_0、小数点, 以及小数部分. 我们要强调的是小数部分, 对于每一个固定的小数点后第 i 位, 就有一个 $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, 在我们心目中其实想定义这个数就是

$$a=\pm\left[a_0+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\times 10^{-i}\right].$$

需要注意的是, 这样的无穷求和目前还没有定义. 所谓的规范小数, 必须符合以下两个规则

$$\begin{cases}+0.000\cdots=-0.000\cdots;\\ \pm a_0.a_1a_2\cdots(a_n+1)000\cdots=\pm a_0.a_1a_2\cdots a_n999\cdots, a_n<9.\end{cases}$$

等式左端的无尽小数称为规范的无尽小数, 右端的不规范. 对于规范的无尽小数 a, 我们改变其符号得到的数称为它的相反数, 记为 $-a$, 而如果把它的符号总是改为"+", 则称为它的绝对值, 记为 $|a|$.

①这个证明最早见于欧几里得《几何原本》.

此外, 符号为 "+" 的称为非负数, 如果非 0 则称为正数, 我们以后省略 "+". 符号为 "−" 的称为负数.

对于从某一位以后均为 0 的无尽小数, 我们省略后面的这些 0, 并称之为有尽小数 (是一种特殊的无尽小数). 对于小数点后均为 0 的无尽小数, 我们把它等同为整数, 省略小数点及其后的 0.

对于整数, 我们按照前面的方式定义加减法和乘法. 对于有尽小数, 我们可以仿照整数, 在移位后进行加减法和乘法, 并重新在合适的位置放上小数点. 可以证明, 这样定义的有尽小数运算满足前述整数运算的各种性质.

1.2 大小比较与确界原理

对于实数的性质, 我们要着重讨论的是比较大小. 定义正数比 0 和负数大, 0 比负数大. 两个正数相比, 称

$$a = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots > b = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$$

若 $a_0 > b_0$, 或对于某个 $n: a_0 = b_0, \cdots, a_n = b_n, a_{n+1} > b_{n+1}$.

强调一下, 这里的 n 是一个有限的数, 即大小不同必定是在有限位就能检查到的. 我们看到, 前面的规范小数定义十分重要, 否则就会出现 $1 > 0.999\cdots$ 这样的问题.

对于负数, 我们称 $a > b$ 若 $-b > -a$ (用正数大小比较可以判断).

通过这样定义的大于关系, 可以证明, 在实数集上定义了一个全序, 即任何两个数 a 和 b, 必有 $a > b, a = b, b > a$ 三者有且只有一个成立 (三歧性). 而且, 大于关系有传递性 ($a > b, b > c$, 则 $a > c$).

顺便地, 我们定义小于关系为: $a < b$, 若有 $b > a$.

现在我们可以陈述实数的阿基米德性质: $\forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N}$, 满足 $n > a$. 事实上, 我们只要取 $n = a_0 + 1$ 即可. 在定义了分数之后, 取 $a = \dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可给出阿基米德性质的另一个表述: $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$, 满足 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

现在, 对于一个实数组成的集合 $E \subset \mathbb{R}$, 我们定义 α 是它的一个上界, 若 $\forall a \in E, a \leqslant \alpha$. 同样, 我们可以定义它的一个下界 β, 若 $\forall a \in E, a \geqslant \beta$. 如果集合既有下界又有上界, 我们就称它是有界集.

如果集合有上界, 那么上界一定是不唯一的, 因为若 m 是 E 的上界, 则 $m+1$ 一定也是. 因此, 我们要定义 "最小" 的上界, 称为上确界.