W JFJJTFF

微积分解题方法 续

丁家泰 编

北京师范大学出版社

微积分解题方法(续)

丁家泰 编

北京师范大学出版社

微积分解题方法（续）

丁家泰

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

五 二 三 印 刷 厂 印 刷

开本：787×1092 1/32 印张：17.75 字数：378 千

1985 年 12 月第 1 版 1985 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—36,500

统一书号：13243·96 定价：2.90 元

前　言

本书是《微积分解题方法》的续集，内容包括级数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分及曲面积分、微分方程。

编写本书的目的是为了帮助大学理工科学生（包括电视大学、职工大学的学生）、中学教师、自学青年学习和教学微积分时，在提高解题能力、熟练解题技巧、牢固掌握微积分知识的基础上，学会和掌握比较系统和完整的解题方法。为了使读者阅读方便，我们力图由浅入深，将有关的概念、定律和公式与所讲述的解题方法有机地结合在一起。同时选用了一些国内外有关资料中的较有代表性的典型例题作为讲述解题方法之素材，使尽量做到具有一定的典型性和兼顾专业不同的广泛性。总之，编者主观上想使本书既可成为读者学习微积分时掌握解题方法的一本工具书，又可作为复习参考资料和自学青年的读物。另外，《微积分解题方法》出版后，收到不少报考研究生的同志的来信，它促使我尽早地完成续集的编写。而且，在自己水平有限的情况下，尽量选入了能满足这些读者要求的内容。故此书亦可供报考工科院校研究生的同志参考。

赵素兰同志参加了部分章节的编写，张存淮同志看了初稿和清样，提出了不少宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，错误与不足之处一定不少，恳望读者批评指正。

丁家泰

1984．2．

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 级 数

I 常数项级数

一、无穷数项级数

已给数列 u_1，u_2，u_3，…，u_n，…则式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

或简写为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

叫做无穷级数，或简称级数。我们把（1）叫做数项级数，是因为（1）中每一项都是一个数。

级数是一种重要的数学工具，在表示函数、计算数值、求解微分方程等方面都可以看到它的应用。下面，我们用两个例子来说明它的引入和应用是很自然的。

例 1 由于 $\frac{1}{3}=0.3333\cdots\cdots$

所以，我们自然地把 $\frac{1}{3}$ 用下式表示

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

上式右端是把无穷数列

$$\frac{3}{10},\ \frac{3}{10^2},\ \frac{3}{10^3},\ \cdots,\ \frac{3}{10^n},\ \cdots$$

的各项依次用"+"号联结起来而得的式子。

例 2 由于当边数 $n\to\infty$时，圆内接正 n 边形的面积 S_n 趋于圆面积 S。所以，我们自然地把圆面积 S 用如下式子来表示：

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{2}$$

其中 a_1 是圆内接正六边形面积，a_1+a_2 是圆内接正十二边形面积，$a_1+a_2+a_3$ 是圆内接正二十四边形面积，……，一般地，$a_1+a_2+\cdots+a_n$ 是圆内接正 3×2^n 边形面积。即，圆内接正 3×2^n 边形面积 S_n 为

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

上述等式（2）右端是把无穷数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

的各项依次用"+"号联结起来而得的式子。

二、求级数通项的方法

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项或通项。换句话说，u_n 的下标 n 指出了它是级数（1）中的第 n 项。

求级数通项的步骤是：根据级数前 n 项的排列规律，观察特点、找出共性，抓住本质、归纳总结，逐次寻找、写出通项。下面介绍一些常用的求级数通项的方法：

1．公式法

如果已知级数各项成等差或等比数列，用数列项数 n，首项 a_1 和公差 d（或公比 q）代入通项公式，可求出数列的通项。

例 1 写出 $-11-19-27-35-\cdots$的通项。

解 此级数各项是一等差数列，$a_1=-11$，公差 $d=-8$，根据等差数列的通项公式得

$$a_n=a_1+(n-1)d=-11+(n-1)\cdot(-8)=-8n-3.$$

2. 观察法

通过观察级数的某些项，找出其变化规律，总结出级数的通项公式。这种方法称为观察法。

例 写出已给级数的一般项：

① $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$

② $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$

解 ① 把第一项和第二项改写为 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{0}{3}$，观察此级数的前 n 项，发现各项的分子组成的数列是 -1，0，1，2，3，…，一般项为 $n-2$；各项的分母组成的数列是2，3，4，5，6，…，一般项为 $n+1$。故级数的一般项为

$$u_n=\frac{n-2}{n+1}.$$

② 观察级数的前 n 项，发现级数各项的分子序列为 $\sqrt{x}$，x，$x\sqrt{x}$，x^2，…，把它们改写为 $\sqrt{x}$，$(\sqrt{x})^2$，$(\sqrt{x})^3$，$(\sqrt{x})^4$，…，一般项为 $(\sqrt{x})^n$；各项的分母数列为2，$2\cdot4$，$2\cdot4\cdot6$，$2\cdot4\cdot6\cdot8$，…，把它们改写为 $2\cdot1$，$2^2\cdot1\cdot2$，$2^3\cdot1\cdot2\cdot3$，$2^4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4$，…，一般项为 $2^n\cdot n!$。故，级数的一般项为

$$u_n=\frac{(\sqrt{x})^n}{2^n\cdot n!}=\frac{x^{n/2}}{2^n\cdot n!}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

3. 待定系数法

由给定的条件确定通项公式中的待定系数，这种方法称为待定系数法。

例 已知级数

$$1+3+6+\cdots$$

的前 n 项之和 $S_n=An^3+Bn^2+Cn+D$，求级数通项 u_n。

解 $\because\quad u_n=S_n-S_{n-1}$

$$=A[n^3-(n-1)^3]+B[n^2-(n-1)^2]+C[n-(n-1)]$$

$$=3An^2+(2B-3A)n+A-B+C$$

令 $P=3A$，$Q=2B-3A$，$R=A-B+C$

有 $u_n=Pn^2+Qn+R$

根据已知条件可得

$$\begin{cases}1=P+Q+R & (n=1)\\ 3=4P+2Q+R & (n=2)\\ 6=9P+3Q+R & (n=3)\end{cases}$$

解得： $P=\frac{1}{2}$， $Q=\frac{1}{2}$， $R=0$

故通项 $u_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$.

4. 递推法

若已知级数中的前 n 项和递推公式，则可采取递推的方法而得到其通项。

例 已知级数中 $u_1=\alpha+\beta$，$u_2=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$，并给定递推关系为 $u_n=(\alpha+\beta)u_{n-1}-\alpha\beta u_{n-2}$，求其通项 u_n。

解 根据递推公式可知

$$u_3=(\alpha+\beta)u_2-\alpha\beta u_1$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha-\beta}-\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}.$$

假定对于某个下标号码n及所有小于n的号码来说，公式$u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$成立。现在证明它对于$n+1$也成立。

事实上，

$$u_{n+1}=(\alpha+\beta)u_n-\alpha\beta u_{n-1}$$

$$=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}.$$

由于公式对于$n=1$，2，3正确。所以，根据完全归纳法原理，公式对于任意自然数n也正确。

5. 逐差法

若级数中各项的构成规律较难发现，但能从所给定的前面若干项中逐次求出它们的差（后项减前项所得到的差），其各项排列成一个等差或等比数列，则由此倒推回去，就能找到原级数的通项公式。

例 已给级数

$$6+9+14+23+40+\cdots$$

求其通项公式。

解 设此级数各项所组成的数列为$\{a_n\}$，其差数列为

$\{b_n\}$（即 $\{a_n\}$ 的第一差数列），又设 $\{b_n\}$ 的差数列为 $\{c_n\}$（即$\{a_n\}$的第二差数列），则有　$\{a_n\}$

$$6, 9, 14, 23, 40, \cdots$$

$$\{b_n\} \ (b_n = a_{n+1} - a_n)$$

$$3, 5, 9, 17, \cdots$$

$$\{c_n\} \ (c_n = b_{n+1} - b_n)$$

$$2, 4, 8, \cdots$$

∴ $\{c_n\}$是一等比数列，且 $c_n = 2^n$

于是：
$$\begin{array}{rl} & b_n - b_{n-1} = c_{n-1} = 2^{n-1} \\ & b_{n-1} - b_{n-2} = c_{n-2} = 2^{n-2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & b_3 - b_2 = c_2 = 2^2 \\ +) & b_2 - b_1 = c_1 = 2^1 \\ \hline & b_n - b_1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \end{array}$$

∴ $b_n = 2^n + 1$

从而有：
$$\begin{array}{rl} & a_n - a_{n-1} = b_{n-1} = 2^{n-1} + 1 \\ & a_{n-1} - a_{n-2} = b_{n-2} = 2^{n-2} + 1 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_3 - a_2 = b_2 = 2^2 + 1 \\ +) & a_2 - a_1 = b_1 = 2 + 1 \\ \hline & a_n - a_1 = (2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) + n - 1 \end{array}$$

故　$a_n = 2^n + n + 3$

[**注 1**]　仅就级数的前若干项，不能唯一确定这个级数的通项。如，要写出级数　$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\cdots$的通项，则可通过观察而知其特点为①若把第一项 u_1 写成$\frac{1}{1}$，则各

项都是分式；②第一项分母是1，后几项分母都是3的若干次幂，而u_1可写成3^0；③各项分母的幂指数都比其项数少1。可知其通项为$u_n=\frac{1}{3^{n-1}}$。

但若级数延续为$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+1+1+1+\cdots$，则此级数的后面各项已经丧失了前五项所拟定的规律性。因此，从级数前几项求出通项公式时，必须要求通项公式所反映的规律性不但包含前几项的规律性，还要使以后各项均按相同规律自然而简单地延续而成。

[注2] 级数中第n项u_n叫做级数的通项，第n项（通项）与项数n的函数关系，如果能用解析式表达出来，则这个解析式就是通项公式。但必须注意，任何一个级数，它的通项总是存在的，但并不保证其通项公式一定存在。同时，两个变量之间的函数关系可以用多种形式反映出来，而用解析式反映的仅仅只是其中的一种形式。所以，即便通项公式存在，其形式也不一定是唯一的。

[注3] 级数的通项不一定正好是第n项，即通项中的n和u_n的下标n不一定是同一个量。如已给级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$和$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5}{2n-2}$，其通项分别可从下面列式看出

$$\because\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

$$\therefore\quad u_1=1,\quad u_2=\frac{1}{3},\ u_3=\frac{1}{3^2},\ \cdots,\ u_n=\frac{1}{3^{n-1}}$$，通项

$\frac{1}{3^n}$是第 $n+1$ 项。

$$\because \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{2n-2}=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{6}+\frac{5}{8}+\cdots$$

$$\therefore \quad u_1=\frac{5}{2},\ u_2=\frac{5}{4},\ u_3=\frac{5}{6},\ \cdots,$$

$$u_n=\frac{5}{2(n+1)-2}=\frac{5}{2n}$$，通项$\frac{5}{2n-2}$是第 $n-1$项。

这里，u_n 的下标 n，也可不由 1 开始，而由 0 或任何大于 1 的自然数开始，有时更为方便。

三、求级数前 n 项和的方法

作级数的前 n 项的和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$$

可得到另一个数列

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，则此极限称级数的和，记作 S。即 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，且

$$u_n=S_n-S_{n-1}.$$

求级数前 n 项和的常用方法有

1．公式法

应用等差、等比数列求和公式及一些常见数列的求和公式，可直接求得级数的前 n 项之和。如

1° 等差数列前 n 项和的公式

$$S_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}$$

2° 等比数列前 n 项和的公式

$$S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

3° $$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

4° $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5° $$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}[n(n+1)]^2$$

6° $$9+99+999+\cdots+\underbrace{9\cdots9}_{n个9}=\frac{1}{9}[10^{n+1}-9n-10]$$

$(10-1)+(10^2-1)$

事实上，因为$9=10-1$，$99=100-1$，$999=1000-1$，……

所以，$u_n=10^n-1$

故 $$9+99+999+\cdots+\underbrace{9\cdots9}_{n个9}=10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n$$

$$=\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n=\frac{10}{9}(10^n-1)-n$$

$$=\frac{1}{9}(10^{n+1}-10-9n).$$

例 求级数 $5+55+555+\cdots+\underbrace{5\cdots5}_{n个5}+\cdots$ 的前 n 项之和。

解 此级数各项所组成的数列类似于9，99，999，…故可设法变形，使其能利用已知公式处理。

$\because$ $5=5\times1$，$55=5\times11$，$555=5\times111$，…

$$5=5\times\frac{9}{9},\quad 55=5\times\frac{99}{9},\quad 555=5\times\frac{999}{9},\ \cdots$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com