现代数学基础

61

拟线性椭圆型方程的现代变分方法

■ 沈尧天　王友军　李周欣

高等教育出版社

现代数学基础

61

拟线性椭圆型方程的现代变分方法

■ 沈尧天　王友军　李周欣

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

拟线性椭圆型方程的现代变分方法 / 沈尧天，王友军，李周欣著. -- 北京：高等教育出版社，2017. 6

（现代数学基础）

ISBN 978-7-04-047674-3

Ⅰ. ①拟… Ⅱ. ①沈… ②王… ③李… Ⅲ. ①线性椭圆型方程 - 变分方程 - 研究 Ⅳ. ① O175.25 ② O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 112079 号

策划编辑 王丽萍　责任编辑 王丽萍　封面设计 张 楠　版式设计 马敬茹
责任校对 吕红颖　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京天时彩色印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm× 1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	16.25		
字　数	290 千字	版　次	2017年 6月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　次	2017年 6月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	79.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 47674-00

前　　言

本书讨论的是具有变分结构的一般二阶拟线性椭圆型方程

$$-\mathrm{div}\, F_r(x,u,\nabla u) + F_u(x,u,\nabla u) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, $F(x,u,r) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$,

$$F_r(x,u,r) = (F_{r_1}(x,u,r), F_{r_2}(x,u,r), \cdots, F_{r_N}(x,u,r)), \quad r = (r_1, r_2, \cdots, r_N),$$

$$F_{r_i}(x,u,r) = \frac{\partial F(x,u,r)}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, N,$$

$$F_u(x,u,r) = \frac{\partial F(x,u,r)}{\partial u}.$$

方程 (1) 是泛函

$$I(u) = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)dx \tag{2}$$

的 Euler–Lagrange 方程 (以下简称 E–L 方程).

变分方法最早是讨论单重积分的极小 (极大) 值, 也称为变分问题. 为了求出最速下降路线, 下降所需时间 T 是与下降曲线和下降速度有关的一个定积分, 这个定积分可以看成一个泛函, 最速下降路线就是 T 最小的路线. 通过求解泛函的 E–L 方程 (非线性常微分方程) 即可解决这一问题.

但是多重积分的变分方法刚好相反, 由于此时泛函的 E–L 方程是一个非线性偏微分方程, 而偏微分方程是很难直接求解的, 即使方程是线性的. 这也就使得人们反其道而行之, 把一个偏微分方程解的存在性归结为泛函

的最大 (最小) 值的存在性. 19 世纪中叶, Riemann 为了证明存在一个把平面上任意的一个单连通区域映到单位圆内的保角变换 (共形映射), 即求 Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解, 把它化为一个变分问题, 即求 Dirichlet 积分

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

在集合 $\mathcal{M} = \{u \in C^1(\overline{\Omega}); u \mid_{\partial\Omega} = \varphi(x)\}$ 上的极小值问题. 利用当时普遍使用的 Dirichlet 原理: 一个非负积分在一个可容许的集合上总是存在极小解, 解决了共形映射的存在性. 随着数学越来越严密, Weierstrass 在 20 年后对 Dirichlet 原理给出了反例: 泛函

$$I(u) = \int_{-1}^1 x^2 u'(x)^2 dx$$

在 $\mathcal{M} = \{u \in C^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ 上的极小值为 0. 事实上, 令 $u_\varepsilon = \arctan \frac{x}{\varepsilon}(\arctan \frac{1}{\varepsilon})^{-1}$, 对于任意的 $\varepsilon \to 0$, 则 $I(u_\varepsilon) \to 0$, 但是使得 $I(u) = 0$ 的 u 并不在 $\mathcal{M}$ 中.

直到 1900 年, Hilbert 才对 Dirichlet 原理中非负积分是 Dirichlet 积分时给出了证明. 他的这个工作是 20 世纪很多工作的起点, 它促进了一系列重要的变分问题和椭圆型边值问题的解决, 诸如广义导数、$H^1(\Omega)$ 、$H^1(\Omega)$ 中强弱列紧的判断准则以及泛函分析中很多分析概念和新方法的产生和研究. 在 1900 年国际数学家大会上的报告中 Hilbert 给出了著名的 23 个问题 (实际上在会议报告的是 20 个问题, 发表文章后成为 23 个问题, 其中有 3 个问题涉及变分问题, 即问题 19, 20, 23), 从而确立了 20 世纪研究拟线性椭圆型方程的基本方向.

问题 19 是当 $N = 2$ 时若在 (2) 中 $F(x, u, r)$ 关于 r 是凸的, 即

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r_1 \partial r_2}\right)^2 > 0, \quad r = (r_1, r_2),$$

而 $F(x, u, r)$ 是变元 x, u, r 的解析函数, 那么求泛函 (2) 的极小问题称为正则变分问题. 在几何学、力学和数学物理中起作用的主要就是正则变分问题. 问题 19 问正则变分问题所有的解是否是解析的? 这一问题可以有一个更完美的表述: 拟线性椭圆型方程的解在区域内的微分性质取决于构成这些方程的函数的微分性质, 与边值光滑性无关, 也与从中求解的函数空间无关

(如拟线性方程 $\partial_i a_i(x,u,\nabla u)+a(x,u,\nabla u)=0$ 的解的正则性取决于 $a_i(x,u,r)$ 与 $a(x,u,r)$ 关于 x,u,r 的微分性质). 在 Dirichlet 原理中, 讨论的是 Dirichlet 边值问题, 而对于一般边值问题, 问题 20 确定一个满足边界条件的函数属中使形如 (2) 的下有界的凸泛函, 即所谓正则泛函达到最小值这样一个变分问题如果在充分广泛的函数类中求解的话一定可解. 这个问题实际上是把 Dirichlet 原理推广到一般边值问题. 为了适用于更一般的情况, 问题 20 又可以表示为: 若拟线性椭圆型方程边值问题的所有可能解的某一种弱范数 (如最大值) 先验有界, 则该问题可解.

显然, 问题 19 涉及解的光滑性, 问题 20 涉及解的存在性. 而两者又有矛盾. 问题 20 为了解的存在性可以减弱解的光滑性, 比如二阶连续可微处处满足方程减弱到一阶 Sobolev 导数属于某 L^p 空间, 在弱的意义下满足方程 (即任给试验函数满足积分等式). 问题 20 主要是用经典变分方法去考虑, 而解在一个充分广泛的函数类中, 现在已知道是一阶弱导数 p 次方可积的函数, 这就是大家熟知的 Sobolev 空间 $W^{1,p}$, 这样的解与解析相差很远. 求解拟线性 E–L 方程的解除了经典变分方法, 还有拓扑方法就是 Leray–Schauder 不动点定理和先验估计方法 (此方法还用于更一般的拟线性椭圆型方程). 此方法把证明解的存在性归结为一个 $C^{2,\alpha}$ 中的先验估计问题, 利用二阶线性椭圆型方程解的 Schauder 估计把拟线性椭圆型方程的 $C^{2,\alpha}$ 估计归结为拟线性椭圆型方程的 $C^{1,\alpha}$ 估计. 此方法首先在 $N=2$ 时取得成功, 利用拟共形映射等方法得到了 $C^{1,\alpha}$ 估计. 但此法根本无法推广到 $N\geqslant 3$. 当 $N\geqslant 3$ 时, 1957 年, De Giorgi 对最简单可测函数二阶线性椭圆型方程的弱解, 即满足

$$\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u\partial_j\varphi dx=0,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

(下标重复出现表示求和), 给出了 C^α 估计, 利用改进的 De Giorgi 迭代, Ladyzhenskaya 和 Uraltseva 对一般的拟线性椭圆型方程解得到 $C^{1,\alpha}$ 估计. 这样满足一致椭圆条件的一般拟线性方程至少一个解的存在性得到了解决. 同时他们还解决了问题 19 和 20 之间的矛盾. 他们证明了二阶拟线性椭圆型 E–L 方程在 Sobolev 空间 $W^{1,p}$ 中的弱解一定是 $C^{1,\alpha}$ 的. 而问题 19 在 20 世纪 50 年代最好结果是对 E–L 方程具有 $C^{1,\alpha}$ 的弱解一定是解析的. 这样二阶拟线性椭圆型 E–L 方程只要 $F(x,u,r)$ 关于 x,u,r 解析, 则它在 $W^{1,p}$ 中的弱解一定是解析的, 进而问题 19 和 20 的不协调地方被消除了.

对于问题 19, 1904 年, Bernstein 证明了解析非线性椭圆方程其三阶连续可微解必定解析. 该结果又被其本人和 Petrovskiĭ 推广到多自变量和椭圆组情形. 后来对拟线性椭圆型方程又减弱到二阶连续可微的解. 但是对拟

线性椭圆型方程组的正则性来讲, 以调和映射为例, 当 $N=2$ 时, 调和映射是正则的, 但是当 $N\geqslant 3$ 时, 林芳华用十分简明的方法证明调和映射问题

$$\begin{cases}-\Delta u=u|\nabla u|^2, & |u|=1,\quad u=(u_1,u_2,u_3),\\ u=x, & x\in\partial B_1(0)\end{cases}$$

的极小解是 $x/|x|$, 它已不是连续函数了. 而后 Riviere [96] 给出了一个处处不连续的弱调和映射, 想不到正则性一下就差成这样了. 以前大家认为可能有部分正则性. 这时大家又会对 Bernstein 的结果产生了一个疑问, 但对方程

$$\begin{cases}-\Delta u=|\nabla u|^2, & x\in B_R(0)\subset\mathbb{R}^2,\\ u=0, & x\in\partial B_R(0),\end{cases}$$

易知它有两个解, $u(x)=\log\log R-\log\log|x|\in H^1(B_R(0)), R<1$ 和 $u(x)=0$. 由于前一个解肯定不是三阶连续可微的. 而 $u(x)=0$ 当然是解析的. 所以 Bernstein 的结果还是对的. 但 Hilbert 第 19 问题的正确答案应该是: 不是所有的解都解析, 而只有满足一定正则性如 $C^{1,\alpha}$ 或 $C^{2,\alpha}$ 等的解才是解析的.

我们现在回到变分方法求解 E–L 方程这个问题, 即问题 20. Birkhoff 最早用极小极大原理研究了闭测地线, 而后 Ljusternik–Schnirelman 用极大极小方法证明了亏格为 0 的闭曲面上存在三条测地线. 这就让人们不仅去求泛函极小值, 而且去寻找它所有的临界点. 他们又把上述工作推广到无限维空间, 现在不少人把用拓扑数据来研究临界点个数的理论都称为 Ljusternik–Schnirelman 理论 (以下简称 L–S 理论).

与偶泛函对应的非线性常微分方程

$$\begin{cases}-u''=2u^3, & t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

存在无穷多个解 u_n 且 $\max_{t\in[0,1]}|u_n(t)|\to\infty$. 这是因为 u_n 必满足

$$t=\int_0^u(c^4-u^4)^{-\frac{1}{2}}du$$

而 u_n 是周期函数在 $(-c,c)$ 之间变化, $T=2c^{-1}\int_{-1}^1(1-t^4)^{-1/2}dt=\frac{2}{c}\beta$, 必有周期 $T=n^{-1}$, 从而 $c=2n\beta$ [113]. 那么相应高维空间上的偶泛函对应的 E–L 方程

$$\begin{cases}-\Delta u=u^3, & x\in\Omega\subset\mathbb{R}^N,\quad N=2,3,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

是否有无穷多个解? 进而对一般的偶泛函是否有无穷多个解?

1973 年, Ambrosetti–Rabinowitz 建立了光滑泛函临界点理论中著名的山路定理, 其原型是 Morse 研究极小曲面多解时发现的墙定理 (Wall Theorem), 并利用它证明了半线性二阶椭圆型方程齐次 Dirichlet 边界条件且非线性项 $f(x,u)$ 关于 u 增长低于 $(N+2)/(N-2)$ 时非平凡解的存在性. 而相应的泛函是偶的则存在无穷多个非平凡解. 作者也利用光滑泛函临界点理论证明了可控增长下一般二阶拟线性 E–L 方程 (1) 的齐次 Dirichlet 问题有同样的结果, 并推广到一般高阶拟线性方程上去. 光滑泛函临界点理论近年有了很大发展, 如环绕理论 [108]、变号临界点理论 [111] 等并已有专著, 由于篇幅所致, 我们无法一一写入本书. 研究无限维空间中泛函的所有临界点称为大范围变分法或现代变分法. 它包括光滑泛函临界点理论和 Morse 理论等, 以及最近 20 年发展起来的非光滑泛函临界点理论.

在极小极大方法中最主要的困难是验证泛函满足 (PS) 条件, 这就涉及紧性. 但是对全空间和临界指数的情况, 紧性是缺失的. 1984 年, 针对上述两种情况, Lions 分别提出第一和第二集中紧原理. 由于几何中 Yamabe 问题的需要, 基于 Aubin 等的工作, 1983 年 Brezis–Nirenberg 利用不带 (PS) 条件的山路定理研究了有界区域半线性方程含临界指数正解的存在性. 90 年代很多作者讨论了与带临界指数项类似的带 Hardy 位势项 (也称临界位势) 的各种研究.

拟线性椭圆型方程分为可控增长和自然增长两种. 自然增长比可控增长更加困难. 最近大家都把自然增长情况称为关于梯度临界增长. 从 20 世纪 80 年代中期开始不少人对这种拟线性椭圆型方程进行研究, 对这类方程中的 E–L 方程来讲, 它对应的泛函已是非光滑泛函了, 而非光滑泛函当时是用经典方法 (极小或限制极小) 进行讨论. 1983 年, Struwe [107] 研究了自然增长拟线性椭圆型方程组特征问题, 并证明限制极小解当 $a_{ij}(x,u)$ 满足存在 $\rho>0$ 使 $|\,\partial_u a_{ij}(x,u)\,|\leqslant\rho$ 时极小解是有界的. 因而相应泛函可微, 相应 E–L 方程组满足. 此时证明极小解 (限制极小解) 有界是关键, 只有它有界, 相应泛函才可微. 在我们的工作中给出了非光滑泛函的限制极小在某单边条件下是有界的证明, 而且当单边条件反向时该方程不存在非平凡解. 之后沈尧天和严树森 [60, 65] 讨论了 $\mathbb{R}^N$ 中带临界指数项自然增长的拟线性椭圆型方程组的特征问题解的存在性和有界性.

1993 年, Corvellec, Degiovanni 和 Marzocchi [78, 82] 给出了非光滑泛函临界点理论, 1994 年, Canino 等 [79] 开始用来讨论自然增长的拟线性椭圆型方程多重解的存在性. 在讨论泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ij}(x,u)\partial_i u\partial_j u dx-\int_\Omega G(x,u)dx,\quad G(x,u)=\int_0^u g(x,t)dt$$

时主要条件是

$$0 \leqslant s\partial_s a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \leqslant \nu a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j$$

以及存在 $s_0, \sigma > 2$ 使得

$$\sigma G(x,s) \leqslant sg(x,s), \quad |s| \geqslant s_0,$$

其中 $\nu < \sigma - 2$. 若 $G(x,u)$ 增长阶比较低, 即 $\sigma \to 2$ 时, 满足上述条件的 $a_{ij}(x,u)$ 就会越来越少, 我们最近把上述条件改进到

$$-2\mu a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \leqslant s\partial_s a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \leqslant \nu a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j, \tag{3}$$

其中 $\mu = 1 - \sigma/2^*$, 有趣的是当上面左边不等式反向时, 与泛函对应的 E–L 方程不存在平凡解. 最近作者发现一类 Schrödinger 方程刚好出现

$$-2\mu a(x,u) \leqslant u\partial_u a(x,u) \leqslant 0.$$

这说明条件 (3) 是有实际背景的.

关于一般的拟线性 E–L 方程带自然增长的情况, 由于篇幅所限, 只列结果, 读者有兴趣可参阅文献 [95]. 这样, 对于一般拟线性 E–L 方程无论是在可控增长还是在自然增长的情况下多重解都已讨论.

但是关于无界区域 $\mathbb{R}^N$ 上非光滑泛函临界点的讨论不多, 一般都要非光滑泛函中位势 $V(x) > 0$ 使相应范数 $\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx\right)^{1/2}$ 在嵌入 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 时有某种紧性.

Arcoya 和 Boccardo 在 1996 年用不同的方法建立了另外一种非光滑泛函的临界点理论, 并用来讨论一般形式的泛函 (2) 的临界点的存在性. 由于篇幅所限, 这里我们没有介绍.

非光滑泛函

$$I(u) = \int_\Omega \left[\frac{A(x,u)}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right]dx, \tag{4}$$

其中 $0 < a < A(x,u) < b$. 我们把 (4) 称为正规的非光滑泛函. 但是在等离子体物理超流体膜的拟线性 Schrödinger 方程中 $A(x,u) = 1 + 2u^2$, 此时 $1 \leqslant A(x,u)$ 但无上界. 在实际中出现饱和效应的反应模型, 即在高的 $u(x)$ 的水平, 传播会十分小, 此时会出现 $A(x,u) = (1+|u|)^{-2\alpha}$, $\alpha > 0$, 这时 $0 < A(x,u) \leqslant 1$ 但无正下界, 即 $a = 0$. 此时就叫做非限制或退化限制非光滑泛函. 另一种情况是 $A(x,u) = |u|^\alpha(1+|u|)^{-2\beta}$, 即 $A(x,u) \geqslant 0$, 此时称为退化非光滑泛函.

非限制非光滑泛函极小解在 20 世纪 90 年代后有不少研究. 对于退化非光滑泛函极小解研究, 在沈 – 郭 [61] 中讨论了非光滑泛函极小解. 无上界和非限制泛函的山路解一直到 21 世纪初才开始研究. 对于退化限制非光滑泛函山路解的讨论不多, 只见 Arcoya, Boccardo, Orsina 文献 [76]. 他们是在比 H^1 更大的空间 $W^{1,q}$, $q < 2$ 中用非光滑泛函临界点理论来研究的. 退化非光滑泛函的山路解未见文献讨论.

本书第一章与沈 – 严 [64] 相比增加了很多内容, 如利用求泛函极小解的方法来证明非限制泛函极小解的存在性. 这是 21 世纪初的工作. 在限制极小问题上增加了带一般积分限制的极小解的讨论, 另外增加了对 p-Laplace 方程特征值与特征函数的内容.

在 Pohozaev 恒等式方面比 [64] 中的结果更好, 用 W^{2,p_1} 代替 $|Du|^{p/2} \in H^1$, 还改进了结构性条件. 为了读者方便, 我们一般不讨论方程组. 在 [64] 中 Hardy 不等式系数在 $p > 2$ 时还不是最佳, 这里已改进为最佳.

第二章, 山路定理的证明我们与 [64] 中不同, 采用形变引理来证明. 其实最简单的证明是用 Ekland 变分原理. 本文为了使读者了解非光滑泛函的形变引理, 先做了准备. 同时, 我们增加了 p-Laplace 方程的多解内容的讨论. 为了简化篇幅介绍一些新内容, 对原书不少内容我们都不再写入本书.

第三章介绍各种失去紧性的变分问题, 这方面内容十分丰富, 这里只介绍非平凡解, 特别是正解的存在性, 对半线性问题和拟线性问题给出不同的方法, 借此显示解决拟线性问题的困难之处. 本章大部分内容取材于 [64] 的第三章, 当时由严树森执笔.

第四章内容基本是新的. 虽然第一节有些内容原书 [64] 已有, 但是我们都已给出改进. 如在极小解有界的证明中已不再需要单边条件. 关于特征值估计更加简单, 结果也变得更好. 另外, 又增加了 20 世纪 90 年代中才出现的非光滑泛函临界点理论以及关于自然增长拟线性椭圆型方程多重解的讨论. 这部分内容也是首次写入本书.

第五章我们讨论非正规的非光滑泛函的临界点理论. 即, 在泛函 (4) 中令 $A(x,u) = (1 + |u|)^{-2\alpha}$ 或者 $A(x,u) = 1 + 2u^2$. 后一种情况涉及拟线性 Schrödinger 方程. 关于 Schrödinger 方程从 20 世纪至今已有很多重要的研究工作. 但是拟线性 Schrödinger 方程的研究据我们所知是 21 世纪初才出现的. 刘嘉荃和王志强的工作引进了一个未知的变换, 把拟线性 Schrödinger 方程化为半线性 Schrödinger 方程, 在相应的 Orlicz 空间中讨论解的存在性. 之后, Jeanjean 利用同样的变换在普通的 Sobolev 空间中讨论, 使得证明变得更加简单. 一般的文章都对特殊的权如 $1 + 2u^2$ 做变换, 我们利用讨论退化泛函极小解时引进的已知变换 [61], 把一般的拟线性 Schrödinger 方程化

为半线性方程. 我们引进的变换更加简单并且可以讨论一般的和更加复杂的问题. 因此, 与 [76] 方法不同, 我们也可以用这一变换方法来研究退化泛函的临界点. 这说明用变换方法可以研究各类非正规的非光滑泛函临界点的存在性, 包括无界区域、退化限制以及退化等各种情况.

我们发现, 在近代非线性泛函讨论临界点的存在性时, 除了各种临界点理论和 Morse 理论, 都需要 (PS) 序列有界这一条件, 这样我们又回到了 Hilbert 问题 20. 因 (PS) 序列有界给出了解在 H^1 中的界, 而 H^1 范数就是前面讲的一种弱范数.

由于本书不少内容都是从最近的文献中整理出来, 缺点及错误肯定不少, 而前言中包含了本人的一些意见, 也肯定有不妥之处, 期待读者指正.

本书的编写得到了国家自然科学基金 (编号 11201154, 11371146) 的支持.

沈尧天
广州五山
2016 年 6 月

符号说明

Ω: $\mathbb{R}^N$ 中的区域 (未明确说明的, 均指有界区域);

$\overline{\Omega}$: Ω 的闭包;

$\mathbb{R}_N^+$: 上半空间 $\{x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N : x_N>0\}$;

$C^k(\overline{\Omega})$, $1\leqslant k\leqslant\infty$: $\overline{\Omega}$ 上 k 次连续可微的实值函数全体;

$C_0^k(\Omega)$, $1\leqslant k\leqslant\infty$: Ω 上 k 次可微且有紧支集的实值函数全体;

$L^p(\Omega)$: $1\leqslant p<\infty$, Ω 上绝对值 p 次 (Lebesgue) 可积的实值可测函数全体;

$|\cdot|_p$: $L^p(\Omega)$ 空间中元素的范数;

$W^{k,p}(\Omega)$: 整数次 Sobolev 空间, k 为非负整数, $1\leqslant p<\infty$;

$\|\cdot\|_{k,p}$: Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的范数; 上下文 Sobolev 空间明确的情况下, 也简记为 $\|\cdot\|$;

$H^k(\Omega)$: $H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$;

$W_0^{k,p}(\Omega)$: $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包;

$H_0^k(\Omega)$: $H_0^k(\Omega)=W_0^{k,2}(\Omega)$;

∇: 梯度算子, 即 $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$;

div: 散度算子, 即 $\operatorname{div}(u_1,\ldots,u_N)=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial u_N}{\partial x_N}$;

Δ: Laplace 算子, 即 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$;

$\to$ ($\rightharpoonup$): 所论空间中的强收敛 (弱收敛);

$\operatorname{spt} u$: 函数 u 的支集, 即集合 $\overline{\{x\in\mathbb{R}^N : u(x)\neq 0\}}$;

$B_r(y)$: $\mathbb{R}^N$ 中以 y 为球心、半径为 r 的球;

C, C_i, $i=1,2,\cdots$, 或 c: 正常数, 在给定的上下文中, 同一个字母 C (一般) 表示不同的常数.

目　　录

第一章 拟线性椭圆型方程的经典变分方法与 Pohozaev 恒等式

本章共分三节, 第一节利用各种泛函极小问题的解来证明拟线性椭圆型方程弱解的存在性; 第二节介绍 p-Laplace 算子的特征值问题; 第三节介绍 Pohozaev 恒等式, 并利用它讨论拟线性椭圆型方程非平凡解的不存在性.

1.1 变分学中直接方法与拟线性椭圆型方程的弱解

设 Ω 是欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, $x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, $N\geqslant 2$, Ω 的边界记为 $\partial\Omega$. 记

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad i=1,\cdots,N,\quad \nabla=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_N}\Big).$$

现考虑下述泛函

$$I(u)=\int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))dx, \tag{1.1}$$

其中

$$F(x,u,r):\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R},$$

u 属于某个允许函数属 K.

这里讨论泛函 $I(u)$ 在 K 中的极值 (极小或极大) 或临界值. 使得 $I(u)$ 达到极值或临界值的 u 叫做极值点或临界点.