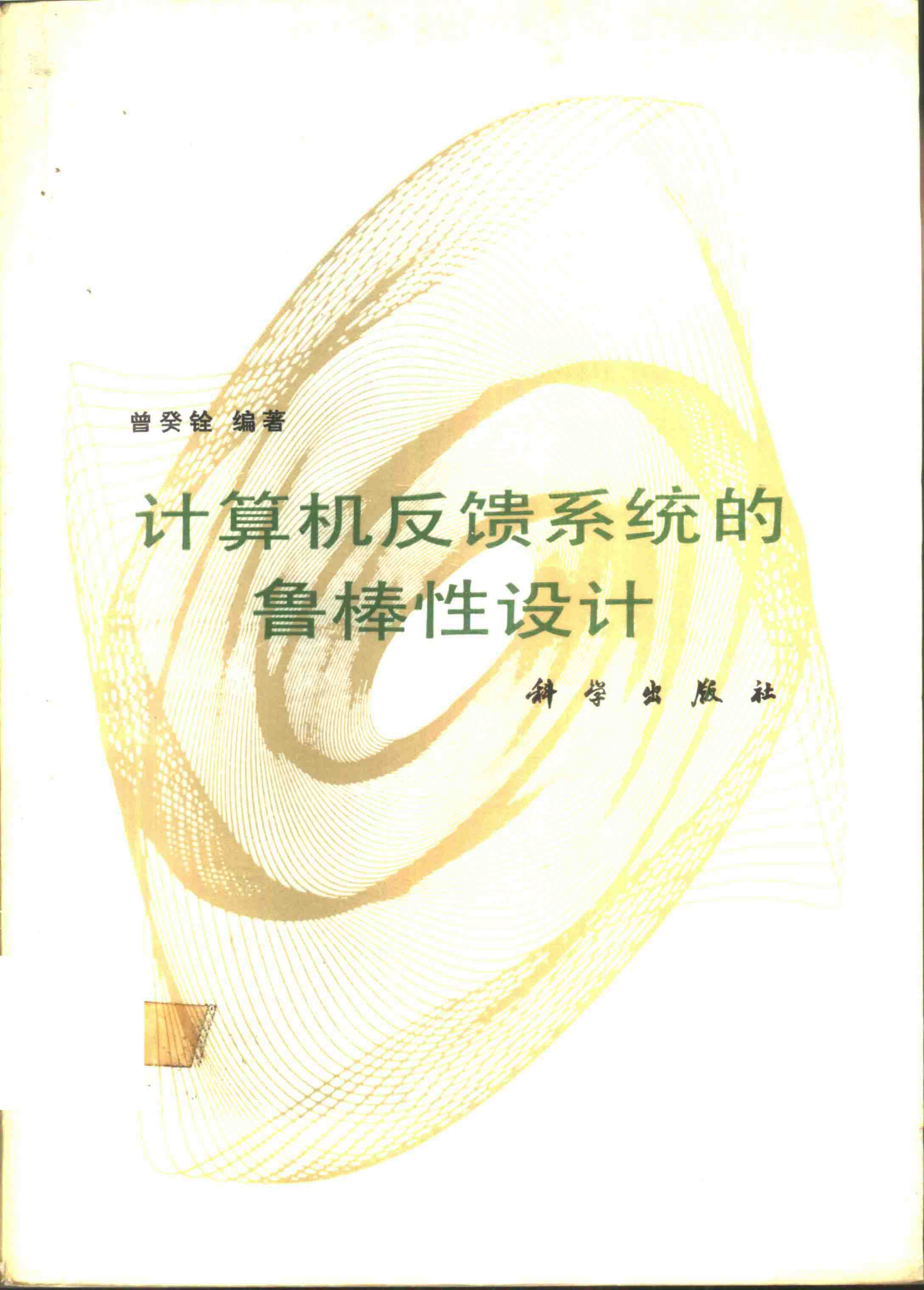




曾癸铨 编著

计算机反馈系统的 鲁棒性设计

科学出版社

计算机反馈系统的 鲁棒性设计

曾癸铨 编著

科学出版社

1992

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书介绍计算机控制系统的鲁棒性理论,以及以此理论为基础的控制系统设计方法。全书共十章。第一章介绍阅读本书所必需的基础知识。第二章介绍模型简化法。第三章介绍在模型扰动下保证闭环系统稳定性和品质下限的理论。第四章至第九章介绍鲁棒性控制器的设计方法。最后一章用一个实例说明近代控制系统实际设计时须考虑的各种因素。

本书可供从事自动化和自动控制工作的科研人员、工程技术人员,以及大学有关专业的教师、研究生和高年级学生阅读。

计算机反馈系统的 鲁棒性设计

曾 癸 铨 编 著

责任编辑 李淑兰 唐正必

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992年 3 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1992年 3 月第一次印刷 印张: 24 1/4

印数: 1—1600 字数: 560 000

ISBN 7-03-002301-3/TP·170

定价: 21.00 元

前 言

在工业控制领域中,各种工业生产过程、生产设备、运输系统,以及其它众多的被控对象,它们的动态特性一般难以用线性常微分方程来描述。这是因为它们的作用机制十分复杂,我们无法用准确的定量关系来描述或测量其中的变量,或者是由于它们的特性和参数会随工作状态及工作环境的变化而发生变化。特别像某些生产过程,由于原材料、燃料,或者负荷、气候条件的不同,其动态特性的差别是很大的。这些事实使控制系统的设计者认识到,他们不可能得到一个精确的被控对象数学模型作为控制系统的设计依据。因为他们主观上认识的模型和真实的被控对象模型不可避免地存在误差及不确定性。

尽管控制理论发展到今天已经十分完善,但是不少现有的工程系统设计方法都隐含一个假定,即要求被控对象的模型是完全已知的。这显然和工业现场的实际情况有矛盾。

过去人们采用闭环控制来克服建模的不确定性及不可测的干扰。经验证明,只有在被控对象模型结构已知,而参数变化范围较小的情况下采用闭环控制才可能得到满意的结果。而当参数变化范围较大时,闭环系统可能失去稳定性。这里给我们指出了一个問題,即模型的不确定性和系统的性能指标是相互影响的,而且是相互矛盾的。在系统设计中,建模不确定性的程度将直接影响到控制器的设计。

控制工程师既然免不了采用不确定性模型,那么他们自然希望有一种设计方法,即按照人们能掌握的最简化的被控对象理想模型,及模型不确定性的某种度量来指导闭环系统的控制器设计,使该控制器接入实际系统后,能保证实际系统的稳定,且其性能指标在容许范围以内。这就是目前国内外学者十分感兴趣的鲁棒控制问题。鲁棒控制就是要试图描述被控对象的模型不确定性,并估计在某些特定界限下达到控制目标所留有的自由度。这个定义尽管还可以进一步改进,但至少它可使系统设计者部分地摆脱经典设计方法中把控制对象模型当成设计的已知条件的传统观念,从而使控制理论和工业现场的应用更加接近。本书的主要内容就是在这个概念下展开的。

控制系统的鲁棒性作为一个较完整的概念,是指系统在不确定性扰动下具有保持某种性能指标不变的能力。国内外学者最近在这方面的研究,特别是在闭环系统稳定性方面的研究已有很大进展。但实践证明,保持系统稳定性往往要牺牲系统的某些品质,如带宽、跟踪性能及抗干扰性能。这是今后必须进一步探索的问题。

近代工业应用中的控制系统的最理想特性,应当是能计及系统本身在运行中的部件失效,如计算机控制系统中的软硬件失效,飞机被炮火轰击而使局部设备失去应有的功能,工业生产系统中执行机构和传感器的失效,等等。人们希望在系统遇到这些异常状况时应能自动地牺牲某些性能指标而保持系统的稳定性,比如飞机发生故障时先使之处于一种不坠毁的状态,然后系统有一种重新组织系统结构的能力,在稍后时间内谋求重新达到原有的系统品质指标。这种新系统是今后控制系统鲁棒性研究的新课题,而稳定鲁棒性则是基础。

限于篇幅,本书主要讨论在模型不确定性扰动下的控制系统设计问题,解决保证系统

的稳定鲁棒性和品质容限问题。它对于设计者在折衷设计和考虑所采用模型的可用性方面具有指导意义。如果控制工程师在工业应用中能把鲁棒控制作为系统的重要性能指标,那么他所设计的系统必然更符合实际。可以毫不夸张地说,一个控制系统具有鲁棒性是它能真正用于工业现场的关键。就方法论而言,本书把鲁棒控制器的设计方法渗透到频率法、状态空间法之中,以适应目前工程设计方法的习惯。在某些章节中还注意把鲁棒控制和频率域的最优设计有机地结合起来。这些方法在过去的控制系统设计教科书中是很少见到的。

最后,作者对华东师范大学袁震东教授在本书编写过程中给予的帮助表示衷心感谢。

目 录

前言

第一章 数字控制系统的分析基础	1
1-1 引言	1
1-2 一个反馈控制系统实例	1
1-3 数列的表示及其拉普拉斯变换	4
1-4 z 变换	5
1-4-1 z 变换的定义.....	5
1-4-2 z 变换的几个主要定理	7
1-4-3 z 变换的逆变换	8
1-5 计算机控制系统中各部件的 z 变换表示	10
1-5-1 连续信号的采样.....	10
1-5-2 计算机与差分方程.....	11
1-5-3 计算机与系统中其他连续部件的连接.....	13
1-6 闭环计算机控制系统的 z 变换分析	16
1-6-1 闭环控制系统的传递函数.....	16
1-6-2 存在扰动的系统.....	18
1-7 离散时间系统的状态空间表达	19
1-7-1 连续时间系统的状态方程离散化	19
1-7-2 矩阵 F, G 的法捷耶夫 (Фадеев) 算法	21
1-7-3 离散状态方程的解	27
1-8 计及计算机采样及计算时间的数字控制系统模型	29
第二章 模型的简化	34
2-1 引言	34
2-2 劳斯-帕得简化法.....	35
2-3 米海依洛夫-帕得简化法.....	40
2-4 连分式展开的简化法	43
2-5 多变量系统的简化法	46
2-6 多变量系统的一阶简化法	51
2-7 最小方程误差的简化法	54
2-8 系统的平衡表达和模型简化	57
2-8-1 平衡表达和模型简化	57
2-8-2 系统的平衡表达方法.....	59
2-8-3 模型简化例.....	60
2-9 奇异摄动模型	62
第三章 控制系统在模型误差扰动下的鲁棒性	71

3-1 引言	71
3-2 单输入单输出计算机控制系统的鲁棒性	72
3-2-1 单输入单输出计算机控制系统的稳定鲁棒性	72
3-2-2 单输入单输出计算机控制系统的品质鲁棒性	77
3-3 多输入多输出反馈系统在模型误差扰动下的鲁棒性	81
3-3-1 多输入多输出连续系统的稳定鲁棒性	81
3-3-2 连续系统稳定鲁棒性理论的应用实例	89
3-3-3 多输入多输出计算机控制系统的稳定鲁棒性	93
3-3-4 离散时间系统不确定性的映射和稳定鲁棒性的检验	99
3-4 多变量系统的品质鲁棒性	100
3-5 结构不确定性系统的鲁棒性	104
3-5-1 被控对象的不确定性	104
3-5-2 硬对角占优	105
3-5-3 结构不确定系统的尼魁斯特稳定判据	107
3-5-4 结构不确定性系统的逆尼魁斯特稳定判据	109
第四章 计算机控制系统的设计方法	111
4-1 控制系统的描述	111
4-2 模型不确定性的描述	115
4-3 控制系统动态品质指标的确定	120
4-3-1 控制系统的设计指标	120
4-3-2 单输入单输出系统的设计指标和二阶闭环传递函数	121
4-3-3 z 域的典型二阶系统指标	123
4-3-4 三阶系统的 s 平面特征方程	130
4-3-5 良好稳定区	134
4-4 采样频率的选择	137
4-5 计算机控制系统的基本设计方法	141
4-6 校核控制系统动态特性的计算方法	143
4-7 采样间隔的响应问题	146
4-8 单环系统计算机算法的工程修正	150
4-9 计算机算法的实现	153
4-10 A/D, D/A 和计算机字长的选择	156
第五章 z 域的鲁棒控制器设计方法	161
5-1 引言	161
5-2 单输入单输出系统鲁棒性设计中的几个问题	161
5-2-1 采样频率的估计	162
5-2-2 降低简化被控对象模型 $\hat{P}^*(z)$ 的阶次	163
5-2-3 品质鲁棒性和稳定鲁棒性的频域判别	164
5-2-4 预期灵敏度函数 $S_d(\omega)$ 的选择	166
5-3 基于典型二阶闭环传递函数的设计方法	167
5-4 基于工程修正的控制器设计方法	173

5-5 最小方差的控制器设计	182
5-5-1 系统的零静差条件	182
5-5-2 最小误差平方和的控制器设计	184
5-5-3 高频衰减滤波器 $F(z)$ 的设计	189
5-5-4 反振铃滤波器 $A(z)$ 的设计	190
5-5-5 最小误差平方和控制器系统的设计步骤	190
第六章 准连续域设计法	192
6-1 引言	192
6-2 准连续系统	192
6-3 连续域设计指标和小畸变的双线性变换	194
6-4 准连续域设计时的鲁棒性判别方法	197
6-5 准连续域设计方法	198
6-6 设计例	201
第七章 频率域的最优设计	204
7-1 引言	204
7-2 控制系统品质与灵敏度函数的关系及受到的限制	206
7-3 加权灵敏度函数	209
7-4 关于哈迪空间的某些结果	209
7-5 稳定控制器族	212
7-6 传递函数(矩阵)的分解表达	215
7-7 被控对象存在右半平面极零点的最优灵敏度设计方法	219
7-8 设计例	226
7-9 参数不确定性系统的最优扰动抑制和跟随	230
7-10 最小相位系统的降低灵敏度设计方法	233
第八章 状态反馈系统的鲁棒性设计	239
8-1 引言	239
8-2 被控对象的状态方程	240
8-3 状态反馈控制器	246
8-4 用状态变量反馈配置极点及其公式	247
8-5 反馈增益指定时的极点配置公式	259
8-6 稳定特征值区域的边界映射到特征方程系数空间	260
8-7 用输出反馈配置极点的设计方法	267
8-7-1 参数空间映射法	269
8-7-2 用根轨迹的输出反馈设计方法	273
8-8 输出反馈时的稳定判据	285
8-9 状态变量的重构	292
8-9-1 状态变量的可观测性、可重构性,以及矩阵特征值的可观测性	292
8-9-2 n 阶观测器	294
8-9-3 减阶自适应观测器的设计	298
8-10 多模型稳定问题	301

8-11 测量元件失效时的鲁棒性设计	306
8-12 线性随机最优调节器的设计	307
8-12-1 最优调节器系统	307
8-12-2 确定性离散时间最优调节器的反馈增益计算	309
8-12-3 最优滤波器和卡尔曼滤波器	313
8-12-4 连续系统的最优控制和滤波	318
第九章 多变量系统的鲁棒性设计	321
9-1 引言	321
9-2 最优调节器的鲁棒性设计	322
9-2-1 连续域的设计	322
9-2-2 带状态观测器的最优调节器系统的鲁棒性设计	327
9-2-3 带最优滤波器的线性随机最优调节器系统的鲁棒性恢复问题	329
9-2-4 离散化	331
9-3 两个自由度系统的鲁棒性设计	331
9-3-1 $G_I(z)$ 的设计	333
9-3-2 反馈控制器 $F_o(z)$ (或 $F_o(w)$) 的设计	338
第十章 近代控制系统设计实例	342
10-1 近代控制系统的设计	342
10-2 飞机的纵向运动	343
10-3 飞机纵向运动控制系统品质指标的确定	347
10-4 最优状态变量滤波	354
附录 A z 变换表	355
附录 B 计算程序	357
附录 C 传递函数矩阵的最小实现	364
C-1 矩阵的初等运算(以行初等运算为例)	364
C-2 把一个矩阵变换为上三角矩阵	365
C-3 $P(s)$ 的右互素分部表示	367
C-4 严格适宜传递函数矩阵 $P(s)$ 的最小实现(可控型)	369
附录 D z 域的根轨迹法	373
附录 E 线性系统的稳定性判据	374
参考文献	377

第一章 数字控制系统的分析基础

1-1 引言

本章介绍设计计算机控制系统所必须具备的基础知识,重点介绍实际计算方法和针对计算机工作特点的某些新开发的分析方法。

我们为了使读者掌握这些方法的使用技巧,因此配有计算示例;而某些理论的证明和推导从略了,只注明参考文献,有兴趣的读者可以参考有关的书籍。

本章从一个实例出发,说明计算机控制系统的工作过程和它的各个系统部件的作用,以及分析这些系统所必须具备的知识,重点放在物理概念的说明。这些都是为学习以后各章作准备的。

1-2 一个反馈控制系统实例

图 1-2-1 是工业中一种普通的反馈控制系统,用于维持液体的温度。液体由入口 2 进入容器,自出口 5 排出。容器四周设有加热器 4,加热器内流通蒸汽。蒸汽由入口 6 进入,经电动阀门调节流量后,再进入加热器,最后自出口 3 排出。被控量是容器内的液体温度 T 。为了测量液体温度,在容器内装有热电偶。控制系统的误差就是设定温度 T_0 和液体温度 T 之间的差值 ε ,系统的工作目标则是减少这个误差。下面介绍系统的工作过程。

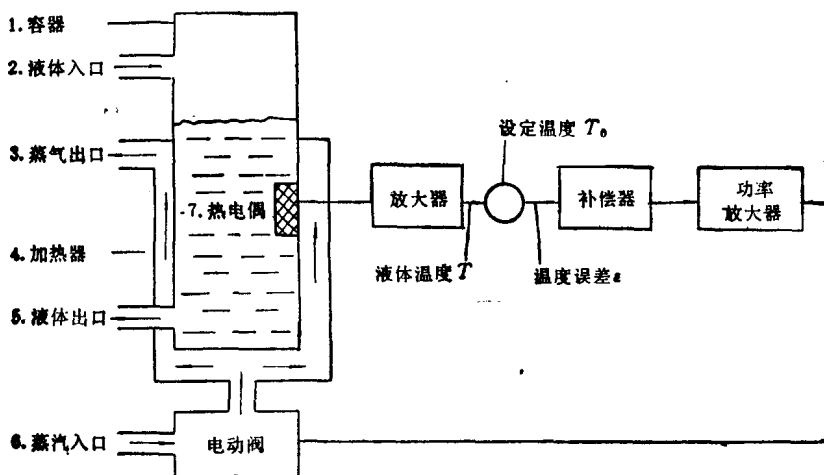


图 1-2-1 温度控制系统

当容器内温度高于 T_0 时,误差信号经放大和补偿后,产生控制变量,推动电动阀门,使阀门开口度减小,以减少进入加热器 4 的蒸汽量,从而使容器温度下降,接近设定值

T_0 。若容器内液体温度低于设定值 T_0 ，则误差信号产生反向控制变量，推动电动阀门，使阀门开口度增大，促使 T 向 T_0 靠近。通过这样不断地测量、比较、控制，使得容器内液体温度近似地维持在设定温度 T_0 。

由此可知，一个反馈控制系统在结构上有以下特点：它需要建立反馈环路，即误差变量—控制变量—被控变量—误差变量这样的闭环回路。在这个回路中，信息流程是这样的：系统不断地测量被控量和其它输入量，然后加以变换、传送、处理，产生控制变量，最后改变被控变量。这个信息流程可在图 1-2-1 所示的系统中体现出来。根据上述工作原理，这个控制系统可用图 1-2-2 的框图表示。

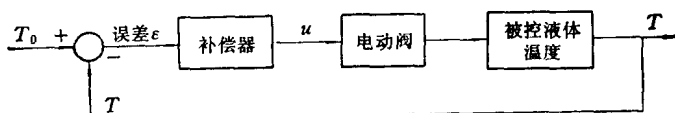


图 1-2-2 图 1-2-1 的闭环系统框图

图 1-2-2 中，设定温度 T_0 和被控变量 T 经变换器变换成适当大小的电压信号，送至控制系统进行比较后，得到误差信号 ε 。补偿器是一种为保证控制系统稳定并达到一定控制品质的误差信号处理装置。补偿器发现误差 ε 后，不是立即用这个 ε 去调整电动阀，而是使误差 ε 自零缓慢地增大，使电动阀门逐渐增加蒸汽量，以达到消除误差的目的。这反映了控制量 u 取决于 ε 的某种关系，这种关系叫做控制规律，补偿器是实现这个控制规律的装置。这就是误差信息的处理， u 称为控制变量，控制变量用以改变被控变量 T 。可见，一个闭环控制系统的信号处理过程是：测量、比较、信号处理、控制被控量，如此循环不已。控制系统无论采用什么技术方案，该信息流程基本不变。

以前，由于受技术上的限制，控制系统的测量、比较和补偿一般用模拟装置来实现。这种系统的输入和输出在时间上都是连续的模拟量，如连续的电压、电流等。通常称这种系统为连续时间系统。

随着电子技术的迅速发展，微型计算机的功能不断增强，它已成为控制系统的一个很有潜力的组成部件，并且成为设计更高品质的自动控制系统的必不可少的实现工具，特别是基于现代控制论设计的系统，更是计算机发挥优势的场合。控制系统引入计算机后，仍可以按模拟系统的构成原则和信息处理流程来构成系统，所不同的是要考虑计算机接收信号的形成和计算机本身的工作特点。众所周知，计算机只能处理数值，不能处理信息，因此，输入计算机的所有信息均要转化为数字量。计算机接受数字量后，按预定程序（控制规律的计算方法）对控制变量进行计算，所得到的也是数字形式的控制变量。但是，工业中大部分被控对象是按模拟信号工作的，所以这些数字形式的控制变量还要转为模拟量，然后，由这个模拟形式的控制变量去改变被控量。

这样，计算机控制系统需要有专门的电子器件把已经变换到适当数值范围的模拟量，转换为计算机能接受的数字量，这种转换称为模/数转换（用 A/D 表示）。而计算机本身的数据处理功能则用来作为补偿器，其输出即为控制变量（数字），然后再用一种专门电子器件把数字量转换为模拟量，用以改变被控量。这种转换称为数/模转换（用 D/A 表示）。A/D 和 D/A 转换器都是由大规模集成电路组成的电子线路，它们能在很短的时间内进行信号转换。

计算机控制系统的另一个特点是由计算机本身的工作特点决定的。由于计算机在进行数字处理时必须先一个一个地接收数字量（必要时还要对这些数字进行处理。如滤波等），然后按一定规则进行计算，这就要花费一定的时间，尽管这个时间很短。因此，它只能是输入一次，计算一次，输出一，然后再重新输入。这样，数字的输入就不能“连续不断”地进行，而只能每隔一段时间输送一次，也就是说，必须待上次的输入计算出结果后，才能再送入新的数字。同样，计算机的计算结果也无法“连续不断”地输出，也得每隔一段时间才能输出。所以，就输入输出关系而言，计算机控制系统是一种在时间上断续的工作系统，它的输入和输出仅在离散时间点上起作用。这种系统实际上是离散时间系统的一种形式。

由于计算机每隔一段时间才输入一次数字，因此，一个连续的模拟量只能在每隔一个时间间隔才被转化为数字量。如图 1-2-3 所示。

我们把连续信号 $e(t)$ 在 kT (k 为整数) 时刻的值用 $e(kT)$ 表示，显然， $e(kT) = e(t)|_{t=kT}$ ，对于不同的 k ，可得一系列 $e(t)$ 值，称 $e(kT)$ 为 $e(t)$ 的采样值，如图 1-2-3 所示。这样，按照构成反馈

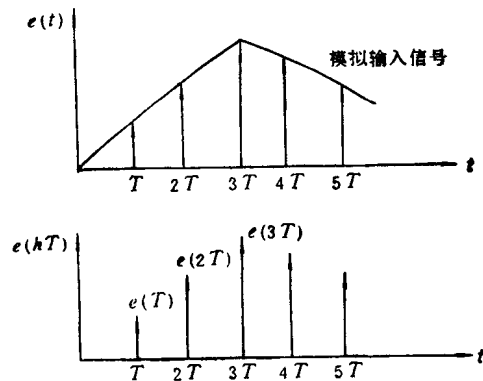


图 1-2-3 每隔 T 秒送入计算机的信号

环路和信息流程的方法，图 1-2-2 的模拟系统内若引入计算机作为系统部件，则其框图应以计算机置换补偿器，并引入采样和转换装置。如图 1-2-4 所示。

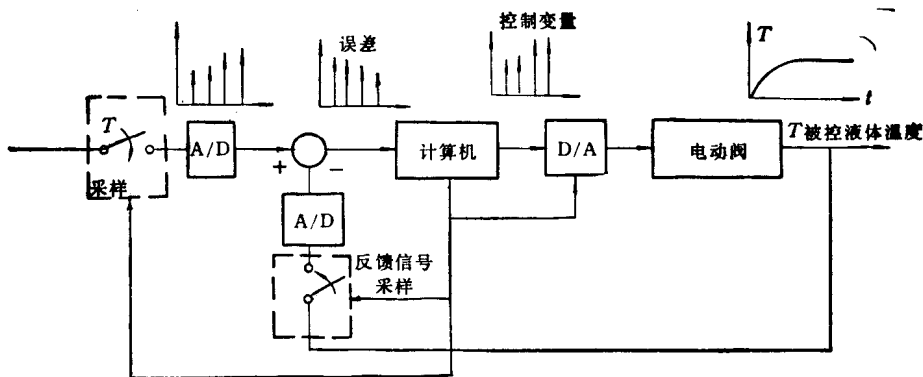


图 1-2-4 图 1-2-2 的计算机控制系统

图 1-2-4 中，我们用一个开关表示采样，并假设采样被 A/D 转换器转换为数字，且这个转换不需要时间，转换由计算机发出的脉冲(周期为 T) 进行起动。由图可见，这是一种闭环反馈系统。该系统输入一串时序数列，经数据处理后，输出另一串控制变量时序数列，并经 D/A 转换器与被控对象连接，以改变被控量。

1-3 数列的表示及其拉普拉斯变换

我们用符号 $\{a_k\}$ 表示一个数列, 并令

$$\{a_k\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\} \quad (1-3-1)$$

它的每个元 a_k 均在时刻 kT 出现 (T 为离散时间间隔, $k = 0, 1, \dots$)。如果研究的数列是对一个信号进行采样所得到的离散值, 则对于固定周期 T 的采样值 a_k 均对应于 kT 时刻的采样值, 故式 (1-3-1) 也可表示成如下形式:

$$\{a_k\} = \{a(0), a(T), a(2T), \dots, a(kT), \dots\} \quad (1-3-2)$$

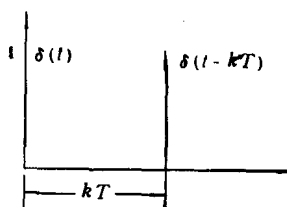
我们再引入一个 δ 函数 (亦称狄拉克函数), 它的定义是:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (1-3-3)$$

另一个定义是:

$$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1, & t = kT \\ 0, & t \neq kT \end{cases} \quad (1-3-4)$$

式 (1-3-3) 中的 $\delta(t)$ 是一个位于 $t = 0$ 时刻的单位脉冲, 而式 (1-3-4) 中的 $\delta(t - kT)$ 是一个延迟 kT 时间的单位脉冲, 如图 1-3-1 所示。



引入这两个函数后, 数列在时间上的特性即可用数学方法描述出来。

对于一个在 kT 时刻的数列的值, 可用该时刻的数列元 $a(kT)$ 乘以 $\delta(t - kT)$ 来表示, 即

$$a(kT) = a(kT)\delta(t - kT) \quad (1-3-5)$$

图 1-3-1 延迟 kT 时间的单位脉冲

因为只在 $t = kT$ 时刻才有 $\delta(t - kT) = 1$, 其余时刻均为零, 这就反映出数列的时序性。那么, 整个数列 $\{a_k\}$ 在不同时刻的值就可以用一个和式来表示:

$$\begin{aligned} \{a_k\} &= a_0\delta(t) + a_1\delta(t - T) + a_2\delta(t - 2T) + \dots + a_k\delta(t - kT) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta(t - kT) \end{aligned} \quad (1-3-6)$$

因为对于不同的间断时间, 只出现一个数列元, 因此也可以表示成

$$\begin{aligned} \{a(nT)\} &= a(0)\delta(t) + a(T)\delta(t - T) + \dots + a(kT)\delta(t - kT) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a(kT)\delta(t - kT) \end{aligned} \quad (1-3-7)$$

如果我们对式 (1-3-7) 进行拉普拉斯变换 (以下简称拉氏变换, 并用 $\mathcal{L}[\cdot]$ 表示, 而 $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ 则表示拉氏逆变换), 则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{a(nT)\} &= \mathcal{L} \sum_{k=0}^{\infty} a(kT)\delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[a(kT)\delta(t - kT)] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a(kT) \mathcal{L}[\delta(t - kT)]$$

式中离散值 $a(kT)$ 为常数. 按拉氏变换定义, $\delta(t - kT)$ 的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[\delta(t - kT)] = \int_0^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt \quad (1-3-8)$$

由广义积分可知:

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau) \quad (1-3-9)$$

故可算出式 (1-3-8) 为

$$\mathcal{L}[\delta(t - kT)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - kT) dt = e^{-skT} = e^{-k(sT)}$$

那么, 数列 $\{a_k\}$ 的拉氏变换为

$$\mathcal{L}\{a_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a(kT) e^{-k(sT)} = a(0) + a(T)e^{-sT} + a(2T)e^{-2sT} + \dots \quad (1-3-10)$$

由式 (1-3-10) 可见, 时序数列 $a(kT)$ 的拉氏变换, 相当于用一个延时时间为 T 的拉氏变换因子 e^{-sT} 乘以各个时刻的数列值.

1-4 z 变 换

1-4-1 z 变换的定义

从 1-3 可知, 一个数列的时序性可用延迟因子来表示. 若我们用一复变量 z^{-1} 来代替式 (1-3-10) 中的 e^{-sT} , 即令

$$z^{-1} = e^{-sT} \quad (1-4-1)$$

那么, 一个数列 $\{a(nT)\}$ 可变换到复数域, 且 z^{-1} 代表一个向后(向右)延迟一时间 T 的因子. 同理, z 则表示向前(向左)移动一时间 T 的因子, 因此, z 是 T 的一个函数. 将数列改用复数 z 表示的运算, 我们称之为 z 变换, 用 $\mathcal{Z}[\cdot]$ 表示. 同时用 $\mathcal{Z}^{-1}[\cdot]$ 表示把 z 域变为时间域的变换, 称之为 z 变换的逆变换. 这样, z 变换的定义可陈述如下:

一个数列的 z 变换定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{a(kT)\} &= A(z) = a(0) + a(T)z^{-1} + a(2T)z^{-2} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a(kT)z^{-k} \end{aligned} \quad (1-4-2)$$

可见, 式 (1-4-2) 是令式 (1-3-10) 中的 $e^{-sT} = z^{-1}$ 而得到的结果, 故有

$$\mathcal{Z}[e^{st}] = \mathcal{Z}\{\mathcal{Z}^{-1}[e^{st}]\} = z \quad (1-4-3)$$

当用 $e^{j\omega T}$ 代入 z 后, 可得 z 变换式的频率响应特性.

根据 z 变换定义式 (1-4-2), z 变换实质上是把时间域中每隔 T 时间出现的时间函数变换为一个复数, 但这个 T 不出现在 z 变换的式子中. 求 z 变换, 首先要求数列在各间断时刻的数值, 或先求出时间函数值 $f(t)$, 再按某个采样周期 T 得到 $t = 0, T, 2T, \dots$ 时的 $f(0), f(T), \dots$ 时间域数列值, 再用式 (1-4-2) 求 z 变换.

下面, 我们根据式 (1-4-2) 的 z 变换定义来研究几种典型的离散数列.

1. 阶跃函数的采样数列 z 变换

图 1-4-1 的曲线 1 是一个阶跃函数, 设经 T 秒采样一个值, 如图 1-4-1 中的曲线 2,

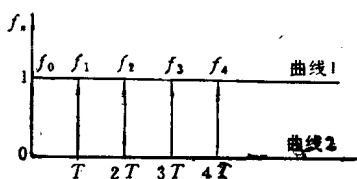


图 1-4-1 阶跃函数的采样数列

它们的幅值等于 1。按定义式 (1-4-2), 它的 z 变换为

$$\mathcal{Z}[f_n] = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots \quad (1-4-4)$$

因 $f_0 = f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 1$, 故式 (1-4-4) 变成

$$\mathcal{Z}[f_n] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-n}$$

这是一个等比级数, 它的和为 $\frac{1}{1 - z^{-1}}$, 故 f_n 的 z 变换式为

$$\mathcal{Z}[f_n] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (1-4-5)$$

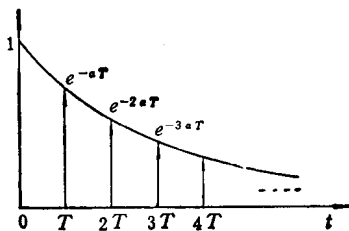


图 1-4-2 指数函数的采样数列

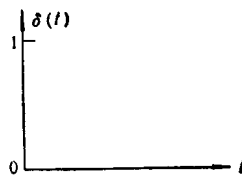


图 1-4-3 单位脉冲的采样

2. 指数函数采样数列的 z 变换

设连续时间函数 e^{-at} 的 $t = 0, T, 2T, \cdots, kT$ 的数列值如图 1-4-2 所示。

那么, $f_i = e^{-iaT}$, 按式 (1-4-2) 的 z 变换定义

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{e^{-akT}\} &= f_0 + f_1 z^{-1} + \cdots \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \cdots \end{aligned}$$

容易求出这个级数的和为

$$\mathcal{Z}\{e^{-akT}\} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \quad (1-4-6)$$

3. 单位脉冲的 z 变换

设在 $t = 0$ 时有一个单位脉冲, 它的时间离散值可以看成是这么一个数列, 即在 $t = 0$ 时它的值取 1, 其他时刻均为 0。如图 1-4-3 所示。那么, 除 $f_0 = 1$ 外, 其他时刻的 $f_i = 0, i = 1, 2, \cdots$ 这样, 根据 z 变换定义得

$$\mathcal{Z}\{\delta(t)\} = f_0 = 1$$

如果计算时间原点不变, 但这个 δ 脉冲出现在 kT 时刻, 这时它可看成是这么一个数列, 即除 $f_k = 1$ 外, 其他 $f_i (i < k)$ 的幅值均为 0, 如图 1-4-4 所示, 那么按式 (1-4-2), 其 z 变换为

$$\mathcal{Z}\{\delta(nT)\} = 0 + 0 + \cdots + f_k z^{-k} + 0 + 0 + \cdots = f_k z^{-k} = 1 \times z^{-k} = z^{-k}$$

如果时间函数 $f(t)$ 已变换为拉氏变换 $F(s)$, 那么正常作法是先求 $F(s)$ 的拉氏逆变换, 得 $f(t)$ 后, 再用采样周期 T 采样, 得 $\{f(kT)\}$ 数列, 然后按定义求 z 变换, 写成数学式为

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\} \quad (1-4-7)$$

该式在以下各章节中将经常用到。但有些简单的函数, 我们将在附录 A 中给出, 其中列出了时间函数及其拉氏变换与 z 变换之间的对应关系。

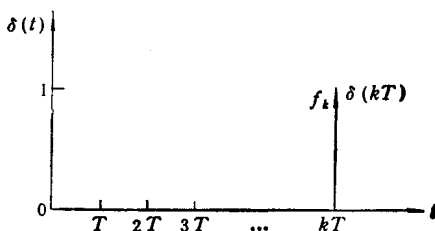


图 1-4-4 kT 时刻出现的单位脉冲

1-4-2 z 变换的几个主要定理

z 变换和拉氏变换一样, 有一些十分有用的定理, 这些定理在大多数书中已有证明, 此处, 我们不加证明地把它罗列出来。

(1) z 变换是一个线性变换。

设 f_k 和 g_k 是两个数列, a, b 为常数, 则有

$$\mathcal{Z}[af_k + bg_k] = a\mathcal{Z}[f_k] + b\mathcal{Z}[g_k] = aF(z) + bG(z) \quad (1-4-8)$$

其中, $F(z)$ 和 $G(z)$ 分别表示数列 f_k 及 g_k 的 z 变换式。

(2) 延迟定理。

因为可以将已知的 z^{-1} 看成是一个延迟因子, 故 $f_k = f(kT)$ 向后(向右)移一步的 z 变换, 可由原 z 变换乘 z^{-1} 来表示, 即

$$\mathcal{Z}[f_{k-1}] = z^{-1}\mathcal{Z}[f_k] = z^{-1}F(z) \quad (1-4-9)$$

其中, $F(z)$ 为未移动时的 f_k 的 z 变换式。

(3) 超前定理。

该定理与延迟定理相对应, 它表示 $f_k = f(kT)$ 向前(向左)移动一个时间间隔 T , 相当于乘一个因子 z 。数列 f_k 左移一步的 z 变换为

$$\mathcal{Z}[f_{k+1}] = zF(z) - zf_0 \quad (1-4-10)$$

其中, $F(z)$ 为 f_k 的 z 变换, f_0 为未移动前 $k=0$ 的数列值。

(4) 两个数列卷积和的 z 变换定理。

如果两个数列 f_k 及 g_k 作下述运算:

$$y_k = \sum_{i=0}^k f_i g_{k-i} = \sum_{i=0}^k f_{k-i} g_i \quad (1-4-11)$$

那么, y_k 数列的 z 变换 $Y(z)$ 和 f_k, g_k 数列的 z 变换 $F(z), G(z)$ 有如下关系:

$$Y(z) = F(z)G(z) \quad (1-4-12)$$

上式是以后章节将讲述的建立离散系统 z 变换传递函数时所要用的。

(5) 终值定理。

有时我们想用数列 f_k 的 z 变换式 $f(z)$ 直接判断当 $k \rightarrow \infty$ 时的数列值, 这时终值

定理为我们提供了一个方便的方法。按终值定理, 若数列 f_k 是有界的, 那么当 $k \rightarrow \infty$ 时, 其极限值 f_∞ 等于

$$f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z) \quad (1-4-13)$$

我们以单位阶跃的 z 变换式为例, 求无穷多步骤后的取样数列值 f_∞ , 由式 (1-4-5) 及 (1-4-13) 可得

$$f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1$$

这是符合阶跃特性的实际情况的。

(6) 初值定理。

与拉氏变换相对应, z 变换也有个初值定理, 它表示时间域的数列 $\{f_i\}$, 当 $i \rightarrow 0$ 时, 其初始值 f_0 可由 $\{f_i\}$ 的 z 变换 $F(z)$ 求出, 其公式为

$$f_i|_{i \rightarrow 0} = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (1-4-14)$$

例如,

$$\{f_i\} = \sum_{k=0}^i a^k = \{1, 1+a, 1+a+a^2, \dots\}$$

其 z 变换为

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + (1+a)z^{-1} + (1+a+a^2)z^{-2} + \dots \\ &= (1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) + az^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) \\ &\quad + a^2z^{-2}(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) + \dots \\ &= (1+z^{-1}+z^{-2}+\dots)(az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\dots) \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \times \frac{1}{1-az^{-1}} \end{aligned}$$

故按式 (1-4-14) 其初值为

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \times \frac{1}{1-az^{-1}} \right) = 1 \times 1 = 1$$

1-4-3 z 变换的逆变换

现在要解决的另一个问题是, 如果我们知数列的 z 变换后, 怎么求出这个数列的时间域的表示。这是一个由 $F(z)$ 求 $\{f(kT)\}$ 的问题, 叫做 z 变换的逆变换。一般 z 变换式的求逆有如下两种方法: 一种为长除法, 另一种为分部方法。

长除法的优点是它可直接写成 z^{-k} 的幂级数, 按 z^{-1} 为延迟一个 T 的概念, 直接得出时间序列。例如, 已知

$$\mathcal{F}(f_k) = F(z) = \frac{3z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$$

用长除法:

• • •