·通·识·教·育·丛·书

数学的天空

THE HEAVENS OF MATHEMATICS

张跃辉 李吉有 朱佳俊 ◎ 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

通·识·教·育·丛·书

数学的天空

THE HEAVENS OF MATHEMATICS

张跃辉　李吉有　朱佳俊◎著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学的天空/张跃辉，李吉有，朱佳俊著；—北京：北京大学出版社，2017.7
（通识教育丛书）
ISBN 978-7-301-28286-1

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①张…　②李…　③朱…　Ⅲ.①数学–普及读物　Ⅳ.①O1–49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 096525 号

书　　名	数学的天空
	Shuxue de Tiankong
著作责任者	张跃辉　李吉有　朱佳俊　著
责任编辑	潘丽娜
标准书号	ISBN 978-7-301-28286-1
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	787 毫米×1092 毫米　16 开本　18.75 印张　350 千字
	2017 年 7 月第 1 版　2017 年 9 月第 2 次印刷
定　　价	46.00 元

内 容 提 要

大自然这本巨著是用数学语言写成的. ——伽利略

本书的蓝本是上海交通大学核心通识课程“数学的天空”的讲义, 围绕历史上最负盛名的三大数学问题——费马大定理、黎曼假设、庞加莱猜想——介绍了相关数学基础、历史背景、理论方法、研究路线以及研究现状.

数学的基本构件是图与数. 勾股定理是图数交融的基石. 1637 年, 费马断言勾股定理的高次类似物, 即

方程 $x^n+y^n=z^n$ 当 $n\geqslant 3$ 时无正整数解.

此即所谓费马大定理. 经过 350 余年的努力, 费马大定理终于在 1994 年被旅美英国数学家怀尔斯所证明. 该问题的解决被誉为 20 世纪最伟大的数学成果.

调和级数源自音乐. 黎曼在研究素数分布时将欧拉对广义调和级数的研究成果推广到复数域, 并于 1859 年提出了现称为黎曼假设的著名命题:

复变函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 的零点除了所有负偶数外, 其余零点均在直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上.

经过 150 余年的努力, 数学家证明了黎曼假设对接近 41%的非平凡零点成立; 计算机学家验证了黎曼假设对前一百万亿亿个非平凡零点成立; 而物理学家则希望通过准晶来证明黎曼假设; 广大业余爱好者则试图推翻黎曼假设. 至今真假莫辨的黎曼假设被普遍认为是天下第一(数学)难题.

地球是球, 庞加莱猜测宇宙也是“球”. 什么是“球”? 准确描述“球”需要庞加莱建立的“代数拓扑学”. 然而, 3 维以上的高(维)“球”极其艰深. 1904 年庞加莱提出了关于“球”的问题:

与 n 维球面同伦的单连通 n 维闭流形必同胚于 n 维球面.

此即庞加莱猜想. 庞加莱本人将其通俗化为“像球的球必定是球”(A sphere like a sphere is a sphere). 5 维及以上的庞加莱猜想被斯梅尔于 1961 年所证明; 20 年后弗里德曼证明了 4 维庞加莱猜想; 3 维庞加莱猜想被俄罗斯数学家佩雷尔曼于 2004 年所证明.

本书适合数学爱好者、大中学生、数学教师以及具有理工科背景的读者等阅读.

献给煲汤凫水的利煜和码字打铁的罗除.

——张跃辉

献给诺诺，美仑和美奂.

——李吉有

献给喜欢旅游的父亲朱维明和爱好厨艺的母亲茆占凤.

——朱佳俊

主要符号表

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$	实数域, 复数域, 有理数域, 整数 (环), 自然数集
$\mathrm{Re}(l)$	复数 l 的实部
$\mathrm{Im}(l)$	复数 l 的虚部
$\bar{l}$	复数 l 的共轭
$\Longleftrightarrow$	当且仅当
$\forall$	对所有 (任意)
$\exists$	存在
$\partial f(x)$	多项式 $f(x)$ 的次数
$\boldsymbol{A}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵
$\boldsymbol{A} > 0$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵或 $\boldsymbol{A}$ 为正矩阵, 即 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素均大于零
$\boldsymbol{A} \geqslant 0$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵或 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵, 即 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素均非负
$\lvert A \rvert$	复数 A 的模或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式或集合 A 的元素个数
C_n^r	从 n 个不同元素中取出 r 个元素的组合数
δ_{ij}	Kronecker 符号, 即 $\delta_{ij} = 1$ 如果 $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ 如果 $i \neq j$
$\mathrm{diag}(l_1, \cdots, l_n)$	对角元为 $l_1, \cdots, l_n$ 的对角矩阵
$\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}$	$(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ 表示第 i 个分量为 1 的基本行向量
$\mathbf{e}_j$	$(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 表示第 j 个分量为 1 的基本列向量
$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}_m$	单位矩阵, m 阶单位矩阵
$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{y}$ 正交 (垂直)
$\mathbb{R}^n$	实数域上 n 维有序数组构成的线性空间
S^n	n 维单位球面
T^2	环面
$X \sharp Y$	流形 X 与 Y 的连通和
$\zeta(s)$	黎曼 ζ 函数
$\#$	集合的基数

导　读

我们有谁能说出一条从 3000 年前至今仍然正确的科学命题? 不错, 勾股定理.

我们有谁能说出一条3000年后仍然正确的科学命题? 不错, 勾股定理仍然名列其中. 读完此书后, 我们还可以加上至少两条: 费马大定理和庞加莱猜想. 请注意, 千万不要将广义相对论列入此表, 因为也许30年后广义相对论就要被新的理论所取代了——我们可以“理性”地推测, 所有非数学的科学命题3000年后都将被取代!

本书第一章“数学的天空”将通过获得诺贝尔经济学奖的“稳定婚姻理论”与“民主选举理论”、19 世纪末的“无限理论”以及战国时期公孙龙的“白马非马论”等展示“唯有数学永恒”这一主题.

本书第二章“图与数——数学之源”将介绍数学大厦的基本构件. 图与数作为数学世界的最基本元素, 实际上是人类文明的真正起源. 图, 显而易见是人类模仿大自然的开始, 而数的创造开启了人类抽象思维的大门, 是人类摆脱动物性的重要一步. 本章介绍的“算术基本定理”奠定了素数为数之原子的地位, 可以看成是数学第一定理, 是数学的地球. 最简单的数学运算“加法”与“乘法”是人类创造的第一种智性武器, 这对武器初试锋芒就产生了奇偶性这种穷天地、化阴阳、类万物的思辨概念. 正是利用这对武器, 人类建立了认识世界、改造世界的有效数学模型——勾股定理, 实现了几何概念“距离”的代数化, 并最终产生了解析几何这个图数融合的杰出范本. 然而作为图的最简单模型, “曲线”概念的代数化出乎意料地难解, 直到两个半世纪前才被完全实现. 本章第六节“数图无间——神奇的15”为读者展示了数图合璧, 即抽象的代数学与具象的几何学相互融合这个基本的现代数学理念.

本书第三章“至简至美——费马大定理”将介绍上世纪最重要的数学成就之一——费马大定理的证明. 古希腊的毕达哥拉斯学派相信“万物皆数”——整数的秘密就是宇宙的秘密, 整数的法则控制世界. 对于许多数学家来说, 寻找方程的整数解即是对永恒价值的追求. 近四百年前法国法官、业余数学家费马留下了一个关于整数方程的简单注记: “方程 $x^n + y^n = z^n, n > 2$ 没有非平凡整数解, 对此我有一个绝妙的证明, 可惜空白太小而写不下.” 寻找这个“绝妙”证明的历程书写了一幅曲折动人的美丽画卷. 从指点江山的费马到心细如发的欧拉, 从英年早逝的阿贝尔到才高八斗的库默尔, 从不辞万死的谷山丰到雄才大略的法尔廷斯, 与费马大定理战斗的数学家包括了各个时代的数学精英. 他们绞尽脑汁, 创造了无数精美绝伦

的数学工具和理论，包括在信息时代大放异彩的椭圆曲线和模形式. 历尽艰辛的数学界终于在三个半世纪以后的1994 年，由旅美英国数学家怀尔斯完成了最后一击. 怀尔斯因此被伊丽莎白女王授予爵级司令勋章 (二等，请对照：牛顿被授予五等勋章，曼联前主帅弗格森被授予三等勋章).

第四章“天籁之音 —— 黎曼假设”将介绍这个有素数的音乐之称且至今真假莫辨的著名难题. 黎曼假设的主角“黎曼 ζ 函数”

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

源自调和级数，而调和级数的源头正是音乐中的和弦. 这一点并非偶然，因为数学乃音乐之魂. 黎曼天才地认识到理解数学之原子 —— 素数的关键在于弃实数之暗投复数之明，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 对所有 $s\neq 1$ 均有意义，因此 ζ 函数除了“1”这唯一的“坏点”之外，是个非常好的函数. 特别地，黎曼证明了 ζ 函数满足对称性方程，进而可知 ζ 函数具有无限多个零点，包括所有的负偶数！于是黎曼的复数世界缤纷绚烂乃至惊世骇俗 (其中 k 为正整数)：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+\cdots=0,$$

$$1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\cdots+n^{2k}+\cdots=0.$$

黎曼将此种现象称为“平凡”，因为他拥有一双“复眼”—— 复数的眼睛！ζ 函数的其他零点在哪里？黎曼的火眼金睛也许真的透视了深不可测的秘密，因为他断言，**“复变函数 $\zeta(s)$ 的零点除了所有负偶数外，其余零点均在临界线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上.”** 这就是所谓“黎曼假设”. 经过150 多年的人机协力，得益于计算机之父图灵的奇妙算法，今天我们知道至少 40% 的零点以及最前面 $10^{22}+10^4$ (此数大于“一百万亿亿”) 个零点均在临界线上，但所有这些艰苦努力似乎距离终点遥遥无期，因为数学家的研究方法尚未突破黎曼一个半世纪以前的思想. 于是世界顶尖的物理学家跨界来帮助几乎走投无路的数学界同仁，他们的武器是 20 世纪 80 年代发现的“准晶”，他们的信念是黎曼 ζ 函数的非平凡零点构成一个“1 维准晶”(现实世界中当然没有此种东西)，因此 1 维准晶理论的完成之日即黎曼假设的证明之时.

第五章“大象无形 —— 庞加莱猜想”介绍每个人都关心的问题“宇宙是球吗”. 与几千年前的类似问题“地球是球吗”相比，我们永远无法验证宇宙是什么 —— 不管人类的足迹跨出多远，我们永远在“宇宙里”，而地球则是可以从外部观测的. 无论如何，我们需要首先回答“什么是球”？漏气以致变形的足球还是球吗？地球的表面是一个 2 维球，庞加莱证明 2 维球的特点是其上任何一条封闭的曲线都可以沿

着球面收缩成一个点 —— 这称为单连通性. 庞加莱猜想"单连通"也应该是高维球面的特征, 即单连通的闭曲面必定是球面. 然而高维球的复杂程度远远超出想象, 因此庞加莱发展了一种新数学, 即"代数拓扑学"以精确展示他的思想. 庞加莱猜想即是关于该学科最简单也是最重要的曲面——球面的命题. 为此数学家造出了几何学手术刀以便理解复杂拓扑空间 (即把复杂的拓扑空间拆成若干人们熟悉的较为简单的拓扑空间). 在试图证明 3 维庞加莱猜想的无数次失败的启发下, 美国数学家斯梅尔利用他自己发展的强大的配边理论于 1961 年率先证明了 5 维以及更高维的庞加莱猜想. 1982 年, 美国数学家弗里德曼利用同调群与二次型理论证明了 4 维庞加莱猜想. 4 维拓扑风景奇诡. 同年, 另一位杰出的美国数学家瑟斯顿猜测 3 维拓扑空间本质上与 2 维拓扑一样, 可以分类为 8 种基本结构, 这就是比 3 维庞加莱猜想远为广泛且深刻的几何化猜想. 2004 年, 俄罗斯数学家佩雷尔曼利用美国数学家哈密尔顿发明的源自高斯曲率的瑞奇流, 创造了他的好熵 ——"熵函数"以及"简化长度函数", 一举证明了瑟斯顿的几何化猜想, 从而终结了困惑人类整整一百年的庞加莱猜想. "球面"这个"最简单"的曲面终于被揭开面纱, 人类于是对其栖息地 —— 宇宙至少在心灵层面有了理性的感知. 值得国人深思的是, 佩雷尔曼见于科学预印本网站 (www.arXiv.org) 的终结庞加莱猜想的三篇论文从未正式公开发表过, 佩雷尔曼本人也在拒绝了菲尔兹奖 (数学最高奖) 之后销声匿迹.

致　谢

我国著名数学家、教育家刘绍学先生于耄耋之年仍关心本书的进展并给予作者悉心指教，作者在此表示衷心感谢并敬祝刘先生健康长寿！

在本书写作过程中，我校教务处和数学科学学院的领导及同事们，特别是章璞教授给予作者以极大鼓励和支持，吴耀琨教授和李友林教授提供了许多有益建议，作者一并表示衷心感谢！

本书的绝大部分参考文献来自于德国斯图加特大学图书馆、美国麻省理工学院图书馆和上海交通大学图书馆，作者对斯图加特大学柯尼希·史提芬 (König Steffen) 教授、麻省理工学院理查德·史坦利 (Richard Stanley) 教授表示衷心感谢！

作者恳请更多朋友原谅未能提及您的姓名，但您在本书写作和出版过程中对作者的帮助和鼓励我们铭记在心，衷心感谢！

作者衷心感谢 (尽管有很多错误) 免费网站: http://en.wikipedia.org

本书受上海交通大学“985 工程”三期重点资助，受国家自然科学基金项目 11271257 部分资助，特此致谢.

作者水平有限，谬误与不当之处必定不少，敬请批评、指正. 来信请寄:

200240　上海交通大学数学科学学院　张跃辉

或电子邮件:

zyh@sjtu.edu.cn

为方便读者查阅，书中引用的重要原始文献均在引用处直接或以脚注列出，书末的参考文献仅列出最重要的若干专著. 书末的汉英名词索引提供了本书出现过的部分术语的汉字词条和相应的 (一种) 英文对照，按照字母或汉语拼音顺序排列.

张跃辉　李吉有　朱佳俊

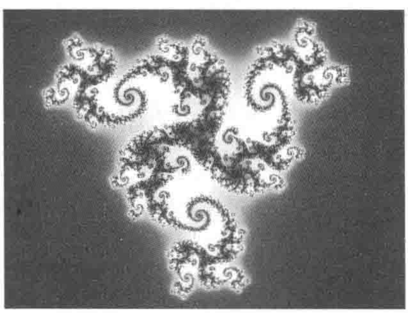
2016.8

目　录

第一章　数学的天空

引言　虚室生白 —— 数学永恒

“数学是什么?”在“百度搜索”显示的条目超过一千六百万条. 尽管尝试回答该问题的古今中外圣贤不胜枚举, 但每个人 (包括本书作者) 都明白这些可贵的努力注定徒劳无功, 一个佐证是“人类历史上唯一的全才”达・芬奇[①]曾自我评价:“欣赏我作品的人, 没有一个不是数学家.” 100 年后, 自然科学先驱伽利奥・伽利略[②]更是深刻地认识到, “大自然这本巨著是用数学的语言写成的.” 又 100 年后, 数学大神、人类历史上的科学巨人艾萨克・牛顿[③] 果然用数学语言将大自然呈现在世人面前, 这就是科学巨著《自然哲学的数学原理》[④]. 再 100 年后, 伟大导师马克思与恩格斯几乎同时发出了“非数学无以救科学”的断言. 所以, 尽管数学依然是大多数大中学生的梦靥, 依然是大多数读者不堪回首的过去, 但本书三位作者对数学唯有无限的敬意——数学不仅是大自然的语言, 还是作者的饭碗. 然而数学远不止此. 请读者猜猜看: 下图是什么?



分形图 1

---

① Leonardo di ser Piero da Vinci, 1452—1519, 意大利科学家、画家、发明家.

② Galileo Galilei, 1564—1642, 意大利数学家、物理学家、天文学家.

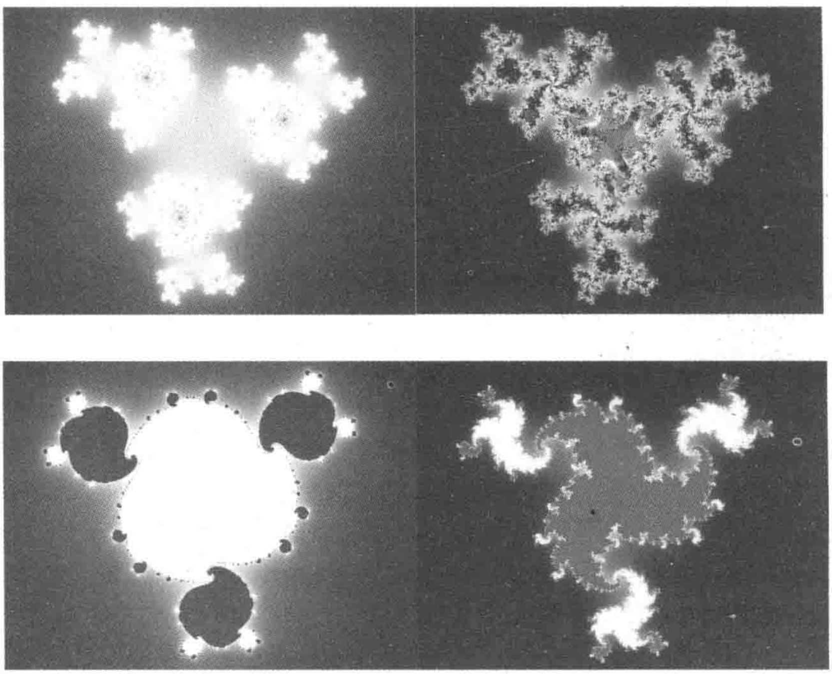
③ Isaac Newton, 1642—1727, 英国物理学家、数学家.

④ 原文为拉丁文: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.*

无论您认为该图是一幅抽象派作品，还是大洋深处的连体海马，抑或中东壁毯的图案一角，它们都源自一个共同的母体——数学，因为该图是由软件 FractalBlizzard2 绘制的一幅普通分形图，其迭代方程为

$$x = x^3 - 3xy^2 - 0.121, \quad y = -y^3 + 3x^2y + 0.799,$$

初值点是 $x = 0.0237, y = 0.1737$. 在您上机一试之前，您能再看一眼下面几幅图并再次猜猜它们是什么吗？



分形图 2

您也许已经得到了答案，不错，这新的四幅图虽然较第一幅图变化巨大，但依然是由同一软件绘制的分形图．然而，大大出乎作者意料的是，所有 5 幅图的迭代方程除了常数项的细微变化其余各项完全相同，初始点也完全一样！它们的迭代方程如下：

$$x = x^3 - 3y^2x - 0.444, \quad y = -y^3 + 3x^2y + 0.644;$$
$$x = x^3 - 3y^2x - 0.344, \quad y = -y^3 + 3x^2y + 0.714;$$
$$x = x^3 - 3y^2x - 0.044, \quad y = -y^3 + 3x^2y + 0.800;$$
$$x = x^3 - 3y^2x - 0.174, \quad y = -y^3 + 3x^2y + 0.868.$$

作者心中的纷扰尘世刹那间被这些美轮美奂的图画涤荡一新，油盐柴米的繁琐，豪车洋房的诱惑一时间烟消云散：数学使心灵安宁，数学让世界纯净．

第一节　智者无敌——从数学到诺贝尔经济学奖

数学语言与数学理论似乎距离我们的生活经验无限遥远, 因为日常生活中我们涉及的不是数学, 而是"数字". 然而经济学则和每一个人的日常活动息息相关. 代表经济学最高成就的经济学诺贝尔奖的首届 (1969 年) 两个得主之一便拥有数学博士学位, 另一位则拥有数学学士学位和物理学博士学位. 迄今为止, 总共 74 位诺贝尔经济学奖得主中拥有数学学位者超过半数, 其中职业数学家约占 20%. 美国芝加哥大学是诺贝尔经济学奖的大户, 共有 28 位校友获此殊荣 (在职教师 8 人). 为了更好地理解此现象, 请读者浏览芝加哥大学经济学院推荐给本科生的一个核心课程设置 (美国大学的一个完整学年由三个学期组成):

	秋季学期	冬季学期	春季学期
第一年	数学 13100	数学 13200	数学 13300
第二年	经济学 19800	数学 19520	经济学 20000
第三年	数学 19620 经济学 19900	统计学 23400 经济学 20200 经济学 20100	经济学 20300 经济学 21000

读者一定注意到了, 在由数学、统计学和经济学构成的总计 13 门的核心课程中, 数学课程占了 5 门, 还有 1 门统计学可以认为也是数学课程!

时任瑞典皇家科学院院长的埃里克・伦德博格 (Erik Lundberg) 在诺贝尔经济学奖首届颁奖仪式上说:"过去四十年中, 经济科学日益朝着用数学表达经济内容和统计定量的方向发展."回想 20 年前就有人断言中国学者不久将获得诺贝尔经济学奖, 因为我国经济已经高速发展了几十年, 对此作者只能猜测此"不久"不是一百年. 因为参照彼时上海交通大学经济金融类专业可怜的 3 门极度缩水的数学与统计学课程推算, 我国培养的经济学家即使具有世界最高的经济理论水平, 其数学水准距离芝加哥大学经济学院本科生的数学水准可能仍有较大差距, 而我国培养的部分数学家对经济学的研究才刚刚起步, 形成自己的学派尚待时日. 因此在预测中国学者何时获得诺贝尔经济学奖之前, 适当的做法是把经济金融类本科生的数学课程建设到位, 将我们目前的"汉字"经济学尽快变成"数理"经济学. 可喜的是, 近年来国内顶尖大学的数学课程建设日新月异, 比如上海交通大学经济金融类专业已有 5 门数学和统计学的必修专业基础课, 选修课程中《实变函数》《泛函分析》与《拓扑学基础》等高大上的数学课程也赫然在目.

所以, 与很多非数学领域类似, 在经济学领域, 得数学者得天下.

数学究竟是怎样成为经济学的命门的? 请读者与作者一起来欣赏 1972 年与

2012 年的诺贝尔经济学奖.

1.1.1 金无赤足 ——1972 年诺贝尔经济学奖之选举制度

1972 年诺贝尔经济学奖得主是美国斯坦福大学经济学教授肯尼斯·约瑟夫·阿罗①, 其获奖理由之一是"他的不可能性定理, 按照这个定理, 在个人偏好函数范围以外不可能编制社会福利函数". 所谓"阿罗不可能性定理"(Arrow's impossibility theorem)是阿罗 1951 年发表的由其博士论文整理而成的名著*Social Choice and Individual Values* (《社会选择与个人价值》, 有中译本) 中的一个著名定理, 以下我们简单介绍此定理在社会学中的一个应用.

我们首先解释一下符号"$A > B$"的意思. 1940 年在纽约市立大学获得数学学士学位的阿罗具有雄厚的数学基础和超强的逻辑能力, 因此他对社会学的研究建立在坚实的数学理论与严密的逻辑推理之上. 阿罗用大于符号"$>$"表示"偏好", 即"$A > B$"表示"偏好 A 胜于 B". 这样"偏好"这个生活用语就被阿罗完全数学化了, 换句话说, 阿罗为社会系统中的"偏好"关系建立了一个以大小关系"$>$"为核心的数学模型. 按照著名的布尔巴基学派的理论, 数学由三种基本"结构"(structure) 构成, 即描述数字及其抽象的**"代数结构"**(algebraic structure), 描述图形及其抽象的**"拓扑结构"**(topological structure) 和描述大小关系及其抽象的**"序结构"**(ordered structure). 大小关系是最简单的"序结构", 比如我们都非常熟悉的实数的大小关系不能照搬到复数当中, 后者的序结构要复杂得多 (参见本书第四章).

现在请读者考查下面的例子.

例 1 假设甲、乙、丙三个选民对三个候选人 A, B, C 的偏好排序如下表:

甲	A > B > C
乙	B > C > A
丙	C > A > B

请读者给出最好的选举方案.

显而易见, 在我们要讨论的例子中, 由甲、乙、丙三人构成的"社会"的偏好次序包含内在的矛盾, 即社会总体在偏好 A 胜于 C 的同时又认为 A 不如 C. 本例表明, 完全无约束的选举系统是不存在的, 任何想要建立较为科学合理的选举制度的社会必须设立某种原则. "相对多数原则"(plurality rule) 与"大多数原则"(majority rule) 是大家非常熟悉的两种通用选举原则. 在所谓"相对多数原则"或"简单多数原则"下, 所有候选人中得票或得分最高者为最终的胜者, 其中候选人的得分多采取加权法 (使用加权法的著名例子是前欧洲金球奖的评选, 其规则是对 5 位候选人

① Kenneth Joseph Arrow, 1921—2017. 罗马尼亚裔美国著名经济学家.

加权, 第一名得 5 分, 第二名得 4 分, 第三名得 3 分, 第四名得 2 分, 第五名得 1 分, 最终总分最高者获得金球奖). 而在“大多数原则”下, 超过半数的得票者方可胜出. 因此, 当只有 2 个候选人时, “相对多数原则”与“大多数原则”一致, 而当至少有 3 个候选人时, 每个候选人的得票数可能都低于半数, 因此“大多数原则”可能失效, 补救的办法多采用加权法或多轮选举法. 使用多轮选举法的著名例子是奥运会主办城市的确定, 其规则是每一轮淘汰得票最少者, 直至产生得票超过半数的候选城市. 请读者继续考查下一个例子.

例 2 假设 100 个选民对三个候选人 A, B, C 的投票结果如下:

A	B	C
40	35	25

请您决定最后的选举结果.

似乎任何合理的选举体系都应该选举 A (这也符合相对多数原则). 然而, 这 100 个选民对三个候选人 A, B, C 的排序结果如下:

第一	A	B	C
第二	B	C	B
第三	C	A	A
选民	40	35	25

您现在作何感想? 如果使用加权法, 则三位候选人的最终得分如下:

$$\begin{aligned}
A\text{ 的最终得分} &= 40 \times 3 + 35 \times 1 + 25 \times 1 = 180;\\
B\text{ 的最终得分} &= 35 \times 3 + 40 \times 2 + 25 \times 2 = 235;\\
C\text{ 的最终得分} &= 25 \times 3 + 35 \times 2 + 40 \times 1 = 185.
\end{aligned}$$

所以, 使用加权法的结果将使 B 获胜, 而在相对多数原则下获胜的 A 则敬陪末座!

两个看似差别不大的选举原则产生了相去甚远的选举结果. 2000 年的美国总统大选是一个真实的例子. 最终结果是大家都知道的, 共和党候选人乔治·布什 (George W. Bush) 战胜其他多位候选人而当选. 但布什的选民票数实际上只占 47.87%, 而失败者民主党候选人阿尔·戈尔 (Al Gore) 的选民票数占 48.38%, 即戈尔的选民票数比布什多 543 895 张, 但布什却以选举人票比戈尔多 34 张而当选. 本次选举还有另一个有趣之处, 根据最终得票数第三的绿党候选人拉尔夫·纳德 (Ralph Nader) 的回忆录, 如果纳德自己退出选举, 则最后的获胜者极可能不是布什, 而是得票数第二的民主党候选人戈尔. 因为据后来的调查统计, 如果纳德退出选举, 则投票给他的选举人中将有 25% 投票给布什, 38% 投票给戈尔, 特别是纳德在关键的佛罗里达州得到的选票将有大多数投给戈尔, 于是戈尔将以较大优势得到佛罗里达