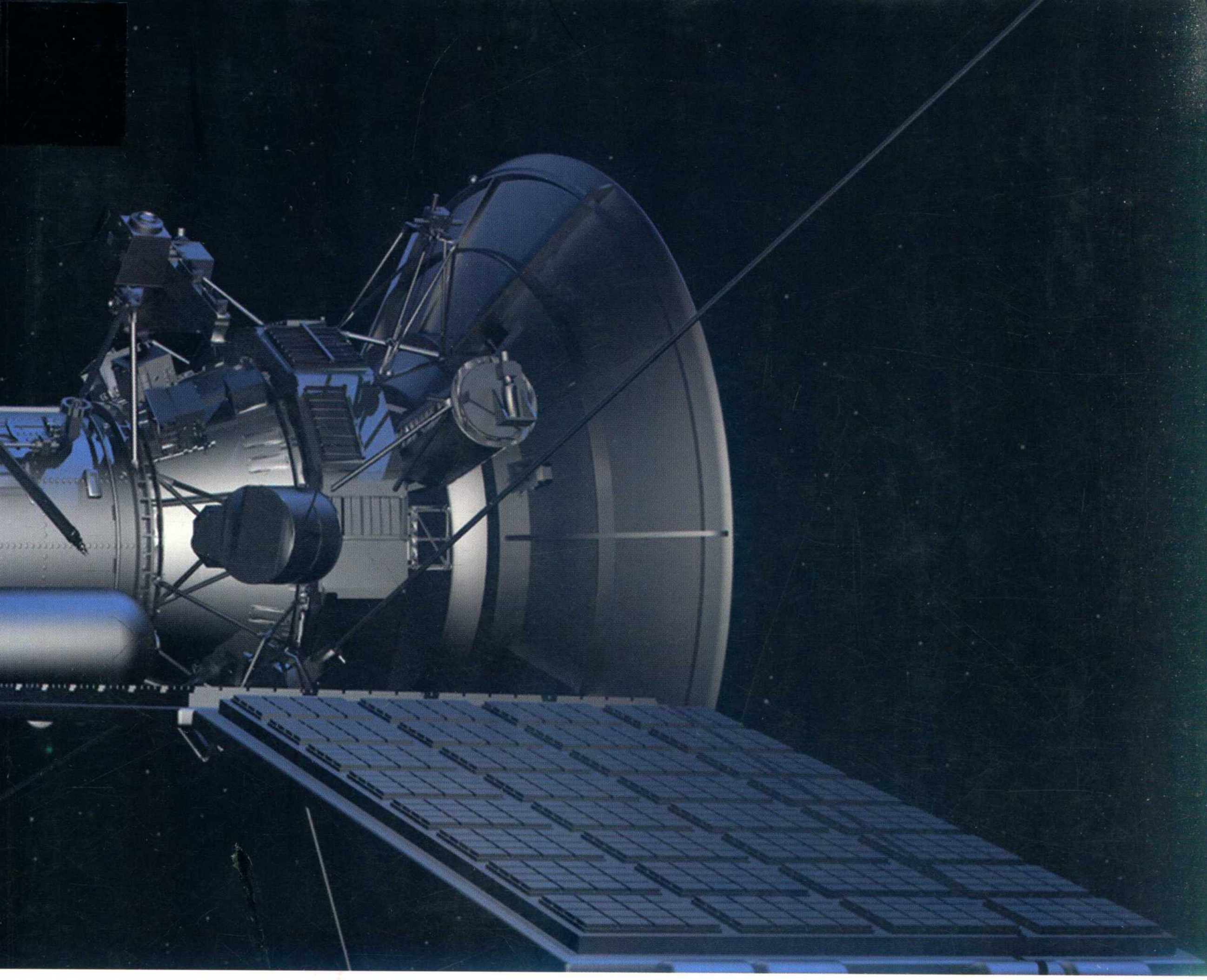

iCourse·教材

大学物理
（第一卷）力学与热学

主编　刘兆龙　冯艳全　石宏霆

高等教育出版社

iCourse·教材

大学物理

（第一卷）力学与热学

主编　刘兆龙　冯艳全　石宏霆

高等教育出版社·北京

内容简介

本套教材分为四卷，第一卷力学与热学，包括质点力学、刚体力学、连续体力学、气体动理论、热力学基础；第二卷波动与光学，包括振动、波动、几何光学基础、光的干涉、光的衍射、光的偏振；第三卷电磁学，包括静电场、静电场中的导体和电介质、恒定磁场、电磁感应和电磁场；第四卷近代物理，包括狭义相对论力学基础、微观粒子的波粒二象性、薛定谔方程及其应用、固体中的电子、原子核物理。各章后均有本章提要、思考题和习题，书末备有习题参考答案和活页作业单。

本书适合作为工科各专业的大学物理课程的教材或教学参考书，也可作为综合性大学和高等师范院校相关专业的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理．第一卷，力学与热学 / 刘兆龙，冯艳全，石宏霆主编．-- 北京：高等教育出版社，2017.2

ISBN 978-7-04-046821-2

Ⅰ．①大… Ⅱ．①刘… ②冯… ③石… Ⅲ．①物理学-高等学校-教材②力学-高等学校-教材③热学-高等学校-教材 Ⅳ．①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 281514 号

DAXUE WULI（DI YI JUAN）LIXUE YU REXUE

策划编辑 缪可可　责任编辑 缪可可　封面设计 张志奇　版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹　责任校对 胡美萍　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 787 mm×1092 mm 1/16
印　　张 21.25
字　　数 520 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2017 年 2 月第 1 版
印　　次 2017 年 2 月第 1 次印刷
定　　价 39.80 元

物 料 号 46821-00

前言

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式、相互作用的自然科学，它具有完整的科学体系、独特有效的研究方法、丰富的知识，所有这些对于培养 21 世纪的科学研究工作者及工程技术人员都是必不可少的。因此以物理学基础为内容的大学物理课程是理、工、经、管、文等本科各非物理专业必修的一门基础课。

当前，以计算机、手机和网络技术为核心的现代信息技术正在改变着我们的生产方式、生活方式、工作方式和学习方式，并可能引起教育和教学的革命性改革。北京理工大学大学物理教学团队充分利用自身的教育资源优势，一直积极开展大学物理课程的网络建设。北京理工大学“大学物理”课程 2008 年被评为北京市精品课；2014 年入选中国大学 MOOC 首批建设课程，分力学与热学、波动与光学、电磁学、近代物理四个模块进行讲授，并基于 MOOC 开展面向多元化专业人才培养的大学物理模块化分层次混合式教学；“物理之妙里看‘花’”2016 年被评为国家级精品视频公开课。

我们之所以新编一套教材，是因为不仅要考虑结合国内外的教学改革进展及信息化技术，还要考虑在充分总结和吸取广大教师和学生对原北京市精品教材（《大学物理》苟秉聪、胡海云主编）意见的基础上，依据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》（2010 年版）进行编写。在写作风格上力求物理图像清晰，物理思想突出；论述深入浅出并有适量的技术应用和理论扩展。同时力求贯彻以学生为主体、教师为主导的教育理念，遵循学生混合式学习的认知规律，结合 MOOC 教学，通过立体化设计，体现“导学”“督学”“自学”“促学”思想，展现物理以“物”喻理、以“物”明理、

以“物”悟理的学科特点，使学生多方位地开展学习，增加教材的可读性和趣味性。

本套教材编者均为大学物理教学的一线优秀教师，具有多年丰富的教学、教改经验。第一卷主编老师为：刘兆龙（第1、第2章），石宏霆（第3章），冯艳全（第4、第5章）；第二卷主编老师为：李英兰（第1、第2章），郑少波（第3—第6章）；第三卷主编老师为：胡海云（第1、第2章），吴晓丽（第3章），缪劲松（第4章）；第四卷主编老师为：缪劲松（第1章），胡海云（第2、第3章），冯艳全（第4章），吴晓丽（第5章）。我们感谢北京理工大学的物理学前辈荀秉聪教授等为本套教材打下的良好基础，感谢北京理工大学教务处、高等教育出版社物理分社等对本套教材的编写与出版的积极支持。

编者

2016年4月

目录

第1章 质点力学

授课录像:绪论

物理学是关于物质和能量的科学,研究内容包括:粒子的运动及粒子间的相互作用,波动、分子、原子和原子核的性质,以及宏观的多粒子系统,例如气体、液体、固体等．物理学是自然科学的基础,其中的基本原理、基本观点、研究方法和已经取得的研究成果对其他学科的发展具有重要意义．

力学是物理学的一个分支．早在公元前4世纪,中国的墨子及其弟子在他们的著作《墨经》中就论述了时空概念、力、杠杆原理等许多力学知识;15世纪后期,文艺复兴促进了力学在欧洲的发展;17世纪牛顿运动定律和万有引力定律的提出,标志着经典力学基础的奠定,之后经典力学获得了长足的发展;到19世纪初,力学已成为一门相对完善的学科．力学的发展带动了科学以及哲学的进步,其中的理论和研究方法渗透到了物理学的许多学科分支．尽管力学有着悠久的历史,但仍然极具生命力,不断涌现出新兴的学科分支,如爆炸力学、生物力学、等离子体动力学、空气动力学等．科技发展日新月异的今天,在载人飞船的发射、机械制造和天体运行等方面的探索中,力学规律仍然是诸多研究的基础和有力工具．

力学的研究对象是机械运动．物质的运动多种多样,例如天体的运动、人造地球卫星绕地球的运动、水面处阳光的折射及反射、电路中的电流、材料中分子原子的运动等．在各种各样的运动中,最简单的是机械运动．机械运动指的是物体位置的改变,包括一个物体相对于另外一个物体位置的变化以及一个物体的某些部分相对于其他部分位置的变化．月亮绕地球的轨道运动、高速列车在铁轨上的飞驰、弹簧的伸长与压缩、河水及空气的流动等都是机械运动．机械运动是最基本的运动,热运动、电磁运动等运动中都包含这种基本的运动形式．

本章介绍经典力学中的基础部分——质点力学,包括质点运动学和质点动力学两部分．质点运动学着重于刻画质点的运动,探究质点的位置、速度、加速度等量如何随时间或空间变化,探究描述运动所用的各个物理量之间的关系,关注物体的运动轨道

等. 总之,质点运动学的任务是对质点的运动状态进行全面的描述. 但是,如果你想知道为什么质点运动状态发生了变化,运动学并不对此给予回答,这个任务由质点动力学来完成. 质点动力学以牛顿运动定律为基础,给出质点运动状态变化的原因及其所遵循的规律,例如:你三步上篮成功,运动学告诉你篮球飞行过程中的速度、位置、轨道等,而动力学告诉你为什么篮球从出手到接触篮筐前,其加速度可以被视为常量. 运动学和动力学两者结合在一起,构成了研究机械运动的基础理论. 本章所涉及的关于质点和质点系的基本运动规律以及相应的科学研究方法和思维方式是大学物理学的基础.

1.1 质点运动学

1.1.1 位置矢量与位移

在科学研究过程中,常常要先忽略一些次要因素,将实际物体或者运动等以模型的方式呈现出来,进而探究其中的规律. 这种将实际物体抽象为某种理想模型的方法在物理学中被反反复复地使用过. 物理学中,关于物体的最简单的模型就是质点模型. 在考虑一个物体的运动规律时,有时可以忽略该物体的大小和形状,将其全部质量视为集中于一个几何点,称之为质点. 任何物体,小到分子、原子,大到星系,都可以被看作质点,只要这些物体的内部结构、大小和形状可以被合理地忽略. 除了质点以外,经典力学中常用的模型还有刚体、完全弹性体和理想流体. 大家会在后续学习中陆续接触到它们. 由若干质点组成的系统称为质点系. 任何宏观物体都可以被视为一个质点系.

质点

NOTE

1. 位置矢量与运动函数

机械运动研究的是物体位置的变化,而物体位置的变化具有相对性. 不同观察者看到物体位置变化的情况是不同的. 站在地面上的观察者认为树木是静止的,而坐在行驶车辆内的人则看到树木向后运动. 一个物体相对于不同观察者运动状态可能不同,这称为机械运动的相对性. 要明确地描述某个物体的运动,需要选取其他物体作为参考. 为了描述一个物体的运动而被选来作为参考的另外一个物体称为参考系. 要想精确定量地研究

参考系

机械运动，还需要在参考系上固定一个坐标系．例如，我们可以将坐标系固定在地面上，并称之为地面参考系；也可以将坐标系的原点置于地心处，并使坐标轴指向恒星，这样的参考系称为地心参考系．在研究天体、航天器的运动时，还常常以太阳为参考系．坐标系是参考系的数学抽象，常见的有直角坐标系、极坐标系、球坐标系、柱坐标系等．坐标系的选取对于研究物体的运动规律是非常重要的，合适的坐标系有助于简化对运动的研究．此外，不同性质的坐标系中，研究物体运动的方法也可能是不同的．例如：在地面参考系中，可以使用牛顿第二定律研究物体运动的动力学规律．但是，如果以相对于地面加速行驶的火车为参考系，那么，牛顿第二定律在这个火车参考系中是不成立的，这时我们要采用其他方法研究动力学问题．后面我们对这一点会有深刻的理解．要定量研究物体的运动就离不开坐标系．

（1）位置矢量

现在，假设我们选定了一个坐标系，在其中研究某个质点位置的变化规律．我们首先要做的就是用数学语言描述出这个质点的位置，继而才能给出其位置如何随时间变化等．如何确定一个质点的位置呢？只要我们具备很一般数学知识，就会说，可以利用坐标值来确定一个点的位置．例如，在直角坐标系中，只要写出了(x,y,z)这些值，就给定了一个点的位置．的确如此，然而，在质点运动学中，往往利用一个矢量来确定某个物体的位置．如何利用矢量确定质点的位置？为什么要这样做呢？请带着这些疑问，寻求答案．

在选定的坐标系中，从坐标系的原点向物体所在位置引有向线段，定义这个矢量为位置矢量[①]，简称位矢，记作 $\boldsymbol{r}$．位置矢量的大小或者模以 r 表示，它是个标量．在国际单位制（SI）中，位置矢量的单位是米（m）．利用位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 就可以描述出质点的位置了．

位置矢量

来看具体的例子．如图 1-1 所示，采用直角坐标系 Oxy 来研究某个质点的运动规律．这个质点沿着曲线 AB 运动，设某个时刻 t，这个质点运动到 P 点，该点坐标为(x,y,z)．从坐标系原点 O 到物体此刻所在位置 P 点的有向线段$\overrightarrow{OP}$这个矢量，就是质点在该时刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}$．

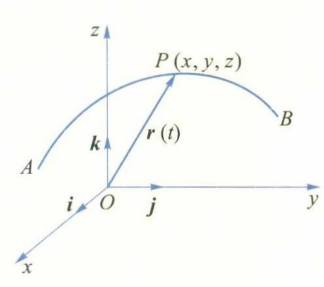

图 1-1 质点的位置矢量

在直角坐标系中，位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的数学表达式为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (1-1)$$

① 请读者注意，在教材中，以黑体表示矢量．

其中,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x、y、z 轴正向的单位矢量．位置矢量的长度或是模,以 r 表示,在直角系中,

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-2}$$

设位置矢量与 x、y、z 轴的夹角分别为 α、β 和 γ,它们的余弦值与 P 点坐标值间的关系为

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

很容易证明

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

当然,直角坐标系并不是我们唯一的选择,还可以采用其他种类的坐标系研究物体的运动状态．例如,若物体做平面曲线运动,可以利用平面极坐标系来研究其运动．图 1-2 中,O 为坐标系的原点,从原点做一条带有刻度的射线 Ox,就构成了一个平面极坐标系,Ox 称为极轴．设 t 时刻质点位于 P 点,根据位置矢量的定义,从 O 到 P 点的有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 是质点在此刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}$. P 到 O 点的距离就是位置矢量的长度 r. 位置矢量与极轴的夹角 θ 称为辐角,通常规定自极轴逆时针转向位置矢量的辐角为正,反之为负.

授课录像:极坐标系中运动的描述

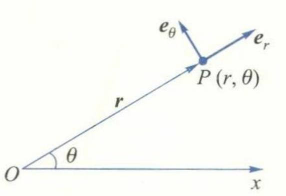

图 1-2 平面极坐标系中的位置矢量和单位矢量

平面极坐标系中,(r,θ) 是一个点的极坐标,就像直角坐标系中的坐标 (x,y,z) 一样．为了在平面极坐标系中表示出矢量,要像在直角坐标系中那样,引入单位矢量．对于二维的平面极坐标系,要有两个单位矢量,一个是径向单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$,另外一个是横向单位矢量 $\boldsymbol{e}_\theta$,两者的大小均为单位长度．$\boldsymbol{e}_r$ 的方向与质点此刻位置矢量的方向一致,所以称为径向单位矢量;$\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_r$ 垂直,且指向 θ 增大的方向,称为横向单位矢量,如图 1-2 所示．请注意,尽管 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的大小是恒定的,但是,随着质点的运动,这两个矢量的方向却可能发生变化,一般来说它们不是常矢量．这一点与直角坐标系中的单位矢量有很大的不同．在直角坐标系中,单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是常矢量,与质点的运动无关.

在极坐标系中,如何利用单位矢量来表达位置矢量呢?设 P 点的坐标为 (r,θ),则在平面极坐标系中,质点位置矢量的数学表达式为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \tag{1-4}$$

可以看出,尽管都是位置矢量,但是它在极坐标系中的表达式(1-4)与在直角坐标系中的表达式(1-1)在形式上是完全不同的.

位置矢量精确地描述了质点的位置,它的长度表明了质点距坐标原点的距离,它的方向给出了质点在坐标系中的方位.

(2) 运动函数

描述质点的运动时,时间是一个重要的量. 在爱因斯坦的相对论诞生前,人们认为时空是绝对的,独立于物体的运动之外. 假设有一把米尺和一个挂钟静止在火车站的站台上,你乘坐火车通过这个站台,在火车上测量出那把米尺的长度与你站在站台上测出的值一样;在火车上测得挂钟的秒针移动一个小格经过的时间间隔与你站在站台上测得的结果相同. 这所谓的绝对时空观与我们的日常生活经验是相符的. 而且,相对论理论告诉我们,对于宏观物体的低速运动,即运动速度远远小于光在真空中的速度时,这种观点一般是适用的. 在本章中,我们采用的是这种经典的绝对时空观. 在第四卷中,大家会学到相对论理论,进而对时空有更深刻的认识.

质点在空间运动时,位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 随时间变化,是时间的函数,即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-5}$$

式(1-5)称为质点的运动函数. 对于不同的运动,函数形式可能会不同,它可以是线性函数、二次函数、三角函数、指数函数等.

在直角坐标系中,运动质点的坐标值 x,y,z 随着时间变化,即 x,y,z 是时间的函数,以数学的语言表达为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-6}$$

或者写为标量式

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{array}\right\} \tag{1-7}$$

式(1-7)为运动函数在直角坐标系中的标量形式.

同理,在平面极坐标系中,运动函数的标量式为

$$r=r(t), \quad \theta=\theta(t) \tag{1-8}$$

如果我们有了运动函数,就知道了物体位置随时间变化的函数关系. 从运动函数的标量形式出发,消掉时间 t,可以得到物体的轨道方程. 例如,由式(1-7)消掉时间 t,可以得到关于坐标间关系的方程,也就是轨道方程 $f(x,y,z)=0$. 下面还会学到,根据运动函数,还可以求得质点的位移、速度、加速度等量,从而了解物体的运动状态. 在质点运动学中,运动函数对于了解质点运

动是非常重要的.

2. 位移矢量

质点在运动过程中,位置会发生变化,为了描述质点位置的改变,引入位移矢量. 在图 1-3 中,曲线 AB 为质点的运动轨道. 设 t 时刻,质点位于 AB 曲线上的 P_1 点,质点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t)$,经过时间间隔 Δt 后,在 $t+\Delta t$ 时刻,质点运动到轨道的 P_2 点处,位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. 从 P_1 点向 P_2 点引有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$,定义 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 这个矢量为质点在 Δt 时间间隔内的位移,记为 $\Delta\boldsymbol{r}$. 根据矢量运算法则,由图 1-3 可以看出,t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔内质点的位移等于 $t+\Delta t$ 时刻的位矢与 t 时刻位矢的矢量差,即质点在一段时间间隔内的位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为从起点到终点的有向线段,它等于终点的位置矢量减去起点的位置矢量.

位移

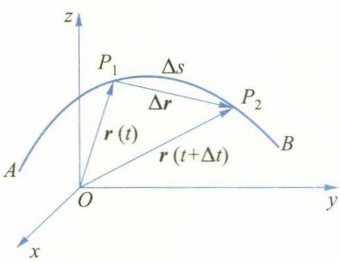

图 1-3 质点的位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-9}$$

位移矢量表示出了物体在 Δt 时间间隔内位置的变化情况. 位移矢量的大小,以 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 表示,给出了质点的终点与起点间的距离;位移的方向则确定了终点相对于起点的方位.

路程也被用来描述物体位置的变化. 路程是质点在空间运动过的实际路径的长度,它是一个标量,我们将物体在 Δt 时间间隔的路程记为 Δs. 位移描述的是物体位置的改变,不是物体通过的实际路程. 一般情况下,即使是位移的大小也与路程不相等. 图 1-3 中物体从 P_1 运动到 P_2 所经过的路程是 P_1、P_2 间曲线的长度,而位移的大小是 P_1、P_2 间直线段的长度,两者并不相等. 但是,如果我们考虑的是无限小的时间间隔,也就是令 Δt 趋近于零,P_2 点无限地接近 P_1 点,那么 P_1、P_2 两点间的曲线趋近于直线,于是有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$,即无限小位移的大小与无限小路程的值相等.

在国际单位制中,位移的单位是米(m).

1.1.2 速度

不同的物体在相同时间间隔内位置的变化情况一般是不同的. 蜗牛每秒钟爬行距离约为 1 mm,而赛车每秒钟可行驶 100 m,上海磁悬浮列车的时速可以达到 430 km/h. 为了描述物体位置对时间的变化情况,需要引入速度的概念.

1. 平均速度

设质点在 Δt 时间间隔内发生的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$,为了描述质点在这段时间内运动的快慢情况,定义位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与相应时间间隔 Δt 的比值为平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$,数学表达式为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-10}$$

由定义看出，平均速度是矢量，方向与位移的方向一致；大小为 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与时间间隔 Δt 的比值．这里要注意 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr 的区别．Δr 是位置矢量长度的增量，即

$$\Delta r=r(t+\Delta t)-r(t)$$

而 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 是位移的大小，

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|$$

$|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr，这两者是不同的物理量，很容易被混淆．

2. 瞬时速度

平均速度只能粗略地给出质点在一段时间间隔内运动的快慢情况．我们往往需要知道质点在某个时刻运动的快慢，为此引入了物理量瞬时速度．

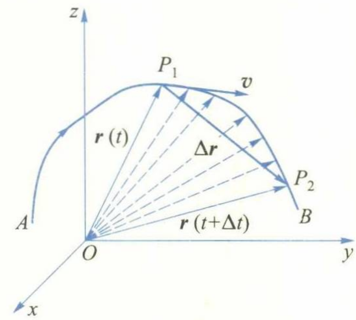

图 1-4 质点的速度

图中的曲线 AB 为质点的运动轨道，速度沿质点运动轨道的切线方向．

图 1-4 中，设质点沿曲线 AB 从 A 向 B 运动，t 时刻质点位于 P_1 点，$t+\Delta t$ 时刻质点位于 P_2 点．如何描述质点在 t 时刻运动的快慢呢？定义了平均速度后，很容易想到，可以取较短的时间间隔．时间间隔越短，P_2 点越接近 P_1 点，这段时间间隔内的平均速度越能反映出质点在 P_1 点时运动的快慢．如果令时间间隔 Δt 趋近于零，那么就可以认为此条件下的平均速度，精确地表示出了质点在 t 时刻运动的快慢，并由此得到瞬时速度的概念．

速度

定义瞬时速度，简称速度，等于平均速度在时间间隔 Δt 趋近于零时的极限，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\boldsymbol{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

由定义可知，速度是矢量，它等于位置矢量对时间的一阶导数，即位置矢量对时间的变化率．借助速度，可以精确地描述质点在某时刻 t 运动的快慢和方向．

在国际单位制中，速度的单位是 m/s．

根据速度的定义，速度的方向是平均速度在 Δt 趋近于零时的方向．图 1-4 中，若 P_2 点无限地接近 P_1 点，那么位移的方向趋近于轨道 AB 在 P_1 点的切线方向．因此，质点在轨道上某点的速度方向为：沿轨道在该点的切线方向，指向运动的前方．一旦我们知道运动轨道，就可以找到速度的方向．若翻滚过山车在竖直面内做半径较大的圆周运动，将车视为质点，那么车在某处的速度沿圆轨道在该点的切线方向，垂直于此处的半径．

速度的大小用 v 表示，称为速率．

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-12}$$

式中，ds 是在 dt 时间间隔内运动过的路程，质点的速率表示了它在某个瞬时运动的快慢.

在直角坐标系中，速度的表达式为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-13}$$

其中

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1-14}$$

v_x、v_y、v_z分别是速度沿着 x、y、z 轴的三个分量．直角坐标系中，速率为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1-15}$$

速度等于位置矢量对时间的一阶导数．要注意矢量与标量遵循不同的运算法则，因此矢量的微分与标量的微分是不完全相同的．对矢量的微分不仅要考虑这个矢量大小的变化，还要考虑其方向的变化．在利用平面极坐标系讨论的速度时，我们会对这一点看得更加清楚.

在平面极坐标系中，位置矢量的数学表达式为 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，由速度的定义和求导的法则，得到

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} \tag{1-16}$$

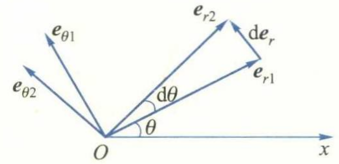

图 1-5　平面极坐标系中单位矢量的微分

尽管单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$大小保持不变，但是它的方向是可能随时间变化的．如何得到 $\boldsymbol{e}_r$对时间的变化率呢？设 $\boldsymbol{e}_{r1}$为 t 时刻的径向单位矢量，考虑一个无限小的时间间隔 dt，$\boldsymbol{e}_{r2}$为 $t+dt$ 时刻的径向单位矢量，$\boldsymbol{e}_{\theta1}$ 和 $\boldsymbol{e}_{\theta2}$ 相应地分别为初态和末态的横向单位矢量，如图 1-5 所示．图 1-5 中，$\boldsymbol{e}_{r2}$和 $\boldsymbol{e}_{r1}$及其它们的增量 $d\boldsymbol{e}_r$构成一等腰三角形，顶角为辐角的无限小增量 $d\theta$. 在这个等腰三角形中，$\boldsymbol{e}_{r2}$和 $\boldsymbol{e}_{r1}$的长度均为单位长度，顶角趋于零，所以底边长趋于 $d\theta$. 对于无限小的时间间隔 dt，$d\theta$ 为无限小量，故 $d\boldsymbol{e}_r$的方向垂直于 $\boldsymbol{e}_r$，平行于 $\boldsymbol{e}_\theta$，综合大小和方向写出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1-17}$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r \tag{1-18}$$

即 $\boldsymbol{e}_\theta$ 对时间的变化率与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 垂直，平行于 $\boldsymbol{e}_r$. 将式(1-17)代入到式(1-16)，得到平面极坐标系中速度的解析表达式为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1-19}$$