

世界著名 科学家传记

数学家 III

吴文俊 主编

科学出版社

世界著名科学家传记

数学家

III

吴文俊 主编

科学出版社

1992

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

《世界著名科学家传记·数学家》将分六集出版,收入世界最著名的数学家的传记 100 余篇。这是第三集。本集收入世界著名数学家如费马、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨等的传记 20 篇。作者在进行深入研究的基础上,对这些科学家的生平、学术活动、主要贡献和代表作,予以全面、具体、准确的记述,并指明参考文献,即通过介绍科学家的学术生涯,向读者提供有关科学史的实用而可靠的资料。读者不但可以从中了解到这些第一流科学家最深刻的研究工作、杰出成就和对科学发展的重大影响,而且还可以看到他们的成长道路、成功经验和思想品格,从而受到深刻的启迪。

世界著名科学家传记

数 学 家

III

吴文俊 主编

责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992年5月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1992年5月第一次印刷 印张:9 3/8

印数:1—3 600 字数:243 000

ISBN 7-03-002458-3/O · 459

定价:8.20 元

《科学家传记大辞典》

数学学科编委会

主 编 吴文俊

副主编 梁宗巨 李文林 邓东皋

编 委 孙小礼 沈永欢 周民强 张奠宙
袁向东

前 言

在中国科学院的领导下，科学出版社正在组织我国专家编纂一部大型的科学家传记辞典，计划收入古今中外重要科学家（包括数学家、物理学家、天文学家、化学家、生物学家、医学家、地质学家、地理学家、以及技术科学家即发明家和工程师等）的传记约8000篇，字数估计为2000万。辞典将对所收科学家的生平、学术活动、主要贡献和代表作，予以全面、具体、简洁、准确的记述，并附文献目录；即通过介绍科学家的学术生涯，向读者提供有关科学史的实用而可靠的资料，特别是那些第一流科学家的最深入的研究工作和成功经验。其中将以足够的篇幅介绍我国古代和现代科学家的重大成就，以及他们为发展祖国的科学事业，不惧险阻，勇攀高峰的精神，以激励青年一代奋发图强，献身“四化”。这就是编纂这部《科学家传记大辞典》的基本目的。

大辞典总编委会由各科学领域的60余位著名学者组成，卢嘉锡同志担任主编，严东生、周光召、吴文俊、王绶琯、涂光炽、吴阶平、苏世生等同志担任副主编。1988年8月，在北京召开了总编委会第一次会议，讨论了大辞典的编纂方针，制定了“编写条例”。各学科的编委会也已相继成立。在总编委会和各学科编委会的领导和组织下，编纂工作已全面展开。科学出版社设立了《科学家传记大辞典》编辑组，负责大辞典的编辑组织工作。

对于外国科学家，各学科编委会已分别确定第一批撰稿的最重要的科学家名单，共约800人，并已约请有关专家分头执笔撰稿。在大辞典出版之前，按不同学科，定稿每达20—30篇，就以《世界著名科学家传记》文集的形式及时发表。这些传记是在进行深入研究的基础上撰写的，又经过比较严格的审核，因而已具有较高的学术水平和参考价值。发表后广泛听取意见，以便将来收

人大辞典时进行必要的修改。

由于这部大辞典是我国编辑的，因而中国科学家辞条占重要地位，将下大功夫认真撰写。关于中国古代(19世纪以前)科学家的传记，计划收入200余篇，已委托中国科学院自然科学史研究所的专家组织撰写；中国现代科学家的传记，计划收入500余篇，正在由各学科编委会组织撰写。

编纂这部《科学家传记大辞典》，是我国科学文化方面的一项具有重大意义的基本建设；国家新闻出版署已将其列入国家重点辞书规划。这项工作得到了我国学术界的广泛支持。已有许多学者、专家热情地参加工作。他们认为，我国学术界对于科学史研究的兴趣正在与日俱增，只要充分调动中国科学院、各高等院校、各学术团体的力量，认真进行组织，花费若干年的时间，是完全可以编好这部辞典的。他们还认为，组织编写这部辞典，对于科学史的学术研究也是一个极大的促进。在编写过程中，对于尚未掌握的材料，还不清楚的问题，必须进行深入的研究，以任务促科研，有了成果，自然容易写出好文章。

编纂这样一部大型的辞典，涉及面广，要求质量高，工作量很大。这里，我们热切地希望有更多的、热心这项事业的学者、专家参加工作，承担撰稿和审稿任务。

我们热烈欢迎广大读者对我们的工作提出宝贵意见。

《科学家传记大辞典》编辑组

目 录

丹尼尔·伯努利·····	全素勤	许义夫 (1)
雅格布·伯努利·····	全素勤	许义夫 (12)
约翰·伯努利·····	全素勤	许义夫 (23)
切比雪夫·····	刘 钝	苏 淳 (33)
戴德金·····		胡作玄 (44)
笛卡儿·····		袁向东 (55)
费马·····	李心灿	王武保 (75)
傅里叶·····	郭敦仁	孙小礼 (91)
哥德尔·····		张锦文 (102)
雅可比·····		井竹君 (120)
科瓦列夫斯卡娅·····		杜瑞芝 (127)
库默尔·····		冯绪宁 (140)
拉格朗日·····		易照华 (144)
莱布尼茨·····	孙小礼	张祖贵 (163)
李·····		许以超 (198)
罗巴切夫斯基·····		杜瑞芝 (204)
蒙日·····		赵肇襄 (219)
牛顿·····	李文林	(228)
施泰纳·····		方茂炽 (270)
泰勒·····		朱学贤 (282)

丹尼尔·伯努利

仝 素 勤 许 义 夫

(曲阜师范大学)

伯努利, D. (Bernoulli, Daniel) 1700年2月8日生于荷兰格罗宁根; 1782年3月17日卒于瑞士巴塞尔。数学、物理学、医学。

丹尼尔·伯努利 (Daniel Bernoulli) 是著名的伯努利家族中最杰出的一位,他是约翰·伯努利 (Johann Bernoulli) 的第二个儿子。丹尼尔出生时,他的父亲约翰正在格罗宁根担任数学教授。1713年丹尼尔开始学习哲学和逻辑学,并在1715年获得学士学位,1716年获得艺术硕士学位。在这期间,他的父亲,特别是他的哥哥尼古拉·伯努利第二 (Nikolaus Bernoulli II, 1695—1726) 教他学习数学,使他受到了数学家庭的熏陶。他的父亲试图要他去当商业学徒,谋一个经商的职业,但是这个想法失败了。于是又让他学医,起初在巴塞尔,1718年到了海德堡,1719年到施特拉斯堡,在1720年他又回到了巴塞尔。1721年通过论文答辩,获得医学博士学位。他的论文题目是“呼吸的作用” (De respiratione)。同年他申请所空缺的解剖学和植物学教授,但没有成功。1723年,丹尼尔到威尼斯旅行,1724年他在威尼斯发表了他的《数学练习》 (Exercitationes mathematicae), 引起许多人的注意,并被邀请到彼得堡科学院工作。1725年他回到巴塞尔。之后他又与哥哥尼古拉第二一起接受了彼得堡科学院的邀请,到彼得堡科学院工作。在彼得堡的8年间 (1725—1733), 他被任命为生理学院士和数学院士。1727年他与 L. 欧拉 (Euler) 一起工作,起初欧拉作为丹尼尔的助手,后来接替了丹尼尔的数学院士职位。这期间丹尼尔讲授

医学、力学、物理学，做出了许多显露他富有创造性才能的工作。但是，由于哥哥尼古拉第二的暴死以及严酷的天气等原因，1733年他回到了巴塞尔。在巴塞尔他先任解剖学和植物学教授，1743年成为生理学教授，1750年成为物理学教授，而且在1750—1777年间他还任哲学教授。

1733年丹尼尔离开彼得堡之后，就开始了与欧拉之间的最受人称颂的科学通信，在通信中，丹尼尔向欧拉提供最重要的科学信息，欧拉运用杰出的分析才能和丰富的工作经验，给以最迅速的帮助，他们先后通信40年，最重要的通信是在1734—1750年间，他们是最亲密的朋友，也是竞争的对手。丹尼尔还同C. 哥德巴赫(Goldbach)等数学家进行学术通信。

丹尼尔的学术著作非常丰富，他的全部数学和力学著作、论文超过80种。1738年他出版了一生中最重要的著作《流体动力学》(Hydrodynamica)。1725—1757年的30多年间他曾因天文学(1734)、地球引力(1728)、潮汐(1740)、磁学(1743, 1746)洋流(1748)、船体航行的稳定(1753, 1757)和振动理论(1747)等成果，获得了巴黎科学院的10次以上的奖赏。特别是1734年，他与父亲约翰以“行星轨道与太阳赤道不同交角的原因”(Quelle est la cause physique de l'inclinaison des plans des orbites des planètes par rapport au plan de l'équateur de la révolution du soleil autour de son axe, 1734)的佳作，获得了巴黎科学院的双倍奖金。丹尼尔获奖的次数可以和著名的数学家欧拉相比，因而受到了欧洲学者们的爱戴，1747年他成为柏林科学院成员，1748年成为巴黎科学院成员，1750年被选为英国皇家学会会员，他还是波伦亚(意大利)、伯尔尼(瑞士)、都灵(意大利)、苏黎世(瑞士)和慕尼黑(德国)等科学院或科学协会的会员，在他有生之年，还一直保留着彼得堡科学院院士的称号。

丹尼尔·伯努利的研究领域极为广泛，他的工作几乎对当时的数学和物理学的研究前沿的问题都有所涉及。在纯数学方面，他

的工作涉及到代数、微积分、级数理论、微分方程、概率论等方面,但是他最出色的工作是将微积分、微分方程应用到物理学,研究流体问题、物体振动和摆动问题,他被推崇为数学物理方法的奠基人。

数学 1724年丹尼尔·伯努利在意大利撰写医学著作期间,发表了《数学练习》,内容涉及法洛(faro)游戏¹⁾、流体问题、里卡蒂(Riccati)微分方程和由两个弧组成的半月形问题。在《练习》的第一部分,他借助于级数获得了代数方程数值解的近似值。丹尼尔提出循环级数,并将这些级数应用到求代数方程的根的近似计算中去。为了达到这个目的,他将分式 $\frac{a + bz + cz^2 + \cdots + rz^m}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \cdots - \sigma z^n}$ 分解成部分分式,然后展成为幂级数,对于单根 $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \cdots$, 该级数的一般项及随后一项为:

$$P = (Ap^n + Bq^n + \cdots)z^n,$$

$$Q = (Ap^{n+1} + Bq^{n+1} + \cdots)z^{n+1}.$$

若 p 比 q 大得多,那么对充分大的 n , P 可由 Ap^n 近似得到, Q 可由 Ap^{n+1} 近似得到,因此最小的根 $\frac{1}{p}$ 可由 $\frac{P}{Q}$ 近似得到。以

后他还将这种方法应用到无穷幂级数中去。

在级数理论方面,丹尼尔主要研究了正弦级数和余弦级数,他曾给出过像

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$+ \frac{1}{4} \sin 4x + \cdots,$$

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$- \frac{1}{4} \sin 4x + \cdots,$$

1) 一种赌博游戏,参赌者一次从牌盒中抽出一张牌,每两次抽牌为一局,确定输赢后即重下赌注。

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x \\ + \frac{1}{16}\cos 4x - \dots$$

的一类表达式，他认为级数只在 x 的某些区间上表示这些函数。

在《数学练习》这部著作中，他还针对 1724 年《教师学报》(Acta eruditorum) 上发表的意大利人 J. 里卡蒂(Riccati) 提出的“里卡蒂方程”，拟定了解决的方案。里卡蒂方程为

$$\frac{dy}{dx} = A + By + Cy^2,$$

其中 A, B, C 是 x 的函数。这是一个具有重要意义的非线性方程，因为它与二阶线性方程密切相关。对于里卡蒂方程的特殊形式

$$ax^ndx + y^2dx = bdy,$$

丹尼尔指出，当 $n = -4c/(2c \pm 1)$ 时，可用分离变量法求解。这里 c 可取全部整数，包括正、负整数和零。这个方法他发表在 1724 年的《教师学报》上。对于这个方程，里卡蒂本人及约翰·伯努利、尼古拉·伯努利第一和尼古拉·伯努利第二都各自独立地给出了解答。

丹尼尔在概率论和人口统计方面做出了重大贡献。早在《数学练习》这部著作中，就已经显露出他对概率问题的兴趣。在彼得堡期间他又认真地研究了这方面的问题，发表了有影响的、有重大价值的论文“关于度量的分类”(De mensura sortis)。在这篇论文中他探讨了资本利润的计算，提出了政治经济学中新型价值理论的数学表述。他研究了财产增值与道德值之间的关系。特别提出，若一个人获得利润 $g_1, g_2, g_3, \dots$ 的机会是 $P_1, P_2, P_3, \dots$ ，这里 $P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 1$ ，那么利润道德值的平均值为

$$bp_1 \log a(a + g_1) + bp_2 \log a(a + g_2) + \dots = b \log a,$$

且道德期望为

$$H = (a + g_1)^{P_1}(a + g_2)^{P_2} \dots = a.$$

若利润与此人的原有资产比较是很小的，那么道德期望转化成

为数学期望

$$H = P_1 g_1 + P_2 g_2 + \cdots.$$

紧接着,丹尼尔又将这一研究应用到风险保险业和解决由他哥哥尼古拉第二提出的“彼得堡赌博悖论”.甲先付给乙一笔赌注,然后甲扔硬币,只要第一次出现了正面朝上,赌博就结束,此时乙必须付给甲 2^{n-1} 元,其中 n 表示在第 n 次扔硬币时,首次出现了正面朝上.现在要问:甲预付给乙的赌注应为多少才算公正.根据概率知识,这笔赌注应等于甲将获得的期望值,但是计算一下,这个期望值应等于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

这就出现了赌博悖论.当时许多人都研究过这个悖论,但没有得出满意的结果.丹尼尔主张用所谓“有节制的道德期望”代替计算结果为无穷大的数学期望来解决这个矛盾.

丹尼尔 1760 年又研究了一类医学统计问题,这类问题涉及在各不同年龄组中天花病的死亡率.运用微分方程,丹尼尔计算出有关的数值表,其数据在 24 年中是有效的.由丹尼尔提出的已知某些结果的条件,在这些条件下推测出未知原因的逆概率问题,有特别重要的应用价值.这类问题以后由 T. 贝叶斯 (Bayes) 等人发展了.丹尼尔还将概率论应用于人口统计,探讨了误差理论,提出了正态分布误差理论,并用这一理论将观察误差分为偶然的和系统的两类,发表了第一个正态分布表,使误差理论更接近现代概念.

丹尼尔在研究由椭圆积分产生的一类新的超越函数中,也曾经提出过插值问题;在对偏微分方程解的研究中,丹尼尔引入了某些函数的级数展开式,将他高超的数学技巧应用到了关于弦的振动、悬垂链的摆动及用空气发声的乐器频率的研究中,提出了有创造性的预见.

物理学 18 世纪,由于几类物理问题的研究,促进了微分方程理论的发展,其中很重要的就是弹性问题.自 1728 年,丹尼尔

和欧拉就致力于柔性物体和弹性物体的力学研究。他们研究过一端固定的水平弹性带的曲率的确定。由于重物 P 作用在自由端, 而它自身的重力 p 作用在其重心上, 均匀弹性带绕 s 点的总力矩与曲率半径 R 的关系, 丹尼尔·伯努利用以下方程表示

$$Px + \frac{p}{L} \int s dx = \frac{m}{R}.$$

式中 s 是弧长, x 为从自由端处取的横坐标, m 为弯曲模量, L 是长, R 为曲率半径。

在 1733 年, 丹尼尔离开彼得堡之前, 发表了论文“关于用柔软细绳联结起来的一些物体以及垂直悬挂的链线的振动定理”(Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae), 在这篇论文中, 他指出上端固定的悬挂链线, 本身没有重量, 但带等间隔的重荷。当链线振动时, 质点系相对于通过悬挂点的垂线作不同模式的小振动, 这些模式中的每一个有各自的特征频率, 当有 n 个负荷时, 整个系统有 n 个不同的带有一个特征频率的主要模式。他发现, 对于一个均匀的, 长度为 L 的自由悬挂链线, 从最低点算起, 相距 x 处的位移为 y , 它满足方程

$$\alpha \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + y = 0.$$

用现代记法, $y = AJ_0 \left(2 \sqrt{\frac{x}{\alpha}} \right)$, 这里 α 满足方程

$$J_0 \left(2 \sqrt{\frac{L}{\alpha}} \right) = 0,$$

J_0 是第一类零阶贝塞尔(Bessel)函数。他指出, α 表征振动模式和特征频率。此方程有无穷多个实根, 因此这个链线可以表现出有频率 $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$ 的无穷多个简谐振动。这个原理, 等价于以后的达朗贝尔(d'Alembert)原理。在此基础上, 他又讨论了非均匀

厚度的振动链,他引进了微分方程

$$\alpha \frac{d}{dx} \left(g(x) \frac{dy}{dx} \right) + y \frac{dg(x)}{dx} = 0,$$

式中 $g(x)$ 是链线的重量分布. 对于 $g(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2$ 的情况, 他给出了一个级数解

$$y = 2A \left(\frac{2x}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} J_1 \left(2\sqrt{\frac{2x}{\alpha}}\right),$$

式中 α 满足 $J_1 \left(2\sqrt{\frac{2L}{\alpha}}\right) = 0$, J_1 是第一类一阶贝塞尔函数.

在 1741—1743 年间,丹尼尔又研究了关于弹性弦的横向振动问题. 在论文“弹性振动的叠加”(De vibrationibus et sono laminarum elasticarum) 中,他研究了一端钉在竖直墙上的长度为 L 的水平棒的振动. 实际上,早在 1734 年他就开始了这方面的研究,他导出了一个四阶方程

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{y}{f^4}, \text{ 即 } y = f^4 \frac{d^4 y}{dx^4},$$

这里 $f^4 = \frac{m^4 L}{g}$ 为一常数, x 是棒上距自由端的距离, y 是棒在 x 处的振幅.

18 世纪中叶,丹尼尔·伯努利、欧拉、约翰·伯努利、达朗贝尔等人对弦振动和杆振动的研究已经导出了一阶、二阶或更高阶的微分方程,如果把引起弹性振动的惯性力考虑进去,就可以得出弹性体的动力学的基本方程,从这个基本方程出发,可以得出各种情况下的波动方程,欧拉和达朗贝尔就是用偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

来表示弦振动的波动方程. 但是丹尼尔却以完全不同的形式即用函数的级数展开式给出弦振动问题的解,从而引起了在丹尼尔、欧拉与达朗贝尔之间的关于弦振动可允许的解的争论,后来 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也参加了这种争论.

早在 1733 年前的论文中,丹尼尔就明确地说明振动的弦能有较高的振动模式.在 1741—1743 年的振动杆的横向振动的论文中,他又明确地说明了简单振动(基音)和叠合振动(高次谐音)可以同时存在.但是这些思想都是从物理学上加以理解,而没有从数学上加以描述.当他看到欧拉和达朗贝尔的波动方程并给出它的解时,他在 1753 年又发表文章,断言:振动弦的许多模式(简单的和叠加的)能够同时存在.假定长度为 a 的弦,从单一的振动

$$y = a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n \text{ 为任意整数})$$

出发,它的全部振动可用一个级数形式表示

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi ct}{a}.$$

因此他认为这个振动是第一基音、第二谐音、第三谐音……的一切可能的简谐振动的一个叠合.丹尼尔的这个观点是非常重要的,因为他首次提出了将问题的解表示为三角级数的形式,这为将一个函数展为傅里叶(Fourier)级数的纯数学问题奠定了物理基础,促进了分析学的发展.欧拉赞同丹尼尔的关于许多模式能够同时存在,使得一个振动中的弦能发出许多谐音的观点,但是又和达朗贝尔一起反对丹尼尔关于在弦振动中全部可能的初始曲线能表示成为正弦级数的主张.丹尼尔坚持认为有足够多的常数 a_n 使级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

适合任一曲线,但他缺乏充分的数学论证,

争论长达十几年之久.实际上,这涉及到能用正弦级数表示的函数类的宽窄,直到 1773 年争论已经过去,丹尼尔自己也才认识到这个问题.

正当弦振动问题研究还在进行时,丹尼尔又研究了声音在空气中的传播问题.1762 年,丹尼尔发表一篇关于在琴管内(圆柱形管)空气振动的论述,发现了风琴管泛音的频率是基音频率的奇数倍的定理.这篇论文也首次创立了锥形管发声乐器的理论,提出了无穷长锥形管的泛音与基音是和谐的.他通过物理实验证实了他

的结论。丹尼尔还研究了不均匀弦的振动,首次解决了从密度分布确定振动弦的频率的振动逆问题;研究了由不同密度和不同长度组成的弦的振动的特殊情况;比较了一个物体挂在柔性链的摆动与绕一固定点的振动这两种情形;1774年还完善了他的关于振动的叠加原理。总之,丹尼尔在弹性振动力学中做出了很大的贡献。

丹尼尔除了对刚体振动,柔性物体和弹性物体的力学研究外,还对刚体的旋转运动,固体在对抗媒质中的运动,以及摩擦力问题及“活力”(live force,即动能)守恒问题都分别进行了探讨,先后发表论文10多篇。他也探讨了作用到海船上的风力所产生的结果,以及在海洋中减少船只的横摆和纵摆的稳定性问题,把欧拉研究的关于船的自由振动问题扩充到受迫振动的情况。在天体力学上,他和欧拉等人研究了太阳与潮汐、月亮与潮汐之间的由于引力影响而产生的平衡理论;和他的父亲约翰共同研究了朝向太阳赤道的行星轨道的倾角增加的原因。

丹尼尔还和他的弟弟约翰·伯努利第二(Johann Bernoulli II, 1710—1790)试图建立关于磁学的理论,1743年,他提出了通过改进罗盘结构,减少罗盘倾角误差的意见。

丹尼尔在物理学上的成就,以流体力学最为突出。1738年,出版了他的名著《流体动力学》,这本书的出版,开创了“流体力学”这门学科。书中汇集了他在这方面的研究成果。

《流体动力学》一书共有13章。这部著作开头就展现了关于水力学历史以及对流体静力学的简短的描述,紧接着他用流体的压强、密度和流速作为描写流体的基本物理量,他认真研究了流体流入和流出的水平面变化情况,考察了流体束的初始过程(非静态流)和流束受阻情况,给出了揭示三者之间关系的“伯努利方程”。丹尼尔从实例入手,设一个平放的水管道,管内壁的压力为 P ,接通一个充水的非常宽的容器,让水从管道以速度 v 流出,若 z 为容器中水表面到管道口间的距离,他推得方程

$$P + z + v^2 = A = \text{常数}.$$

由于丹尼尔的特有的测量方法,这个公式中的常数有其特定的数

值。对于密度均匀的水沿着高度 z 有变化的管道中的定常流的伯努利方程为

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \text{常数},$$

此处 v 为水流速度, P 为大气压力, ρ 为水的密度, gh 为重力势能。伯努利方程可由无旋的、无粘性的流体作定常流运动时的欧拉方程

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 = G - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

沿任意曲线积分得出。伯努利方程不仅对液体(如水)的定常流的运动是成立的,而且对于在高压下自小孔喷出的气体,其运动也可以看作是定常的无旋流动,因此伯努利-欧拉方程也是成立的。

在这本著作中,丹尼尔也专门讨论了“弹性流体”即气体的特性及运动,他提出了“流体由于速度增大,而使压力减小”的观点。通过实验证明了分子对器壁的碰撞,并以此解释压强和气体的某些常数,也指出了分子的无规则运动,以及随着温度的增高,气体的压强和运动增加的事实,从而奠定了“气体动力学(分子运动论)”和热力学的理论基础。丹尼尔在这部著作中还讨论了流束受阻的反作用力的计算及对作用物体表面的压力的测定问题。

丹尼尔在流体力学中建立的“伯努利方程”及“内压”概念是有漏洞的,他的父亲约翰和欧拉在这方面作了改进。

丹尼尔·伯努利不仅在数学上和物理学上取得了许多成就,而且在医学领域里也有研究成果。1721年,他的博士论文就是关于呼吸力学的综合理论;1728年,他发表了关于肌肉收缩的力学理论的论文,他提出了心脏所作机械功的计算方法;在生理学上,他提出“极大工作”的概念,即一个人在一段持续的时间内(如一个工作日)所能做的工作量。由于他在数学上的兴趣远比医学大,因此他虽然起初成了一名外科大夫,但最终还是转向了数学和力学

丹尼尔·伯努利头脑机敏和富有想象力,他是第一个把牛顿和