物理中的张量

孙志铭 编

北京师范大学出版社

物理中的张量

孙志铭 编

北京师范大学出版社

物理中的张量

孙志铭　编

•

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北涿县范阳印刷厂印刷

•

开本：850×1168　1/32　印张：6.75　字数：163千

1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷

印数：1—8,500

统一书号：13243·74　定价：1.60元

前　言

近几年，由于理论和实践的需要，不少理工科的专业、系科都开设了有关张量分析知识的选修课；但至今尚缺少非数学专业读者阅读的有关教材或参考书．基于此，本人根据为北京师范大学物理系近几年开设“张量分析”选修课的讲义，经过修改整理，编成此书，以供物理专业的师生及其他科技工作者参考使用．

本书主要是根据物理学的需要，并尽可能照顾到张量分析这一数学分支本身的系统性进行选材和编排的，而没有完全按数学的系统性和完整性详尽无遗地编排章节．考虑到多数读者的数学修养（如可能不具备黎曼几何的系统知识），以及主要的目的在于掌握张量分析这个数学工具，故将某些繁难的推导、证明省略或从简，代之以深入浅出的阐述、说明、验证等等．这样在数学的严密性上虽感不足，但读者会感到易读易懂，只要具备普通微积分的基础，不必补修其他数学知识，便能尽快地掌握张量分析这一工具．书中尽量选取结合物理学的例题，在各章后又辟专节对张量在物理学中的应用做了典型介绍，并有相应的习题，使读者能反复练习，以达到掌握基本原理及熟练应用的目的．

在编写本书过程中曾得到北京师范大学数学系刘继志同志的大力帮助；苏州大学蔡铭之教授，北京师范大学物理系吕烈扬教授、李平副教授也给予热情关心并多次指导．在编写过程中还参考了北京大学杜珣副教授、河北师范大学周季生老师的讲义，并从齐齐哈尔师范学院张允中老师的讲义、佳木斯师范专科学校李文博老师的译文中选取了部分例题和习题．在此一并表示感谢．

由于本人水平有限，教学经验不足，书中一定有不少缺点和错误，恳切希望读者批评、指正．

编　者

内容简介

这是一本为高等学校物理专业写的介绍张量分析知识的书．内容分为笛卡尔张量、张量的普遍定义及代数运算、协变微分、曲率张量几部分．编写中着重于物理中所用的张量知识，在此基础上力求数学上的系统性，以深入浅出的阐述、说明、验证代替某些繁难的数学推导和证明，使得只具备普通微积分知识的读者便可读懂．

这是对物理专业师生很有用的一本书，可做为教材或参考书；其他用到这方面知识的理工科学生也可以参考使用．

目　　录

第一章　笛卡尔张量

本章讨论欧氏空间内，在笛卡尔直角坐标系间变换的张量理论．这是最简单、最常用的．为叙述方便，以三维空间为代表，所得定义、定理、计算方法均可应用到 n 维欧氏空间．当应用到 n 维欧氏空间时哑指标、自由指标取值为 1、2、3、…、n．这一原则下面不再重述．

§1-1　预 备 知 识

由坐标原点与三条不共面的标架直线构成的坐标系称为直线坐标系．在直线坐标系中，如果各标架上单位尺度取的不同，称为仿射坐标系；如果单位尺度取的相同，则称为笛卡尔坐标系．在笛卡尔坐标系中，如果标架直线互相垂直，称为笛卡尔直角坐标系，否则称为笛卡尔斜角坐标系．

以 x_i，$i=1,2,3$ 表示笛卡尔直角坐标系的坐标，$\boldsymbol{i}_1$ $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ 分别表示三个坐标单位矢量．

一、约定求和法

如果在同一项中，某个指标重复出现两次，就表示要对这个指标从 1 到 3 求和．例如在 A_iB_i 中，指标 i 重复出现两次，其含意是：

$$A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{1-1-1}$$

i 称为约定求和指标．约定求和指标在展开式中不再出现，因此也称为“哑指标”．显然哑指标的字母可以更换，因为 A_iB_i 与 A_jB_j 的含意是相同的．

例1 $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$

例2 写出 $A_{ij}B_{ij}$ 的展开式.

在上式中 i 和 j 都是哑指标，展开式如下

$$A_{ij}B_{ij}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{12}+A_{13}B_{13}+A_{21}B_{21}+A_{22}B_{22}$$
$$+A_{23}B_{23}+A_{31}B_{31}+A_{32}B_{32}+A_{33}B_{33}$$

例3 写出 $A_{ij}B_j$ 的展开式.

在上式中 j 是哑指标，i 不参加约定求和，i 称为自由指标，上式的展开式如下

$$A_{ij}B_j=A_{i1}B_1+A_{i2}B_2+A_{i3}B_3,\quad i=1,2,3$$

全部写出来是

$$A_{1j}B_j=A_{11}B_1+A_{12}B_2+A_{13}B_3$$
$$A_{2j}B_j=A_{21}B_1+A_{22}B_2+A_{23}B_3$$
$$A_{3j}B_j=A_{31}B_1+A_{32}B_2+A_{33}B_3$$

二、克罗尼克尔符号

克罗尼克尔符号 δ_{ij} 定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 当i\neq j\\ 1, & 当i=j\end{cases}\tag{1-1-2}$$

由定义可知

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}$$

例1 在笛卡尔直角坐标系中

$$\boldsymbol{i}_i\cdot\boldsymbol{i}_j=\delta_{ij}$$

例2 单位矩阵可表示成：

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\\delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{pmatrix}=(\delta_{ij})$$

采用约定求和法和克罗尼克尔符号将给我们以后的书写和运算带来很大的方便．我们写出以下几个常用的性质和运算。

1) $\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$ (1-1-3)

2) $\delta_{im}A_m=A_i$ (1-1-4)

3) $\delta_{im}B_{mj}=B_{ij}$ (1-1-5)

4) $\delta_{im}\delta_{mj}=\delta_{ij}$ (1-1-6)

三、置换符号（Levi-Civita符号）$\in_{ijk}$

1. $\in_{ijk}$的定义

$$\in_{ijk}=\begin{cases}0 & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 中有两个相同者}\\ 1 & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 为 } 1,\ 2,\ 3 \text{ 的偶排列}\\ -1 & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 为 } 1,\ 2,\ 3 \text{ 的奇排列}\end{cases}$$

$$i,j,k=1,2,3 \tag{1-1-7}$$

其中 $\in_{123}=\in_{231}=\in_{312}=1$

$\in_{132}=\in_{321}=\in_{213}=-1$

其余21个全部为零.

2. 采用置换符号$\in_{ijk}$可使书写和运算简化

例1 用置换符号表示三阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$=\in_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}=\in_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$$

$$i,j,k=1,2,3$$

例2 用置换符号表示$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$.

借用例1的结果

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\in_{ijk}\boldsymbol{i}_iA_jB_k=\in_{ijk}A_jB_k\boldsymbol{i}_i$$

则 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i=\in_{ijk}A_jB_k$

同样向量$\boldsymbol{u}$的旋度curl $\boldsymbol{u}$采用置换符号可以写成

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}=\in_{ijk}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{i}_i$$

$$(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u})_i=\in_{ijk}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

3. δ_{ij} 和 $\in_{ijk}$ 的关系

1) 根据 δ_{ij} 和 $\in_{ijk}$ 的定义，读者很容易验证下式的正确性

$$\in_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k}\\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k}\\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k}\end{vmatrix} \tag{1-1-8}$$

2) $$\in_{ijk}\in_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k}\\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k}\\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r}\\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r}\\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i}\\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j}\\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r}\\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r}\\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r}\end{vmatrix}$$

根据行列式的乘法，新行列式第一行的第一项应该是

$$\delta_{1i}\delta_{1p}+\delta_{2i}\delta_{2p}+\delta_{3i}\delta_{3p}=\delta_{mi}\delta_{mp}=\delta_{ip}$$

同法可以求新行列式的各项，所以

$$\in_{ijk}\in_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}$$

a) 若 $i=p$，则有

$$\in_{ijk}\in_{pqr}=\in_{ijk}\in_{iqr}$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{ii} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{ji} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{ki} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{ji} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{ki} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&=3\delta_{jq}\delta_{kr}+\delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{ki}+\delta_{ir}\delta_{ji}\delta_{kq}\\
&\quad-\delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{ki}-3\delta_{jr}\delta_{kq}-\delta_{iq}\delta_{ji}\delta_{kr}\\
&=3\delta_{jq}\delta_{kr}+\delta_{qk}\delta_{jr}+\delta_{rj}\delta_{kq}\\
&\quad-\delta_{rk}\delta_{jq}-3\delta_{jr}\delta_{kq}-\delta_{qj}\delta_{kr}\\
&=\delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq}
\end{aligned}
$$

所以 $\in_{ijk}\in_{iqr}=\delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq}$

$$
=\begin{vmatrix}\delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix} \tag{1-1-9}
$$

b) 若 $i=p$，$j=q$ 则有

$$
\begin{aligned}
\in_{ijk}\in_{ijr}&=\delta_{jj}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kj}\\
&=3\delta_{kr}-\delta_{kr}=2\delta_{kr}
\end{aligned} \tag{1-1-10}
$$

c) 若 $i=p$，$j=q$，$k=r$，则有

$$
\in_{ijk}\in_{ijk}=2\delta_{kk}=6 \tag{1-1-11}
$$

例1 求 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})&=A_i(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_i=A_i(\in_{ijk}B_jC_k)\\
&=\in_{ijk}A_iB_jC_k
\end{aligned}
$$

例2 证明

$$
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}
$$

证：因为 $[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_i=\in_{ijk}A_j(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_k$

$$
\begin{aligned}
&=\in_{ijk}A_j\in_{kmn}B_mC_n\\
&=\in_{ijk}\in_{kmn}A_jB_mC_n\\
&=\in_{kij}\in_{kmn}A_jB_mC_n\\
&=(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n\\
&=A_nB_iC_n-A_mB_mC_i\\
&=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})B_i-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_i\\
&=[(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}]_i-[(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}]_i
\end{aligned}
$$

所以 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

§1-2 坐标变换

在不同的坐标系中空间一点的坐标值是不同的，我们关心它们之间的变换关系．本章我们只讨论笛卡尔直角坐标系间的变换关系．

原坐标系为 $Ox_1x_2x_3$，坐标轴的单位向量为 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$，$P$ 点的坐标为 x_i，$i=1,2,3$，从 O 点到 P 点的向径记作 $x_i\boldsymbol{i}_i$．新坐标系为 $Ox'_1x'_2x'_3$，单位向量为 $\boldsymbol{i}'_1,\boldsymbol{i}'_2,\boldsymbol{i}'_3$，$P$ 点在新坐标系中的坐标为 x'_j，$j=1,2,3$，从 O 点到 P 点的向径记作 $x'_j\boldsymbol{i}'_j$．下面求 x'_j 与 x_i 间的变换关系．

令
$$\beta_{ij}=\boldsymbol{i}'_i\cdot\boldsymbol{i}_j \tag{1-2-1}$$
即 β_{ij} 是 Ox'_i 轴与 Ox_j 轴夹角的余弦．九个方向余弦可列表表示（如表 1-2-1）．

表 1-2-1

	x_1	x_2	x_3
x'_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}
x'_2	β_{21}	β_{22}	β_{23}
x'_3	β_{31}	β_{32}	β_{33}

向径可用两个坐标系表示
$$x'_j\boldsymbol{i}'_j=x_j\boldsymbol{i}_j \tag{1-2-2}$$
用 $\boldsymbol{i}'_i$ 点乘（1-2-2）式，得
$$x'_j\boldsymbol{i}'_j\cdot\boldsymbol{i}'_i=x_j\boldsymbol{i}_j\cdot\boldsymbol{i}'_i$$
即
$$x'_j\delta_{ij}=x_j\beta_{ij}$$
所以
$$x'_i=\beta_{ij}x_j,\quad i=1,2,3 \tag{1-2-3}$$
即
$$x'_1=\beta_{11}x_1+\beta_{12}x_2+\beta_{13}x_3$$

$$x_2' = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3$$
$$x_3' = \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3$$

式（1-2-3）表示的坐标变换关系称为正变换，

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \tag{1-2-4}$$

称为正变换系数矩阵.

同理用 $\boldsymbol{i}_i$ 点乘式（1-2-2）式得

$$x_j' \boldsymbol{i}_j' \cdot \boldsymbol{i}_i = x_j \boldsymbol{i}_j \cdot \boldsymbol{i}_i$$

即
$$x_j' \beta_{ji} = x_j \delta_{ij}$$

所以
$$x_i = \beta_{ji} x_j', \quad i = 1, 2, 3 \tag{1-2-5}$$

即
$$x_1 = \beta_{11}x_1' + \beta_{21}x_2' + \beta_{31}x_3'$$
$$x_2 = \beta_{12}x_1' + \beta_{22}x_2' + \beta_{32}x_3'$$
$$x_3 = \beta_{13}x_1' + \beta_{23}x_2' + \beta_{33}x_3'$$

式（1-2-5）表示的坐标变换关系称为逆变换，

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{pmatrix} \tag{1-2-6}$$

称为逆变换系数矩阵. 显然对于笛卡尔直角坐标系，逆变换系数矩阵恰好是正变换系数矩阵的转置矩阵.

如果坐标变换时，坐标原点由 O 移至 O'，位移矢量为 $\boldsymbol{C}$，与前面的做法类似，可得到如下关系

$$x_i' = x_j \beta_{ij} - C_i' \tag{1-2-7}$$
$$x_i = x_j' \beta_{ji} + C_i \tag{1-2-8}$$

其中 C_i' 是 $\boldsymbol{C}$ 在新坐标系中 x_i' 轴上的投影；C_i 是 $\boldsymbol{C}$ 在原坐标系中 x_i 轴上的投影.

由式（1-2-3），（1-2-5）我们可以导出一个很有用的关系式.

因为
$$x_i' = \beta_{ij} x_j, \quad x_j = \beta_{kj} x_k'$$

所以
$$x_i' = \beta_{ij} \beta_{kj} x_k'$$

当 $i=k$ 时，$x'_i=x'_k$，则

$$\beta_{ij}\beta_{kj}=\beta_{i1}^2+\beta_{i2}^2+\beta_{i3}^2=1$$

当 $i\neq k$ 时，必有 $\beta_{ij}\beta_{kj}=0$，则

$$\beta_{ij}\beta_{kj}=\delta_{ik} \tag{1-2-9}$$

同理有 $$x_i=\beta_{ji}x'_j=\beta_{ji}\beta_{jk}x_k$$

当 $i=k$ 时 $$\beta_{ji}\beta_{jk}=\beta_{1i}^2+\beta_{2i}^2+\beta_{3i}^2=1$$

当 $i\neq k$ 时 $$\beta_{ji}\beta_{jk}=0$$

所以 $$\beta_{ji}\beta_{jk}=\delta_{ik} \tag{1-2-10}$$

我們还可以导出

$$\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31}\\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32}\\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1-2-11}$$

即正变换系数矩阵和逆变换系数矩阵之积是单位矩阵．这是笛卡尔直角坐标系间进行坐标变换的标志．因而可以用式（1-2-11）来判断某一坐标变换是否是笛卡尔直角坐标变换．

显然新老坐标系单位向量的变换关系为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_1&=\beta_{11}\boldsymbol{i}'_1+\beta_{21}\boldsymbol{i}'_2+\beta_{31}\boldsymbol{i}'_3\\ \boldsymbol{i}_2&=\beta_{12}\boldsymbol{i}'_1+\beta_{22}\boldsymbol{i}'_2+\beta_{32}\boldsymbol{i}'_3\\ \boldsymbol{i}_3&=\beta_{13}\boldsymbol{i}'_1+\beta_{23}\boldsymbol{i}'_2+\beta_{33}\boldsymbol{i}'_3\end{aligned} \tag{1-2-12}$$

经计算可知，若 $\boldsymbol{i}_i$ 为右旋系，$\boldsymbol{i}'_i$ 也是右旋系，则

$$\boldsymbol{i}_1\cdot(\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_3)=\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31}\\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32}\\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33}\end{vmatrix}=1$$

若 $\boldsymbol{i}_i$ 是右旋系，而 $\boldsymbol{i}'_i$ 是左旋系，则

$$\boldsymbol{i}_1\cdot(\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_3)=\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31}\\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32}\\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33}\end{vmatrix}=-1$$

同样，若 $\boldsymbol{i}_i$ 为左旋系，$\boldsymbol{i}'_i$ 也为左旋系

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 1$$

若 i_i 为左旋系，i'_i 为右旋系

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} = -1$$

所以，当坐标旋转时，坐标变换的系数矩阵

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 1 \qquad (1\text{-}2\text{-}13)$$

当坐标反演时，坐标变换的系数矩阵

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = -1 \qquad (1\text{-}2\text{-}14)$$

§1-3 张量的定义

张量是由满足一定关系的一组元素所组成的整体，元素的个数由空间的维数 N 及张量的阶数 n 决定．我们以 $N=3$ 为代表，给出各阶张量的定义．

一、零阶张量（标量）

零阶张量有 $3^0=1$ 个元素，它是坐标变换下的不变量，即

$$\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

这就是我们熟悉的标量．

二、一阶张量（向量）

如果有 $3^1=3$ 个元素 T_i，$i=1,2,3$，它们随坐标系变化的规律为

$$T'_i = \beta_{ij} T_j, \quad i=1,2,3 \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

或 $$T_i=\beta_{ji}T'_j,\quad i=1,2,3$$

则由这 3 个元素所组成的整体称为一阶张量，记作 $\mathbf{T}$。

$$T_i \qquad i=1,2,3$$

称为 $\mathbf{T}$ 的分量，记作

$$\mathbf{T}=(T_i)=(T_1,T_2,T_3)$$

一阶张量就是我们所熟悉的向量。

三、二阶张量

如果有 $3^2=9$ 个元素，$T_{ij}, i,j=1,2,3$，它们随坐标系的变化规律为

$$T'_{ij}=\beta_{im}\beta_{jn}T_{mn}$$

$$i,j,m,n=1,2,3 \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

或 $$T_{ij}=\beta_{mi}\beta_{nj}T'_{mn}$$

$$i,j,m,n=1,2,3$$

则由这九个元素所组成的整体称为二阶张量，记作 $\mathbf{T}=(T_{ij})$，也可以写成方阵形式

$$\mathbf{T}=(T_{ij})=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

四、n 阶张量

n阶张量 $\mathbf{T}$ 有 3^n 个分量，每个分量有 n 个指标，这些分量随坐标系变化的规律为

$$T'_{i_1 i_2\cdots i_n}=\beta_{i_1 j_1}\beta_{i_2 j_2}\cdots\beta_{i_n j_n}T_{j_1 j_2\cdots j_n} \qquad (1\text{-}3\text{-}5)$$

为了书写简便，我们采用以下记号

$$T_{i_1 i_2\cdots i_n}=T_{i_n}$$

用 $\prod$ 表示连乘，n 个方向余弦连乘可以记为

$$\prod\beta_{i_n j_n}=\beta_{i_1 j_1}\beta_{i_2 j_2}\cdots\beta_{i_n j_n}$$

这样 n 阶张量分量的坐标变换式就可以写成

$$T'_{i_n}=\prod\beta_{i_n j_n}T_j \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$