概率论解题分析

概率论解题分析

许刘俊　杨维权

广东科技出版社

内容简介

本书是概率论的教学与应用的参考书。内容包括事件概率的计算方法，随机变数及分布函数的解题方法，随机变数的数字特征的解题方法，特征函数及极限定理的解题方法等。

全书分五章，以解题方法为主线编写，每章中首先介绍有关知识的要点，接着介绍解题应掌握的原理、思路和方法，同时提供各种类型的例题，尽可能地给出两种或多种不同解法，并予以分析比较，最后给出一系列供读者练习的习题，答案附书末。

本书对于教师的教学辅导和学生掌握学习方法都有较好的参考价值，适合大专院校的教师、学生、以及电大、职大、函授的学生阅读。

Gailülun jieti fenxi

概率论解题分析

许刘俊　杨维权

广东科技出版社出版

广东第二新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　12.75印张250 000千字

1990年10月第1版　1990年10月第1次印刷

印数 1—3 200册

ISBN 7-5359-0629-X

O·23　定价 4.80元

编者的话

本书是概率统计教学与应用的参考书．可配合中山大学梁之舜等编写的《概率论及数理统计》（分上、下两册，高等教育出版社，第二版）使用，也可以与其它概率统计教材配合使用，还可用作一个学期的教材．

本书内容包括随机事件和概率、随机变数和分布函数、数字特征、特征函数、极限定理等，都以解题方法为主线编写．本书的特点是在每一章里首先扼要地介绍有关的基本概念、公式和定理，提纲挈领地描述解题应掌握的原理、思路和方法．每一章都按解题方法将大量例题分类．对于同一例题，尽量提供不同的解法，并作若干附注，指出这些方法的特点和适用的场合，比较解法的优劣，有些例题还分析了错误的原因．各章还配有适量的习题，以使读者进一步理解和掌握各章的基本思想和方法．

梁之舜教授仔细审阅了书稿，提出了许多有益的意见，并为本书撰写了序言，编者表示衷心的感谢，本书难免有不少差错，敬请各位批评指正．

编者

1989年3月中山大学

序

概率统计和其他数学分支一样，具有理论的抽象性和逻辑推理的严密性．它的概念、公式和定理都需要通过做一定数量的习题，才能深入理解和熟练掌握．它又是一门应用性很强的学科，同样需要习题的实践，才能准确而灵活地运用．各种类型的习题应该是适应这样的需要而产生的．曾有一个时期各门学科的习题书出得较多，但其中有一些只是罗列一大批习题，做出相应的解答，以供“题海战术”的需要．这些习题书片面强调“熟能生巧”，造成学生在日常作业中往往不求甚解地对号照抄，临考则东做一题、西做一题，希望考试时能碰上若干题，取得优异成绩以自欺欺人．这样的后果，当然不好，它并不能实际地提高学生的学习能力，考出他们真实的学业水平，反而使他们滋长不靠真才实学，靠碰运气的思想．

许刘俊、杨维权二同志根据多年教学实践积累的经验，编写这本《概率论解题分析》，力图避免这些缺点．它不是一本简单的习题集，而是以解题方法为主线，按教学内容分成若干章节，在每一章节前扼要地介绍有关基本概念、公式和定理，跟着提纲挈领地叙述本章解题应掌握的原理与总的思路和方法，然后列出各有关例题．每一例题尽可能地给出两种或多种不同的解法，并作若干附注，指出某种方法的特点，及其适应的场合，比较各种方法的优劣，起到画龙点睛的作用．

又多处结合例题，指出容易出错的地方及出错的原因．最后给出一系列习题，一般不写出全部解答而只作解答提示，于书末才给出答案．所以，这是一本良好的教学辅导与学习方法的参考书．)

最近出版的日本医科大学教授品川嘉也博士撰写的《右脑使用与开发》(天津科学翻译出版公司出版，1988)指出："人实际上有两个大脑，这就是操纵语言、具有逻辑思维功能的左脑和具有非逻辑功能产生直观、形象、想象思维的右脑"．他强调开发右脑，认为"一般人只用了半个脑子，那恰好是计算机所能代替的"，认为"日本人由于接受过于统一的、规范的学校教育，所以有一种左脑使用过多而创造力源泉的右脑使用不足的倾向．"他提出开发右脑的多种方法，其中一种方法是多做数学习题．显然，他所指的不是不求甚解地依样葫芦地做，而是有助于进行联想和抽象与形象思维的方法运用．

本习题书在这方面可能会起到良好的作用．如果学生不满足于所列出的解题方法，能进一步发展更新的方法并总结出它的特点，这将会更有裨益．

对任课教师来说，本习题书也是一本有益的教学参考书．特别是现在教学上都很重视"教育测量"，出一道题或一套题都要考虑它的"信度"、"效度"、"难度"和"区分度"，因而教师出题时，如果没有比较丰富的经过仔细分析的一系列试题以供选择，难免会因时间匆忙而"乱点鸳鸯谱"．当然地，任何一本习题书都不会是十全十美的．每个教师应该结合自己的教学实践，不断补充与完善，建立自己的"习题库"，这对于提高教学质量与效果，无疑是十分需要的．

梁之舜

1989年2月14日于中山大学

目　录

第一章　事件概率的计算方法

内容要点

1.事件的运算

事件之间的关系主要有相容关系、包含关系、等价关系．在事件之间可以定义并、交、差等运算．下面列出几个主要结果．

（1） 事件的并（交）的运算满足交换律、结合律；

（2） 事件的并（交）对交（并）满足分配律；

（3） 事件的差的运算：

$A-B=A\cap\overline{B}$

事件之差也有一个分配律

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$；

$(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$．

（4） De—Morgan公式：

$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A}_i$； $\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A}_i$．

注：事件之间的运算关系与点集论中集合的运算关系完全等价．事件相当于子集．必然事件与不可能事件相当于全集与空集．逆事件相当于余集．因此，有点集论知识的读者可将点集论中的结果完全搬到事件的运算中来．

2.古典概率计算

这种计算方法适用于：如果全体基本事件共有有限多个，且每个基本事件出现的可能性相同．这时，任意事件A的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

为了具体算出上式中的分子、分母的数值，一般利用排列组合的方法．

3．几何概率

几何概率适用于：如果试验的结果由某一区域内的点的随机位置来确定，并且点落在该区域内的任何位置是等可能的，则事件A有

$$P(A)=S_A/S.$$

其中S是全体试验结果构成的区域的度量，S_A是构成A的S中的部分区域的度量．这里，"区域"可能指一直线上的图形，平面中的图形，也可能指三维空间中的图形．这时S与S_A分别指线段的长度、平面图形的面积及空间图形的面积或体积．

4．概率空间及概率的基本性质

所有基本事件对应的全部元素组成的集合Ω称为样本空间．Ω的某些子集组成的集类$\mathscr{F}$若满足：

1）$\Omega\in\mathscr{F}$；　2）若$A\in\mathscr{F}$，则$\overline{A}\in\mathscr{F}$；

3）若$A_n\in\mathscr{F}$，$n=1, 2, \cdots$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$$

则称$\mathscr{F}$为σ-代数．

定义在$\mathscr{F}$上的一个非负集函数$P(A)$若满足：

1） 对任意$A\in\mathscr{F}$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2） $P(\Omega)=1$；

3） 若$A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，且当$i\neq j$时，$A_i\cap A_j=\phi$，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

则称P为概率，$P(A)$称为事件A的概率，$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为概率空间. 概率有如下性质：

1） $P(\phi)=0$；

2） $P(\overline{A})=1-P(A)$；

3） 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$满足$A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

4） 若$A\subset B$，则$P(A)\leqslant P(B)$；

5） 概率的多除少补原理：

$$P(\bigcup_{i=1}^{N}A_i)=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{\substack{i,j\\i<j=1}}^{N}P(A_i\cap A_j)+\cdots$$

$$+(-1)^{N+1}P(\bigcap_{i=1}^{N}A_i)$$

6） 概率的连续性定理：若$A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，$A_n\supset A_{n+1}$，且$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}=A$，则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

5.条件概率及概率的乘法定理

若$P(A)>0$，称$P(B\mid A)=P(AB)/P(A)$为“在已知事件A发生的条件下，事件B发生的条件概率”. 由定义得到

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$$

称为概率的乘法定理.

6.全概率公式与贝叶斯公式

若H_1，H_2，…，H_n，…为一序列互不相容的事件（假设事件），且$P(H_k)>0$，则对任意$B\in\mathscr{F}$，$B\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}H_k$，有

$$P(B)=\sum_{k=1}^{\infty}P(H_k)P(B\mid H_k)$$

称为全概率公式．通常取$\bigcup\limits_{k}H_k=\Omega$．

反过来，若事件B已发生，则

$$P(H_k\mid B)=\frac{P(H_k)P(B\mid H_k)}{P(B)}$$

称为贝叶斯公式．

7.相互独立随机事件及贝努里概型

若事件A与B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B相互独立．

若事件A_1，A_2，…，A_n对任意s，$1\leqslant s\leqslant n$，任意i_k，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s})$$

则称A_1，A_2，…，A_n相互独立．

若A_1，A_2，…为一序列事件，对任意n，任意n个事件相互独立，则称A_1，A_2，…相互独立．

进行n次独立重复试验，每次试验的结果是A与$\overline{A}$，而$P(A)=p$与试验的次数无关，这种试验称为贝努里试验，或称贝努里概型．在贝努里概型中，事件A发生k次的概率为

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}，k=0，1，\cdots，n$$

8.其它概型及用微分方程、差分方程解概率论问题等

解题方法及例题

一　关于事件表达及事件关系的解题方法

事件的关系及其运算是学习概率统计的预备知识，必须熟悉这方面的一些基本结果，掌握一些基本的解题方法．初学概率统计时，对事件的关系及运算规则往往不大习惯，并且不自觉的与数的运算规律混同起来，这当然是不行的．因此必须记住：事件之间的关系是逻辑关系．所谓事件之间的运算也是一些逻辑运算，这就是事件关系及运算中的本质．抓住了这一本质，就能弄清楚事件之间关系及运算与数之间的关系及运算有哪些相似之处？有哪些区别？为什么会出现这些区别？下面通过例题来加深对这些问题的认识．

例1.1　设 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，$A=\{2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，$C=\{5, 6, 7\}$．求下列事件：1）$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$，2）$A\cap\overline{(B\cap C)}$．

解1）　方法一　由题设知，$\overline{A}=\{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，$\overline{B}=\{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$，所以 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$，于是 $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\{2, 3, 4, 5\}$．

方法二　由De－Morgan公式知 $\overline{A}\cap B=\overline{(A\cup B)}$，故

$$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=A\cup B=\{2, 3, 4, 5\}$$

方法三　由于事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 表示 A 不发生同时 B 也不发生．它的逆事件当然是 A，B 至少有一个发生，即 $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\{2,$

3，4，5，}.

注：比较上述三种解法可见，它们基本相似，但方法三着重于事件的直观背景，方法二利用了事件相互关系的已知结果，而方法一则是从集合论的眼光来处理问题的. 这几种方法都经常使用.

解2） 用与解1）同样的方法可以得到

$$\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}=\{1，5，6，7，8，9，10，\}$$

注：也可用以下方法求解. 因为

$\overline{B\cap C}=\{1，2，3，4，6，7，8，9，10\}$

$A\subset\overline{B\cap C}$

所以 $A\cap(\overline{B\cap C})=A$，$\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}=\overline{A}$

例1.2 证明

1） 对任一事件A，必有$\phi\subset A\subset\Omega$；

2） 若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$；

3） 若A与B为互斥事件，则$A\cap B=\phi$.

证1） 方法一 因为事件Ω必然发生，所以“事件A发生，则事件Ω发生”这一事实一定成立. 即对任一事件A，关系式$A\subset\Omega$成立. 其次，因为ϕ是一定不发生的事件，所以“若A不发生，则ϕ不发生”一定成立. 故$\phi\subset A$.

注：在上面的证明中，证明$\phi\subset A$时利用了包含关系的等价定义：若A不发生，则B一定不发生的话，则$B\subset A$成立.

方法二 因为$A\cap\overline{A}\subset A$，但$A\cap\overline{A}=\phi$，故$\phi\subset A$. 同理，由$A\cup\overline{A}\supset A$且$A\cup\overline{A}=\Omega$知$A\subset\Omega$成立.

证2） 因为$A\subset B$，即A出现则B一定出现. 而$B\subset C$，即B出现则C一定出现. 所以若A出现，则C一定出现，即$A\subset C$

成立.

证3）因为A与B为互斥事件，即A与B不可能同时发生．故$A\cap B$为不可能事件，即$A\cap B=\phi$.

例1.3 试问事件A与事件$\overline{A\cup B}$是否为互不相容的？是否为互逆的？

解 *方法一* 从定义出发进行讨论．要讨论A与$\overline{A\cup B}$是否为互不相容的，即讨论$A\cap(\overline{A\cup B})$是否为$\phi$．由对偶律及交的结合律得到

$$A\cap(\overline{A\cup B})=A\cap(\overline{A}\cap\overline{B})=(A\cap\overline{A})\cap\overline{B}=\phi$$

故A与$\overline{A\cup B}$是互不相容的.

要讨论A与$\overline{A\cup B}$是否为互逆的，根据逆事件的定义，除了上面已经得到的A与$\overline{A\cup B}$互不相容外，还要讨论$A\cup(\overline{A\cup B})=\Omega$是否成立．由

$$A\cup(\overline{A\cup B})=A\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=(A\cup\overline{A})\cap(A\cup\overline{B})$$
$$=\Omega\cap(A\cup\overline{B})=A\cup\overline{B}$$

知，如果$\overline{A}\subset\overline{B}$，则$A\cup\overline{B}\supset A\cup\overline{A}$，从而$A\cup\overline{B}=\Omega$．而$\overline{B}\supset\overline{A}$等价于$B\subset A$，所以当$B\subset A$时，$A$与$\overline{A\cup B}$互逆.

方法二 用图示法讨论．根据A与B之间的关系可得如下四种情形（阴影部分为$\overline{A\cup B}$）：