Б·П·吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（一）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社
一九八七年·济南

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(一)

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　16.25印张　331千字
1980年2月第1版　1987年3月第4次印刷
印数：186,301—197650

ISBN 7—5331—0099—9

O·5

书号 13195·17　定价 3.10元

出版说明

吉米多维奇（Б.П.ДЕМИДОВИЧ）著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要

轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　　录

第一章　分析引论

§1. 实　　数

1°数学归纳法　为了证明某定理对任意的自然数 n 为真，只须证明下面两点就够了：（1）这定理对 $n=1$ 为真，（2）设这定理对任何的一个自然数 n 为真，则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真．

2°分割　假设分有理数为 A 和 B 两类，使其满足于下列条件：（1）两类均非空集，（2）每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，（3）属于 A 类（下类）的任一数小于属于 B 类（上类）的任何数，这样的一个分类法称为分割。（a）若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数。（б）若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数．有理数和无理数统称为实数*．

3°绝对值　假若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{若}x\geqslant 0,\\ -x, & \text{若}x<0.\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，有以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4°上确界和下确界　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合．若：

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数．

（1）每一个$x\in X$*满足不等式

$$x\geqslant m;$$

（2）对于任何的$\varepsilon>0$，存在有$x'\in X$，使

$$x'<m+\varepsilon,$$

则数 $m=inf\{x\}$ 称为集合X的下确界。

同样，若：

（1）每一个 $x\in X$满足不等式

$$x\leqslant M,$$

（2）对于任何的$\varepsilon>0$，存在有$x''\in X$，使

$$x''>M-\varepsilon,$$

则数 $M=sup\{x\}$ 称为集合X的上确界。

若集合X下方无界，则通常说

$$inf\{x\}=-\infty;$$

若集合X上方无界，则认为

$$sup\{x\}=+\infty.$$

5°**绝对误差和相对误差** 设a（$a\neq 0$）是被测的量的准确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\varDelta=|x-a|$$

称为绝对误差，而

$$\delta=\frac{\varDelta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差。

假若x的绝对误差不超过它的第n个有效数字的单位的一半，则说x有n位准确的数字。

---

* 符号$x\in X$表示x属于集合X。

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数n皆成立：

1. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

证 当$n=1$时，等式成立。

设对于$n=k$（自然数）时，等式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

则对于$n=k+1$时，有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于$n=k+1$时等式也成立。

于是，由数学归纳法知，对于任何自然数n，有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证 当$n=1$时，等式成立。

设$n=k$时，等式成立，即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于$n=k+1$时，有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

即对于$n=k+1$，时等式也成立。

于是，对于任何自然数n，有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证 当$n=1$时，等式成立。

设$n=k$时，等式成立，即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2,$$

则对于$n=k+1$时，有

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$

$$=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2$$

$$=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,$$

即对于$n=k+1$时，等式也成立。

于是，对于任何自然数n，有

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

4. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当$n=1$时，等式成立。

设$n=k$时，等式成立，即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则对于$n=k+1$时，有

$$1+2^2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k$$

$$=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,$$

即对于$n=k+1$时，等式也成立。

于是，对于任何自然数n，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

5. 设$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{[0]}=1$，求证

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中C_n^m是由n个元素中选取m个的组合数，由此推出牛 顿的二项式公式。

证 当$n=1$时，由于

$$[a+b]^{[1]}=a+b$$

及
$$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立。

设$n=k$时，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}, \qquad (1)$$

则对于$n=k+1$时，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}\cdot(a+b-kh). \qquad (2)$$

将(1)式代入（2）式得

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$$

$$=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots$$
$$+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}$$
$$=\{(a-kh)+b\}C_k^0a^{[k]}b^{[0]}$$
$$+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}$$
$$+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^ka^{[0]}b^{[k]}$$
$$=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}$$
$$+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}$$
$$+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}$$
$$=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}$$
$$+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}$$
$$=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1a^{[k]}b^{[1]}$$
$$+\cdots+C_{k+1}^ka^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}$$
$$=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^ma^{[k+1-m]}b^{[m]},$$

故由$(a+b)^{[k]}=\sum\limits_{m=0}^{k}C_k^ma^{[k-m]}b^{[m]}$可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^ma^{[k+1-m]}b^{[m]},$$

即对于$n=k+1$时，等式也成立。

于是，对于任何自然数n，有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^ma^{[n-m]}b^{[m]}. \qquad (3)$$

在式子

$$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中，令$h=0$，即得

$$a^{[n]}=a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m.$$

6． 证明贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是符号相同且大于-1的数。

证 当$n=1$时，此式取等号．

设$n=k$时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于$n=k+1$时，由于$x_i(i=1,2,\cdots,n)$大于-1，所以$1+x_i>0$．因而有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\&\quad\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\&\quad+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于$x_ix_j\geqslant 0$，所以

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},\end{aligned}$$

即对于$n=k+1$时，不等式也成立，

于是，对于任何自然数n，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.\end{aligned}$$

7． 证明若$x>-1$，则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1)$$

为真，且仅当$x=0$时，等号成立。

证 只要在6题的贝努里不等式中，设

$$x_i = x \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

即得证

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx,$$

从6题的证明过程中看出，仅当 $x=0$ 时，上式才取等号.

8\. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 当 n>1.$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \ (k=1,2,\cdots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何自然数n，有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9. 证明不等式

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n \quad 当 n>1.$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $2!\cdot 4!=48$. 及 $[(2+1)!]^2=36$，所以，$2!\cdot 4! > [(2+1)!]^2$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$2!\cdot 4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&2!\cdot 4!\cdots(2k+2)! > [(k+1)!]^k(2k+2)!\\&=[(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)\\&\quad>[(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1}=[(k+2)!]^{k+1},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立. 于是，据归纳法原理，本题证毕.

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时，因为 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n=k+1$ 而言，由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$,

而上述不等式由于

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4,$$

因而是成立的．于是，最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立．由归纳法证毕．

11．设c为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数．求证在 A 类中无最大数，而在B 类中也无最小数．

证 设$a\in A$．若 $a\leqslant 0$，则显然存在 $a'>a$ $(a'>0)$且 $a'\in A$．故可设 $a>0$，于是 $a^2\leqslant c$．但不可能有 $a^2=c$．因若$a^2=c$，设$a=\frac{p}{q}$，p与q为互质的正整数，则$\frac{p^2}{q^2}=c$．由于 c 是正整数，而p^2与q^2也是互质的，故必$q=1$，从而$c=p^2$，此与假定矛盾，故必$a^2<c$．下面我们证明，存在正整数n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$也属于 A．

上述不等式相当于：

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c,\quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n}<c-a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此，只要取

$$n>\frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的.因此，不论 a 为 A 类内的怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成：A 类包含所有的有理数 a，而 $a^3<2$；B 类包含所有其余的有理数.证明在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a\in A$.即 $a^3<2$.下证必可取正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式相当于 $\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$.若 $a\leqslant 0$，取 $n=1$ 即可.若 $a>0$，注意到 $n\geqslant 1$，即知若取 n 充分大，使 $n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$，则上列各式均成立.从而 $a+\frac{1}{n}\in A$.故 A 中无最大数.

下设 $b\in B$，则 $b^3\geqslant 2$.下证不可能有 $b^3=2$.事实