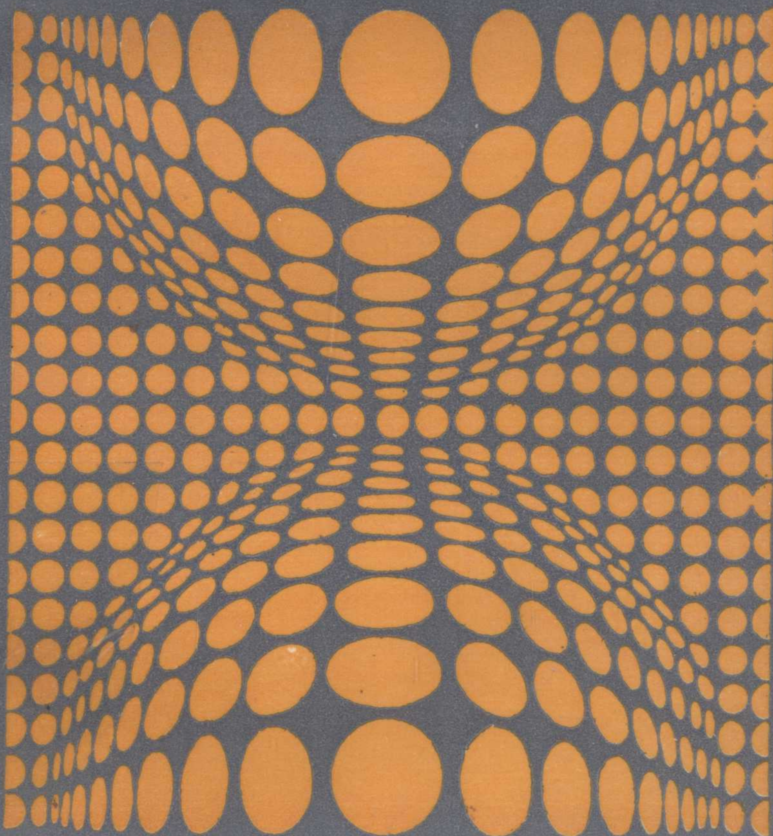
高等学校教材

弹性力学

杨绪灿 金建三 编

高等教育出版社



TANXING LIXUE

高等学校教材

弹性力学

杨绪灿　金建三　编

高等教育出版社

内容提要

本书由国家教育委员会结构力学课程教学指导组推荐出版，适用于高等工业学校机械工程类专业。

本书系统地阐述了弹性力学的基本理论，对机械工程中常遇到的柱体扭转、应力集中、接触应力、热应力等问题的求解方法，作了重点介绍。本书采用“从一般到特殊”的编排体系，结构紧凑。书中配有一定数量的习题，书末附答案。

高等学校教材

弹 性 力 学

杨绪灿　金建三　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 9.5　字数 235 000

1987 年 8 月第 1 版　1990 年 9 月第 3 次印刷

印数 4 651—5 670

ISBN 7-04-000163-2/TV·7

定价　2.80元

前　　言

本书是为高等学校机械工程类专业学生学习弹性力学基础知识而编写的一本教学用书。

本书采用从一般到特殊的编写体系，其目的是使读者在学时数不多的情况下，仍能对弹性力学的基本理论和基本方法有比较完整的了解。根据教学实践，按此体系组织教学，学生是易于接受的，效果良好。

本书带有“*”号的章节，在教学时数受到限制时，可以删去，不影响其它内容的衔接。为便于教学，帮助学生加深理解和巩固所学的基本概念和基本理论，引导学生比较顺利地掌握解题方法，在各章中穿插了一定数量的例题，但在教学中无须一一讲授，其中一部分可让学生自学。

全书初稿完成后承浙江大学林钟祥教授和中国纺织大学章纪川教授审阅，并由清华大学杜庆华教授复审。他们在审稿中提出了许多宝贵意见，特此谨致谢意。

本书共十一章，其中第一、七、八、九、十章由重庆大学杨绪灿执笔；第二、三、四、五、六、十一章由南京建筑工程学院金建三执笔。插图由南京建筑工程学院孔令仙、韩晓健绘制。

限于编者的水平，本书不免会有许多不足之处，恳切希望广大师生和读者批评指正。

编　　者

1986.4.

目录

第一章 绪 论

§1-1 弹性力学的任务

弹性力学又称弹性理论，是固体力学的一个分支学科。它的任务是研究物体(固体)的弹性变形行为，即在力和温度等外部因素作用下发生弹性变形时的应力和应变分布规律，从而为工程结构物及其构件的强度、刚度、稳定性和可靠性的设计、分析提供理论基础。它是理论性和实用性都很强的一门学科。

大量的材料试验表明，弹性几乎是各种固体材料在一定变形程度内所固有的一种力学性能。如果排除周围介质的影响，琴弦自由振动的长久保持就是弹性的一种表现形态。因此，弹性指的是材料的一种特定变形特性。它的显著特点之一是物体在外载作用下所发生的变形和与之相应的变形能，在除去外载时将全部消失，使物体仍回复到原来的形状和尺寸。也就是说，在弹性变形时，材料内部没有能量的耗损，是一个可逆的过程，它只对其起始状态保持有记忆，而对变形的历史过程则是无记忆的。最易于为人们所感知的弹性变形实例，就是各种形式的弹簧的行为，故在讨论弹性的力学模型时，人们常用一理想弹簧作为材料弹性性质的表征，如图 1-1a 所示。事实上，人们之所以设计出各种弹性元件，也正是为了利用材料的弹性性质。弹性的另一显著特点是变形的瞬

(a) (b)

图 1-1

时性,即弹性变形与载荷作用之间,不单存在着单值连续的对应关系,而且是同时发生,同步进行的。

当然,和任何物理模型一样,以上所说的弹性,只是实际材料行为的理想化,这里忽略了不起决定性作用的各种非弹性因素的影响。

材料的这种弹性是有一定限度的,一般只是在很小的变形范围内才存在。各种工程材料都有其相应的弹性极限。如果物体内的应力超过了这个极限,在除去外部作用后,变形便不会全部消失,而有不能恢复的永久变形产生,这种不可逆的变形部分称为塑性变形。为了表示纯塑性性质的特点,可用一滑动干摩擦副作为模型(图 1-1*b*),它表示只有在应力的值 σ 超过材料的某特定值 σ_s 之后,这种变形才会发生。

在发生塑性变形时,物体内的应力和应变分布规律与弹性变形阶段不同,这类问题的研究,属于固体力学中的另一分支学科,即塑性力学的任务。

综上可见,弹性力学的研究对象是理想弹性体,简称为弹性体。由于一切工程结构和机器,如船舶、飞行器、桥梁、发动机、石油和化工机械等的构件,不但在外载的作用下都要发生变形,而且更重要的是为了保证它们的工作性能和寿命,往往必须把这种变形限制在材料的弹性极限之内,特别对某些精密机械设备这种要求就更为严格,因此,弹性力学的理论、方法和它所获得的许多典型问题的解,在相当广泛的工程技术领域里都有着重要的实用意义。

§1-2　弹性力学的基本假设

为了建立弹性力学的理论,需要从尽可能广泛的经验事实中,概括出决定固体材料弹性变形的本质因素,提出建立宏观变形基

本规律的假设，使在此基础上建立起来的理想模型既能符合客观实际和工程要求，又便于用数学方法进行有效的处理。这既是从现象到理论的必然过程，也是提出基本假设的主要目的。

弹性力学的基本假设陈述如下。

一、材料组织上的连续性假设

所谓连续性指的是构成物体的材料是密实无间的连续介质。按此假设，无论是整个弹性体还是其内部任何一个构成单元以及单元的界面之间，也无论是在加载之前还是变形之后，材料都是连续的。因而可认为物体内任何点处的位移、应力和应变等力学量也都是空间位置的连续函数。

实际上，从原子或分子水平的微观组织上来看，任何物质都不是连续的。但是当微观组织的颗粒尺寸和它们之间的距离远比物体尺寸为小时，连续性假设就不会引起显著误差。当然在微观层次上研究材料性质时，就必须考虑材料的微观组织结构。材料在宏观上表现出来的性质是微观的统计平均规律。

在以后的讨论中，我们将经常从弹性体中任取一个微单元体来进行分析考察。但这里所指的微单元体决非是原子或分子级意义上的单元体，而是连续介质意义上的单元体，可称为细观的微单元体。这种假设对一切连续介质都适用，其中也包括流体。

二、材料性质上的均质与各向同性假设

所谓均质性指的是物体内各处材料的力学性质都相同，与各点的空间位置无关。如在物体内任一点处的各个方向上材料的性质都相同，则称为各向同性，由此材料构成的物体为各向同性体。钢材、陶瓷、甚至混凝土，一般均可认为是均质和各向同性的。但竹、木等纤维材料以及现代复合材料等，它们的力学性质随方向不同而有明显差异，则为各向异性材料。本书只讨论各向同性体。

三、几何线性变形假设

为了避免数学分析上出现非线性问题，对弹性体的变形作如下限制：各点的位移与物体的最小特征尺寸相比是微小的，因而位移对坐标的偏导数均远小于1，其二次方项或乘积项均为可略去不计的高阶小量。

在此前提下，弹性体内任一点处的应变和转角均为位移偏导数的线性函数，故通常称这种理论为几何线性或小变形理论。对于不符合这些限制条件的问题，则称为几何非线性或有限变形问题。

在几何线性变形下，由于物体在变形后的尺寸与变形前相差甚小，外力的作用方向和分布状况的变化也很小，可略去不计，故在考虑物体及其任何微单元在变形后的平衡条件时，仍可以用原始尺寸为基础。

四、物理的线性假设

应力与应变的关系，又称本构关系，它的研究以大量的实验为基础。对于钢、铜等金属材料，在弹性变形范围内应力与应变为线性关系，这就是有名的虎克(Hooke)定律。在单向应力状态，其关系为

$$\sigma = E\varepsilon$$

这里的E称为材料的杨(Young)氏模量，为图1-2a中直线段OA

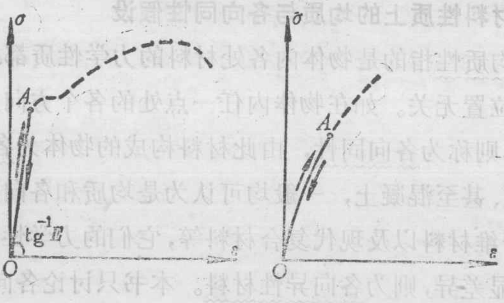


图　1-2

的斜率。按此实验事实可进一步假设，这种物理的线性关系推广到三向应力状态时也成立。

但有些材料，如橡胶，其应力与应变的关系为非线性的，如图1-2b中的OA曲线所示，一般可用$\sigma=f(\varepsilon)$表达，这属于物理非线性的弹性问题。

五、初始“自然状态”假设

假设物体在未受载荷作用之前处于一种无应力和应变的状态，称为初始“自然状态”。

实际上，物体，如金属材料，通常是要经过各种加工过程，如冷轧、热处理、焊接等而成形的，从而材料早在受载之前其内部就不可避免地存在着应力。除此之外，由于结构物的制造或装配难免不准确，上述情况也会存在。可是在建立弹性力学问题时，对此一般不加考虑，而假设物体初始状态的内应力为零。这是因为初应力的形成一般与环境因素、加工变形过程密切相关，需由塑性力学和材料科学等多学科综合研究，已不单是一般意义上的弹性力学问题；同时，在一般情况下，构件的破坏主要是由外载引起的，所产生的应力远非初应力可比。因此，在建立弹性力学理想模型时，采用初始“自然状态”假设是必要而合理的。

在上述假设基础上建立起来的弹性理论称为数学弹性理论，或称线性弹性理论。如果在此之外还进一步对变形或应力分布作出更多的补充假设，如杆件弯曲的平截面假设，板与壳弯曲时的克希霍夫(Kirchhoff)假设等，从而使问题在符合工程要求的精度下得到进一步的简化，使之更便于求解和应用，则称为应用弹性力学。

弹性力学的基本原理的论证、分析，基本方程的求解和计算方法的研究，需要利用许多数学上的成就作为工具，这是它的明显特点之一。另一方面，这种在理想的物理模型基础上建立起来的理论，

虽来源于实践，但与实际的符合程度究竟如何，则又需经实验和实践来验证。因此，在弹性力学的发展和应用过程中，实验应力分析的原理、方法和技术的研究和运用，一直受到人们的重视，得到了与理论相并行的发展，而且还能解决许多用解析法无法求解的复杂问题。需要特别提到的是，有限单元法借助于电子计算机，为弹性力学的数值计算开创了新的前景，许多过去仅由模型或实物原型试验才能获得数据的复杂问题，可以比较容易地得到尽可能精确的数值解。尽管如此，实验研究和验证仍是完全必要的。

本书着重论述线性弹性力学的基本理论、方法和典型问题的解，不涉及实验原理及方法。

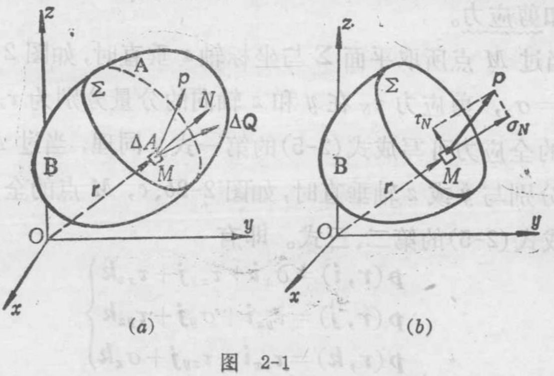
第二章 应力分析

弹性力学问题的建立和弹性体内应力、应变分布规律的研究，都需要从力学、几何和材料性质等几方面来进行分析。本章讨论第一个方面的问题，即以静力学的观点建立应力的概念，研究其基本特性，为以后的讨论提供必要的基础。本章不涉及材料的力学性质，故结论对各种物质均普遍适用。

§2-1 应 力

作用于弹性体上的外力可分为面力和体力两类。作用在物体表面上的力称为面力，如流体的压力、机械零件之间的传动力等。作用于物体内各部分的力，如重力、惯性力、电磁力等，则称为体力。在以后的讨论中，均认为外力是已知的。

为定义在外力作用下处于平衡状态的弹性体内任意一点 M 处的应力，常采用截面法。设想过 M 点用一平面 Σ 分物体为 A 与 B 两部分，如图 2-1a。现考察其中任一部分，如 B 的平衡。显然，在平面 Σ 内的全部质点上应有 A 对 B 的作用存在，表现为连



(a) (b)

图 2-1

续分布而不一定是均匀的内力。这种内力，在取包含 M 点在内的微面积元素 ΔA 上，设为 $\Delta \boldsymbol{Q}$，则从物理意义上讲，当 ΔA 向 M 点缩小时，其平均集度 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta A$ 在 M 点应有极限存在，即

$$\boldsymbol{p}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A} \tag{2-1}$$

$\boldsymbol{p}$ 称为 M 点在 Σ 上的应力向量或全应力，其量纲为[力][长度]$^{-2}$，用国际单位制(SI)，其单位为牛顿/平方米(N/m²)，亦称帕(Pa)。

应当看到，一点处的应力不仅与该点的位置[向径 $\boldsymbol{r}$ 或空间坐标(x,y,z)]有关，而且还和该点所在平面 Σ 的方向有关。设 Σ 的外法线N的单位向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{p}$ 可表示为

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) \tag{2-2}$$

如它在直角坐标系内的投影为 p_x、p_y、p_z，称为相应坐标轴的应力分量，则上式又可写成

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+p_z\boldsymbol{k} \tag{2-3}$$

式中的 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为直角坐标系的单位向量。此外，$\boldsymbol{p}$ 还可用它在该点所在平面的法向和切向上的分量来表示(图 2-1b)，即

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\sigma_N\boldsymbol{n}+\tau_N\boldsymbol{t} \tag{2-4}$$

式中的 $\boldsymbol{t}$ 为该点所在平面内的单位向量(与 $\boldsymbol{p}$和 $\boldsymbol{n}$共面)，而 $\sigma_N=p\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})$，$\tau_N=p\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{t})=\sqrt{p^2-\sigma_N{}^2}$，分别称为该点处的正应力和剪应力。

当过 M 点所取平面 Σ 与坐标轴 x 垂直时，如图 2-2a，有正应力 $\sigma_N=\sigma_x$，剪应力 τ_N 在 y 和 z 轴向的分量分别为 τ_{xy} 与 τ_{xz}，故 M 点的全应力可写成式(2-5)的第一式。同理，当过 M 点所取平面 Σ 分别与 y 或 z 轴垂直时，如图 2-2b、c，M 点的全应力可相应地写成式(2-5)的第二、三式。即有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i})&=\sigma_x\boldsymbol{i}+\tau_{xy}\boldsymbol{j}+\tau_{xz}\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j})&=\tau_{yx}\boldsymbol{i}+\sigma_y\boldsymbol{j}+\tau_{yz}\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})&=\tau_{zx}\boldsymbol{i}+\tau_{zy}\boldsymbol{j}+\sigma_z\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

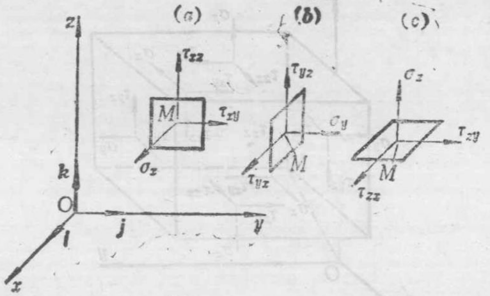


图 2-2

上述应力分量的脚标中，第一个字母表示所在平面的方向，第二个字母表示该应力分量的指向。因正应力所在面的方向与它的作用方向相同，故脚标只用一个字母表示。

于是，式(2-5)表达了过 M 点分别与三个坐标轴相垂直的微面上的应力状况，共有九个分量，统称为一点的应力分量。如用矩阵的形式表示，可写为

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{2-6}$$

称为一点的应力张量矩阵，简称为应力矩阵。

如进一步改用标号 1、2、3 顺次表示 x、y、z 轴，则有 $\sigma_x=\sigma_{11}$，$\sigma_y=\sigma_{22}$，$\sigma_z=\sigma_{33}$，$\tau_{xy}=\sigma_{12}$，$\tau_{yz}=\sigma_{23}$，$\tau_{zx}=\sigma_{31}$。于是，各个应力分量可简记为 $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$，称 σ_{ij} 为应力张量记号。显然，这种记法可使问题的表述更为简化。

现以 M 为顶点，取与坐标平面平行的微六面体单元，其棱边长分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$。微六面体各面上的应力如图 2-3 所示。对于正应力，当其指向与该面的正向一致时，规定为正，表示拉应力；反之，规定为负，表示压应力。对于剪应力，规定如下情况为正：在外法线与坐标轴正向一致的面上，剪应力指向坐标轴的正向；而在

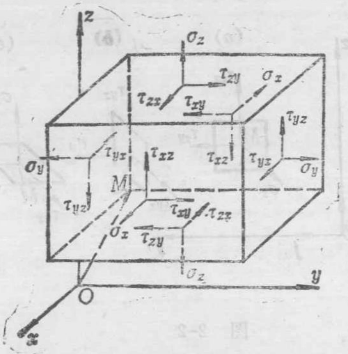


图　2-3

外法线与坐标轴负向一致的面上，剪应力指向坐标轴的负向。图 2-3 中所示的应力分量均为正号。

§ 2-2　一点的应力状态

设弹性体内任一点 M 的应力矩阵$[\sigma]$为已知，现求过该点的任一斜平面上的应力。为此，设想过 M 点取一微四面体 $MABC$，其三棱边 MA、MB、MC 分别平行于坐标轴，且长度分别等于 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$。斜微面 ABC 与通过 M 点的所求斜平面相平行，其外法线为 N(图 2-4)。显然，保持外法线N不变，当棱边 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$无限缩小，且趋于 M 点时，斜微面ABC上的应力就代表该点所求斜平面上的应力。

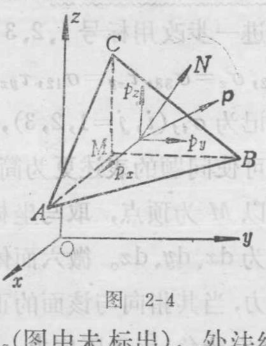


图　2-4

设斜微面 ABC上的全应力p的轴向分量为 p_x、p_y、p_z，微四面体的单位体积的体力分量为 f_x、f_y、f_z(图中未标出)，外法线N对于坐标轴的方向余弦为