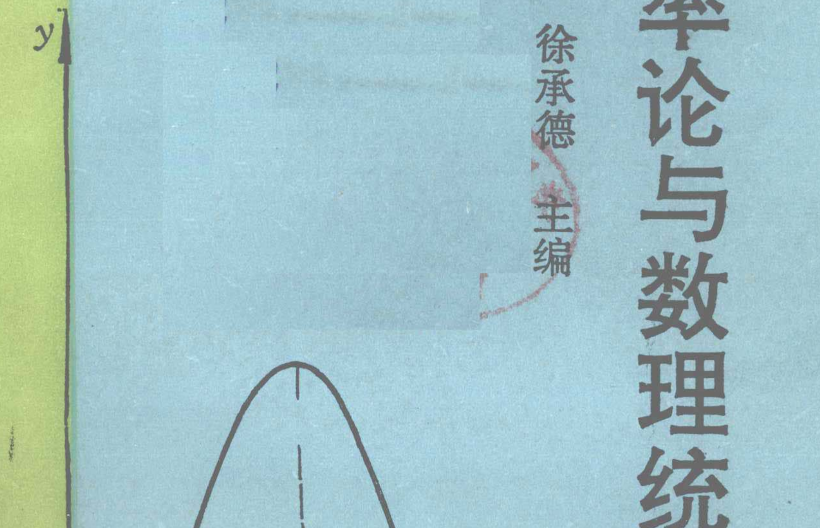
# 概率论与数理统计

曹彬 徐承德 主编




哈尔滨工业大学出版社

(黑)

# 概率论与数理统计

曹 彬 许承德 主编

哈尔滨工业大学出版社

(黑）新登字第4号

概率论与数理统计

曹 彬 许承德 主编

*
哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
黑龙江省教委印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 12.25 字数 275千字
1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷
印数 1—7000
ISBN 7-5603-0530-X/O·42 定价：8.50元

# 前　言

本书是为高等工科院校《概率论与数理统计》课程而编写的，它包括了1986年工科数学课程指导委员会制订的“概率论与数理统计教学基本要求”的全部内容。为了适应更多读者的需要，我们适当地增加了部分内容，并在这部分内容前打上了“*”号。本书除供工科各专业使用外，也可供某些非工科专业选用，还可作为工程技术人员的自学参考书。

全书内容共分七个部分：第一部分为事件及其概率的概念与运算（第一、二章）；第二部分为随机变量及其分布（第三、四章）；第三部分为随机变量的数字特征（第五章）；第四部分为极限定理（第六章）；第五部分为数理统计的基本概念（第七章）；第六部分为估计和检验的基本方法（第八、九章）；第七部分为线性模型的统计分析初步（第十章）。每章后附有习题，书末附有习题答案。阅读本书只需具备高等工科院校微积分的数学基础。

本书原稿曾作为哈尔滨工业大学校内教材（曹彬、许承德编）使用多年，效果较好。在此基础上，陈桂林、王勇、关忠根据近几年来的教学实践对本书又进行了认真修改、补充。由于编者水平有限，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

武汉大学胡迪鹤教授和中国纺织大学吴让泉教授曾分别

审查了本书初稿的概率论部分和数理统计部分，赵达纲教授审阅了本书。编者向他们致以衷心地感谢。

编　者

1993年3月

# 目　录

# 第一章 随机事件与概率

## §1.1 随机事件

### 1.1.1 必然现象与随机现象

人们在实践活动中所遇到的现象，一般来说可分为两类：一类是**必然现象**，或称**确定性现象**；另一类是**随机现象**，或称**不确定性现象**。

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象；只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的。例如：在标准大气压下，将水加热到100℃，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子，必然下落；作等速直线运动的物体，如无外力作用，必然继续作等速直线运动等等，这些现象都是必然现象。

随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象；对这种现象来说，在每次试验之前哪一个结果发生，是无法预言的。例如：新生婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能不命中目标；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果不一定相同等等，这些现象都是随机现象。

对随机现象，是否有规律性可寻呢？人们经过长期的反复实践，发现这类现象虽然就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性。例

如：

(a) 掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占 1/2。历史上，蒲丰 (buffon) 掷过 4040 次，得到 2048 次正面；皮尔逊 (K.Pearson) 掷过24000次，得到12012次正面。

(b) 对一个目标进行射击，当射击次数不多时，对弹孔的分布看不出有什么规律性；但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性：弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀。

(c) 从分子物理学观点来看，气体分子对器壁的压力是气体分子对器壁碰撞的结果。由于分子是时刻不停地、杂乱无章地运动着，速度和轨道都是随机的，因而对器壁的碰撞也是随机的。初看起来器壁所受的压力是不稳定的；可是实验证明，由于分子数目非常大，各分子运动所具有的随机性在集体中互相抵消、互相平衡了，使得器壁所受的总压力呈现一种稳定性。分子数目越大，压力越稳定。

从上述各例可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来。这种规律性称为**随机现象的统计规律性**。

革命导师恩格斯指出："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。"①

概率论就是研究随机现象统计规律的一门数学学科。

### 1.1.2 随机试验与事件、样本空间

①《马克思恩格斯选集》第四卷，第243页。

对随机现象的研究，总是要进行观察、测量或做各种科学试验，为了叙述方便起见，我们统称为试验。例如，掷一硬币，观察哪面朝上；向一目标进行射击，观察是否命中；从一批产品中随机抽一产品，检查它是否合格；向坐标平面内任投一根针，测量此针的针尖指向与$x$轴正向之间的交角，等等；这些都是试验。仔细分析，这些试验具有如下的共同特点：

（a）试验可以在相同条件下重复进行；

（b）试验的所有可能的结果不止一个，而且是事先已知的；

（c）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言。

如掷硬币的例子，试验是可以在相同条件下重复进行的，试验的可能结果有两个，即正面和反面；每次试验必出现其中之一，但投掷之前是不可能预言正面出现还是反面出现。

我们将满足上述三个条件的试验，称为**随机试验**，简称**试验**，以字母$E$表示。

在试验中，可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**，简称**事件**，以字母$A$，$B$，$C$，…表示。

例如，为检查一批产品的质量，随机地从这批产品中抽取100件来检查，结果可能是："没有次品"，"有一件次品"，"有两件次品"，…，"100件都是次品"。显然，这些都是随机事件。此外，"次品数不少于5"，"次品数大于5小于10"，"次品数是偶数"，等等，也都是随机事件；不过这些事件，都是由前面那些事件组成的。例如，"次品数不小于5"这个事件，是由"有5件次品"，"有

6件次品"，…，"100件都是次品"所组成。因此，这事件称为复合事件，而前面的那些事件称为基本事件。

一般说，随机试验的每一个可能结果，称为**基本事件**，而由多个基本事件组成的事件，称为**复合事件**。

在前面的例子中，还可以考虑两个特殊的事件："次品数大于100"和"次品数不大于100"。由于100件产品中，次品数是不可能大于100的；因而，"次品数大于100"是不可能发生的，而次品数不大于100"是必然发生的。一般，我们将在一定的试验条件下，必然发生的事件称为**必然事件**，不可能发生的事件称为**不可能事件**。由于必然事件与不可能事件的发生与否，已失去了"不确定性"，因而本质上它们已不是随机事件；但为了以后讨论问题的方便，我们仍然把它们看作随机事件。

为了利用点集的知识来描述随机事件，我们引进样本空间的概念。

由于随机试验的所有可能的结果是已知的，从而所有的基本事件也是已知的。我们将基本事件的全体，称为**随机试验的样本空间**，记为$S$；基本事件也称为**样本点**，用$e$表示。

例如，在上述检查产品质量的试验中，若令$e_i$="有$i$个次品"，$i=0,1,2,\cdots,100$；则

$$S=\{e_0,e_1,e_2,\cdots,e_{100}\}$$

由于随机事件是基本事件或是由基本事件组成的复合事件，故随机事件本身就是样本空间$S$的一个子集。

如在上例中，设$A$表示"次品数不少于5"的事件，则$A=\{e_5,e_6,\cdots,e_{100}\}$；设$B$表示"次品数大于5小于10"的事件，则$B=\{e_6,e_7,e_8,e_9\}$；设$C$表示"有5个次品"的

事件，则$C=\{e_5\}$。

由此可知，引入样本空间之后，事件便可定义为样本空间的子集；而且，当且仅当子集中的一个基本事件在试验中发生了，才称事件发生。

样本空间$S$和空集$\varnothing$作为$S$的子集也看作事件。由于$S$包含所有的基本事件，故在每次试验中，必有一个基本事件$e\in S$发生，即在试验中，事件$S$必然发生；因此，$S$**是必然事件**。又因在$\varnothing$中不包含任何一个基本事件，故在任一次试验中，$\varnothing$永远不会发生；因此，$\varnothing$**是不可能事件**。今后我们常用$S$，$\varnothing$分别表示必然事件与不可能事件。

对一个随机试验，应当弄清楚它的样本空间是什么，这是弄清事件这一概念的基础，下面看几个例子。

**例1**　掷一均匀对称的硬币，观察正反面出现的情况，这是个随机试验。可能结果有两个：正（正面朝上），反（反面朝上）。故样本空间

$$S=\{正，反\}$$

**例2**　将上述硬币掷两次，观察正反面情况，这也是一个随机试验。试验的可能结果有四个：（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）。① 故样本空间

$$S=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)\}$$

在这个试验中，若设$A=$“第一次出现正面”，则$A=\{(正，正)，(正，反)\}$；若设$B=$“两次出现同一面”，则$B=\{(正，正)，(反，反)\}$；若设$C=$“至少有一次出现正面”，则$C=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)\}$；若设$D=$“第一次出现反面”，则$D=\{(反，正)，(反，

①括号内第一个和第二个字，分别表示第一次和第二次掷的结果。

反）}。

**例3** 记录某电话交换台在一段时间内接到的呼叫次数，这个试验的基本事件（记录结果）是一非负的整数，由于难于规定一个呼叫次数的上界，所以样本空间

$$S=\{0,1,2,\cdots\}$$

在这个试验中，若设$A=$"呼叫次数不超过三次"，则$A=\{0,1,2,3\}$；若设$B=$"呼叫次数大于五次"，则$B=\{6,7,8,\cdots\}$。

**例4** 从一批灯泡中抽取一只灯泡，测试它的使用寿命。设$t$表示寿命，则样本空间$S=\{t: t\geqslant 0\}$；基本事件$e=t$。设事件$A=$"寿命小于5小时"，则$A=\{t: 0\leqslant t<5\}$。

**例5** 观察某地区一昼夜最低温度$x$和最高温度$y$。设这个地区的温度不会小于$T_0$，也不会大于$T_1$，则样本空间$S=\{(x,y): T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$；基本事件$e=(x,y)$，$T_0\leqslant x<y\leqslant T_1$。设事件$A=$"最高温度与最低温度之差不超过10℃"，则$A=\{(x,y): y-x\leqslant 10, T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$。

**例6** 一尺之棰，折成三段，观察其长度。用$x$，$y$分别表示折成的第一段和第二段的长度，则第三段的长度为$1-x-y$。由于各段的长度必须大于0小于1，故$x$，$y$的可能值满足：$0<x<1$，$0<y<1$，$0<1-x-y<1$。从而，样本空间

$$S=\{(x,\ y): 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<x+y<1\}$$

基本事件$e=(x,\ y)$，$0<x<1$，$0<y<1$，$0<x+y<1$。

设事件$A=$"每段长都小于$\frac{1}{2}$"，则$A$可写成

$$A=\{(x,\ y): 0<x<\frac{1}{2},\ 0<y<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x+y<1\}$$