

# 大学生数学 竞赛指南

DAXUESHENG SHUXUE JINGSAI ZHINAN

主编 李汉龙 隋英



国防工业出版社

National Defense Industry Press

# 大学生数学竞赛指南

中国数学会 中国数学会普及工作委员会 编  
人民教育出版社



中国数学会  
CHINESE MATHEMATICAL SOCIETY

# 大学生数学竞赛指南

主 编 李汉龙 隋 英  
参 编 艾 瑛 闫红梅  
孙常春 王 娜

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

本书是专门为高等院校参加全国大学生数学竞赛的大学本科理工科专业的大学生而编写的参考书. 全书共分5章, 内容涵盖了全国大学生数学竞赛要求内容(即高等数学、数学分析、线性代数、高等代数等). 其中第1章为大学数学竞赛概述, 在2~5章中, 每节都包含了以下三方面内容: ①核心内容提示; ②典型例题精解; ③学习效果测试题及答案. 全书例题丰富, 深入浅出, 富有启发性与可读性.

本书既可以作为大学生数学竞赛的辅导教材, 也可以作为考研重要辅助资料, 同时, 对于大学数学教师来说也是一本不可多得的教学参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛指南 / 李汉龙, 隋英主编. —北京: 国防工业出版社, 2014. 9

ISBN 978-7-118-09660-6

I. ①大... II. ①李... ②隋... III. ①高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 203137 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

\*

开本 787 × 1092 1/16 印张 22½ 字数 560 千字

2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 45.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

# 前 言

中国全国大学生数学竞赛是由中国数学会主办的面向全国大学生的课外科技活动. 竞赛的宗旨在于培养人才、服务教学、促进高等学校数学课程的改革和建设, 激励大学生学习数学的兴趣, 培养分析、解决问题的能力, 发现和选拔数学创新性人才, 给青年学子提供一个展示基础知识和思维能力的舞台. 为了帮助全国大学生更好地参加竞赛, 获取奖项, 我们根据相关资料和以往的培训经验编写了这本书.

本书的编排结构为: 第 1 章大学数学竞赛概述; 第 2 章高等数学, 主要为非数学类的学生参加大学数学竞赛进行辅导; 第 3 章数学分析, 第 4 章线性代数, 第 5 章高等代数, 这三章为数学类大学生参加大学数学竞赛进行辅导. 从第 2 章开始, 每一章内容的每一节都包含以下三方面.

(1) 核心内容提示: 本部分的目的是使考生明白竞赛考试常考内容和考试要求, 从而在复习时有明确的目标和重点.

(2) 典型例题精解: 本部分对历年竞赛真题中常见的题型进行归纳分类, 总结各种题型的解题方法, 注重一题多解, 以便能够开阔考生的解题思路, 使所学知识融会贯通, 并能灵活地解决问题. 针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的的错误, 每个例题都给出了详细的解题思路分析和解答, 并在解答后给出相应的评注, 对考试大纲所要求的知识点进行了阐述, 同时对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析, 每个例题后面还给出了 5 道同类型的练习题, 只要认真练习, 就可掌握该例题的思想方法.

(3) 学习效果测试题及答案: 只有适量的练习才能巩固所学的知识, 数学复习离不开做题. 为了使考生更好地巩固所学知识, 提高实际解题能力, 本书作者在第 2~5 章中的每一节后都精心设计了相应的学习效果测试题, 并给出了答案提示, 供考生进行测试练习使用.

附录中提供了自 2009 年首届中国大学生数学竞赛开始以来的部分竞赛真题及答案, 供考生自测之用. 本书主要通过具体的实例, 使读者一步一步地随着作者的思路来完成竞赛数学知识点的学习. 书中所给实例具有技巧性而又道理显然, 可使读者思路畅达, 将所学知识融会贯通, 灵活运用, 以达到事半功倍之效. 本书将会成为读者竞赛的良师益友. 本书所使用的部分竞赛真题资料来自于互联网. 我们使用这些资料, 目的是希望给读者提供更为完善的学习帮助.

本书第 1 章由孙常春编写; 第 2 章由李汉龙编写; 第 3 章由隋英编写; 第 4 章由艾瑛编写;

第5章由闫红梅编写.另外由李汉龙根据网络资料编写了附录和前言.全书由李汉龙统稿,李汉龙、隋英审稿.另外,本书的编写和出版得到了国防工业出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢!

本书参考了国内出版的一些教材和竞赛辅导书,见本书所附参考文献,在此表示谢意.由于水平所限,书中不足之处在所难免,恳请读者、同行和专家批评指正。

编者  
2014年7月

# 目 录

第 1 章 大学数学竞赛概述	1
1.1 大学数学与大学数学竞赛	1
1.1.1 大学数学与大学数学竞赛的基本概念	1
1.1.2 大学数学竞赛对大学生素质能力培养的作用	1
1.2 中国全国大学数学竞赛分类与竞赛的一般步骤和方法	1
1.2.1 中国全国大学数学竞赛的分类	1
1.2.2 中国全国大学数学竞赛的一般步骤	1
1.2.3 中国全国大学数学竞赛的方法	2
1.3 中国全国大学生数学竞赛简介与竞赛大纲	2
1.3.1 中国全国大学生数学竞赛简介	2
1.3.2 中国全国大学生数学竞赛大纲	2
第 2 章 高等数学	10
2.1 导数与偏导数	10
2.1.1 核心内容提示	10
2.1.2 典型例题精解	10
2.1.3 学习效果测试题及答案	29
2.2 定积分与重积分	33
2.2.1 核心内容提示	33
2.2.2 典型例题精解	34
2.2.3 学习效果测试题及答案	50
2.3 曲线积分与曲面积分	53
2.3.1 核心内容提示	53
2.3.2 典型例题精解	53
2.3.3 学习效果测试题及答案	67
2.4 数列与级数	70
2.4.1 核心内容提示	70
2.4.2 典型例题精解	70
2.4.3 学习效果测试题及答案	91
2.5 常微分方程	94
2.5.1 核心内容提示	94
2.5.2 典型例题精解	94
2.5.3 学习效果测试题及答案	108

2.6	空间解析几何	110
2.6.1	核心内容提示	110
2.6.2	典型例题精解	111
2.6.3	学习效果测试题及答案	118
<b>第3章</b>	<b>数学分析</b>	<b>120</b>
3.1	分析基础	120
3.1.1	核心内容提示	120
3.1.2	典型例题精解	120
3.1.3	学习效果测试题及答案	132
3.2	微分与积分	135
3.2.1	核心内容提示	135
3.2.2	典型例题精解	136
3.2.3	学习效果测试题及答案	148
3.3	级数与不等式	151
3.3.1	核心内容提示	151
3.3.2	典型例题精解	151
3.3.3	学习效果测试题及答案	160
<b>第4章</b>	<b>线性代数</b>	<b>163</b>
4.1	行列式	163
4.1.1	核心内容提示	163
4.1.2	典型例题精解	163
4.1.3	学习效果测试题及答案	180
4.2	矩阵	184
4.2.1	核心内容提示	184
4.2.2	典型例题精解	184
4.2.3	学习效果测试题及答案	197
4.3	线性方程组	200
4.3.1	核心内容提示	200
4.3.2	典型例题精解	200
4.3.3	学习效果测试题及答案	216
4.4	二次型	219
4.4.1	核心内容提示	219
4.4.2	典型例题精解	219
4.4.3	学习效果测试题及答案	235
<b>第5章</b>	<b>高等代数</b>	<b>239</b>
5.1	多项式	239
5.1.1	核心内容提示	239
5.1.2	典型例题精解	239



5.1.3	学习效果测试题及答案 .....	256
5.2	若当标准形 .....	259
5.2.1	核心内容提示 .....	259
5.2.2	典型例题精解 .....	259
5.2.3	学习效果测试题及答案 .....	279
5.3	线性空间与线性变换 .....	283
5.3.1	核心内容提示 .....	283
5.3.2	典型例题精解 .....	283
5.3.3	学习效果测试题及答案 .....	307
附录 I	2009—2013 年中国全国大学生数学竞赛预赛试卷(非数学类)及答案 .....	312
附录 II	2009—2013 年中国全国大学生数学竞赛预赛试卷(数学类)及部分答案 .....	333
附录 III	2010—2014 年中国全国大学生数学竞赛决赛试题(非数学类) .....	341
附录 IV	2010—2012 年中国全国大学生数学竞赛决赛试题(数学类) .....	346
参考文献	.....	350

# 第1章 大学数学竞赛概述

## 1.1 大学数学与大学数学竞赛

### 1.1.1 大学数学与大学数学竞赛的基本概念

大学数学:大学理工科专业主要以高等数学为主,同时包括线性代数、概率论与数理统计;大学理科数学专业主要以数学分析、高等代数和解析几何为主,同时包括常微分方程、运筹学、概率论与数理统计、复变函数与积分变换、实变函数、泛函分析、数值分析等.

大学数学竞赛:包括数学专业竞赛和非数学专业竞赛,每年举行一次.数学专业竞赛内容包括数学分析、高等代数和解析几何.非数学专业竞赛内容仅为高等数学.

### 1.1.2 大学数学竞赛对大学生素质能力培养的作用

大学数学竞赛对大学生各方面素质能力的培养起到了非常重要的作用.大学数学竞赛可以在很大程度上能激发大学生学习数学的兴趣.相对其他的大学课程,对大学数学知识点的理解和掌握相对较困难,这导致部分学生对大学数学的学习积极性不高,但通过举办大学数学竞赛,将会增强学生学习大学数学的主动性、自觉性和积极性.同时,大学数学竞赛能培养大学生的抽象思维能力、空间想象能力和逻辑推理能力,对后继大学课程的顺利学习、参加工程实践和考取研究生等铺平了道路.大学数学竞赛能培养大学生独立思考、分析问题和解决问题的能力,同时也能增强大学生的科学研究能力和创新能力.大学数学竞赛能培养大学生的科学文化素养和锻炼意志力.因此,大学数学竞赛对大学生素质能力的培养起到了积极的作用.

## 1.2 中国全国大学数学竞赛分类与竞赛的一般步骤和方法

### 1.2.1 中国全国大学数学竞赛的分类

中国全国大学生数学竞赛分为数学专业类竞赛和非数学专业类竞赛.

(1) 中国全国大学生数学竞赛(数学专业类)竞赛内容为大学本科数学专业基础课的教学内容,即数学分析占50%,高等代数占35%,解析几何占15%.

(2) 中国全国大学生数学竞赛(非数学专业类)竞赛内容为大学本科理工科专业高等数学课程的教学内容.

### 1.2.2 中国全国大学数学竞赛的一般步骤

- (1) 了解全国大学生数学竞赛的赛事.
- (2) 按照全国大学生数学竞赛的大纲来认真复习备考.
- (3) 竞赛报名,确定报考类别(数学类和非数学类).

- (4) 分区赛选拔.
- (5) 参加全国决赛.

### 1.2.3 中国全国大学数学竞赛的方法

- (1) 按全国大学数学竞赛大纲总结和归纳知识点.
- (2) 熟练掌握大学数学的基本理论、数学公式和计算方法.
- (3) 平时多做些与数学竞赛难度相当的课外题.
- (4) 认真做一遍历届全国大学数学竞赛真题,找出薄弱环节.
- (5) 考试时,放好心态,尽量挖掘自身的数学潜能.
- (6) 考试时,先做相对简单的题,最后做相对难的题.
- (7) 遇到难题时,分析解题的思路很重要,寻找适当的解题方法.
- (8) 注意数学知识的综合运用和灵活运用.

## 1.3 中国全国大学生数学竞赛简介与竞赛大纲

### 1.3.1 中国全国大学生数学竞赛简介

中国全国大学生数学竞赛是由中国数学会主办的面向全国大学生的课外科技活动.竞赛的宗旨在于培养人才、服务教学、促进高等学校数学课程的改革和建设,激励大学生学习数学的兴趣,培养大学生分析、解决问题的能力,发现和选拔数学创新性人才,为青年学子提供一个展示基础知识和思维能力的舞台.

竞赛的参赛对象为大学本科二年级及二年级以上的在校大学生.分数学专业类和非数学专业类,数学专业类的大学生不能参加非数学专业类的竞赛.数学专业类竞赛的内容包括数学分析、高等代数和解析几何;非数学专业类竞赛的内容为高等数学.

竞赛包括分区赛和决赛两部分.分区赛由各分区数学会分别组织进行,选拔出分区赛的一、二、三等奖,获得分区赛一等奖的大学生参加全国大学生数学竞赛决赛,最终评选出国家一、二、三等奖.

首届中国全国大学生数学竞赛由国防科技大学承办,分区赛于2009年10月举行,决赛于2010年5月举行.全国大学生数学竞赛自从2009年成功举办第一届以来,每年举办一次,是继全国大学生数学建模竞赛的又一重要数学赛事.

### 1.3.2 中国全国大学生数学竞赛大纲

中国全国大学生数学竞赛试题分为数学专业类竞赛试题和非数学专业类竞赛试题.

中国全国大学生数学竞赛(数学专业类)竞赛内容为大学本科数学专业基础课的教学内容,即数学分析占50%,高等代数占35%,解析几何占15%,具体内容如下:

#### 数学分析

##### 一、集合与函数

(1) 实数集 $\mathbf{R}$ 、有理数与无理数的稠密性,实数集的界与确界、确界存在性定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理.

(2)  $\mathbf{R}^2$  上的距离、邻域、聚点、界点、边界、开集、闭集、有界(无界)集、 $\mathbf{R}^2$  上的闭矩形套定理、聚点定理、有限覆盖定理、基本点列,以及上述概念和定理在  $\mathbf{R}^n$  上的推广.

(3) 函数、映射、变换概念及其几何意义,隐函数概念,反函数与逆变换,反函数存在性定理,初等函数以及与之相关的性质.

## 二、极限与连续

(1) 数列极限、收敛数列的基本性质(极限唯一性、有界性、保号性、不等式性质).

(2) 数列收敛的条件(柯西准则、迫敛性、单调有界原理、数列收敛与其子列收敛的关系),极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  及其应用.

(3) 一元函数极限的定义、函数极限的基本性质(唯一性、局部有界性、保号性、不等式性质、迫敛性),归结原则和柯西收敛准则,两个重要极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  及其应用,计算一元函数极限的各种方法,无穷小量与无穷大量、阶的比较,记号  $O$  与  $o$  的意义,多元函数重极限与累次极限概念、基本性质,二元函数的二重极限与累次极限的关系.

(4) 函数连续与间断、一致连续性、连续函数的局部性质(局部有界性、保号性),有界闭集上连续函数的性质(有界性、最大值最小值定理、介值定理、一致连续性).

## 三、一元函数微分学

(1) 导数及其几何意义、可导与连续的关系、导数的各种计算方法,微分及其几何意义、可微与可导的关系、一阶微分形式不变性.

(2) 微分学基本定理:费马定理,罗尔定理,拉格朗日定理,柯西定理,泰勒公式(皮亚诺余项与拉格朗日余项).

(3) 一元微分学的应用:函数单调性的判别、极值、最大值和最小值、凸函数及其应用、曲线的凹凸性、拐点、渐近线、函数图像的讨论、洛必达法则、近似计算.

## 四、多元函数微分学

(1) 偏导数、全微分及其几何意义,可微与偏导存在、连续之间的关系,复合函数的偏导数与全微分,一阶微分形式不变性,方向导数与梯度,高阶偏导数,混合偏导数与顺序无关性,二元函数中值定理与泰勒公式.

(2) 隐函数存在定理、隐函数组存在定理、隐函数(组)求导方法、反函数组与坐标变换.

(3) 几何应用(平面曲线的切线与法线、空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线).

(4) 极值问题(必要条件与充分条件),条件极值与拉格朗日乘数法.

## 五、一元函数积分学

(1) 原函数与不定积分、不定积分的基本计算方法(直接积分法、换元法、分部积分法)、有理函数积分:  $\int R(\cos x, \sin x) dx$  型,  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  型.

(2) 定积分及其几何意义、可积条件(必要条件、充要条件:  $\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ )、可积函数类.

(3) 定积分的性质(关于区间可加性、不等式性质、绝对可积性、定积分第一中值定理)、变上限积分函数、微积分基本定理、牛顿—莱布尼茨公式及定积分计算、定积分第二中值定理.

(4) 无限区间上的广义积分、柯西收敛准则、绝对收敛与条件收敛、 $f(x)$  非负时

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  的收敛性判别法(比较原则、柯西判别法)、阿贝尔判别法、狄利克雷判别法、无界函数广义积分概念及其收敛性判别法.

(5) 微元法、几何应用(平面图形面积、已知截面面积函数的体积、曲线弧长与弧微分、旋转体体积),其他应用.

## 六、多元函数积分学

(1) 二重积分及其几何意义、二重积分的计算(化为累次积分、极坐标变换、一般坐标变换).

(2) 三重积分、三重积分计算(化为累次积分、柱坐标、球坐标变换).

(3) 重积分的应用(体积、曲面面积、重心、转动惯量等).

(4) 含参量正常积分及其连续性、可微性、可积性,运算顺序的可交换性.含参量广义积分的一致收敛性及其判别法,含参量广义积分的连续性、可微性、可积性,运算顺序的可交换性.

(5) 第一型曲线积分、曲面积分的概念、基本性质、计算.

(6) 第二型曲线积分概念、性质、计算;格林公式,平面曲线积分与路径无关的条件.

(7) 曲面的侧、第二型曲面积分的概念、性质、计算,奥高公式、斯托克斯公式,两类线积分、两类面积分之间的关系.

## 七、无穷级数

### 1. 数项级数

级数及其敛散性,级数的和,柯西准则,收敛的必要条件,收敛级数基本性质;正项级数收敛的充分必要条件,比较原则、比式判别法、根式判别法以及它们的极限形式;交错级数的莱布尼茨判别法;一般项级数的绝对收敛、条件收敛性、阿贝尔判别法、狄利克雷判别法.

### 2. 函数项级数

函数列与函数项级数的一致收敛性、柯西准则、一致收敛性判别法(M-判别法、阿贝尔判别法、狄利克雷判别法)、一致收敛函数列、函数项级数的性质及其应用.

### 3. 幂级数

幂级数概念、阿贝尔定理、收敛半径与区间,幂级数的一致收敛性,幂级数的逐项可积性、可微性及其应用,幂级数各项系数与其和函数的关系、函数的幂级数展开、泰勒级数、麦克劳林级数.

### 4. 傅里叶级数

三角级数、三角函数系的正交性、 $2\pi$  及  $2l$  周期函数的傅里叶级数展开、贝塞尔不等式、黎曼—勒贝格定理、按段光滑函数的傅里叶级数的收敛性定理.

## 高等代数

### 一、多项式

(1) 数域与一元多项式的概念.

(2) 多项式整除、带余除法、最大公因式、辗转相除法.

(3) 互素、不可约多项式、重因式与重根.

(4) 多项式函数、余数定理、多项式的根及性质.

(5) 代数基本定理、复系数与实系数多项式的因式分解.

(6) 本原多项式、高斯引理、有理系数多项式的因式分解、爱森斯坦判别法、有理数域上多

项式的有理根.

(7) 多元多项式及对称多项式、韦达定理.

## 二、行列式

(1)  $n$  级行列式的定义.

(2)  $n$  级行列式的性质.

(3) 行列式的计算.

(4) 行列式按一行(列)展开.

(5) 拉普拉斯展开定理.

(6) 克拉默法则.

## 三、线性方程组

(1) 高斯消元法、线性方程组的初等变换、线性方程组的一般解.

(2)  $n$  维向量的运算与向量组.

(3) 向量的线性组合、线性相关与线性无关、两个向量组的等价.

(4) 向量组的极大无关组、向量组的秩.

(5) 矩阵的行秩、列秩、秩、矩阵的秩与其子式的关系.

(6) 线性方程组有解判别定理、线性方程组解的结构.

(7) 齐次线性方程组的基础解系、解空间及其维数

## 四、矩阵

(1) 矩阵的概念、矩阵的运算(加法、数乘、乘法、转置等运算)及其运算律.

(2) 矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系.

(3) 矩阵的逆、伴随矩阵、矩阵可逆的条件.

(4) 分块矩阵及其运算与性质.

(5) 初等矩阵、初等变换、矩阵的等价标准形.

(6) 分块初等矩阵、分块初等变换.

## 五、双线性函数与二次型

(1) 双线性函数、对偶空间.

(2) 二次型及其矩阵表示.

(3) 二次型的标准形、化二次型为标准形的配方法、初等变换法、正交变换法.

(4) 复数域和实数域上二次型的规范形的唯一性、惯性定理.

(5) 正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵

## 六、线性空间

(1) 线性空间的定义与简单性质.

(2) 维数、基与坐标.

(3) 基变换与坐标变换.

(4) 线性子空间.

(5) 子空间的交与和、维数公式、子空间的直和.

## 七、线性变换

(1) 线性变换的定义、线性变换的运算、线性变换的矩阵.

(2) 特征值与特征向量、可对角化的线性变换.

(3) 相似矩阵、相似不变量、哈密尔顿—凯莱定理.

(4) 线性变换的值域与核、不变子空间.

## 八、若当标准形

(1)  $\lambda$  - 矩阵.

(2) 行列式因子、不变因子、初等因子、矩阵相似的条件.

(3) 若当标准形.

## 九、欧几里得空间

(1) 内积和欧几里得空间、向量的长度、夹角与正交、度量矩阵.

(2) 标准正交基、正交矩阵、施密特正交化方法.

(3) 欧几里得空间的同构.

(4) 正交变换、子空间的正交补.

(5) 对称变换、实对称矩阵的标准形.

(6) 主轴定理、用正交变换化实二次型或实对称矩阵为标准形.

(7) 酉空间.

# 解析几何

## 一、向量与坐标

(1) 向量的定义、表示、向量的线性运算、向量的分解、几何运算.

(2) 坐标系的概念、向量与点的坐标及向量的代数运算.

(3) 向量在轴上的射影及其性质、方向余弦、向量的夹角.

(4) 向量的数量积、向量积和混合积的定义、几何意义、运算性质、计算方法及应用.

(5) 应用向量求解一些几何、三角问题.

## 二、轨迹与方程

(1) 曲面方程的定义:普通方程、参数方程(向量式与坐标式之间的互化)及其关系.

(2) 空间曲线方程的普通形式和参数方程形式及其关系.

(3) 建立空间曲面和曲线方程的一般方法、应用向量建立简单曲面、曲线的方程.

(4) 球面的标准方程和一般方程、母线平行于坐标轴的柱面方程.

## 三、平面与空间直线

(1) 平面方程、直线方程的各种形式,方程中各有关字母的意义.

(2) 从决定平面和直线的几何条件出发,选用适当方法建立平面、直线方程.

(3) 根据平面和直线的方程,判定平面与平面、直线与直线、平面与直线间的位置关系.

(4) 根据平面和直线的方程及点的坐标判定有关点、平面、直线之间的位置关系、计算他们之间的距离与交角等;求两异面直线的公垂线方程.

## 四、二次曲面

(1) 柱面、锥面、旋转曲面的定义,求柱面、锥面、旋转曲面的方程.

(2) 椭球面、双曲面与抛物面的标准方程和主要性质,根据不同条件建立二次曲面的标准方程.

(3) 单叶双曲面、双曲抛物面的直纹性及求单叶双曲面、双曲抛物面的直母线的方法.

(4) 根据给定直线族求出它表示的直纹面方程,求动直线和动曲线的轨迹问题.

## 五、二次曲线的一般理论

(1) 二次曲线的渐进方向、中心、渐近线.

- (2) 二次曲线的切线、二次曲线的正常点与奇异点.
- (3) 二次曲线的直径、共轭方向与共轭直径.
- (4) 二次曲线的主轴、主方向,特征方程、特征根.
- (5) 化简二次曲线方程并画出曲线在坐标系的位置草图.

中国大学生数学竞赛(非数学专业类)竞赛内容为大学本科理工科专业高等数学课程的教学内容,具体内容如下:

## 高等数学

### 一、函数、极限、连续

- (1) 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.
- (2) 函数的性质:有界性、单调性、周期性和奇偶性.
- (3) 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.
- (4) 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.
- (5) 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.
- (6) 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.
- (7) 函数的连续性(含左连续与右连续)、函数间断点的类型.
- (8) 连续函数的性质和初等函数的连续性.
- (9) 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

### 二、一元函数微分学

- (1) 导数和微分的概念、导数的几何意义和物理意义、函数的可导性与连续性之间的关系、平面曲线的切线和法线.
- (2) 基本初等函数的导数、导数和微分的四则运算、一阶微分形式的不变性.
- (3) 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法.
- (4) 高阶导数的概念、分段函数的二阶导数、某些简单函数的  $n$  阶导数.
- (5) 微分中值定理,包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理.
- (6) 洛必达法则与求未定式极限.
- (7) 函数的极值、函数单调性、函数图形的凹凸性、拐点及渐近线(水平、铅直和斜渐近线)、函数图形的描绘.
- (8) 函数最大值和最小值及其简单应用.
- (9) 弧微分、曲率、曲率半径.

### 三、一元函数积分学

- (1) 原函数和不定积分的概念.
- (2) 不定积分的基本性质、基本积分公式.
- (3) 定积分的概念和基本性质、定积分中值定理、变上限定积分确定的函数及其导数、牛顿—莱布尼茨公式.
- (4) 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法.
- (5) 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分.
- (6) 广义积分.
- (7) 定积分的应用:平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力及函数的平均值.



#### 四、常微分方程

- (1) 常微分方程的基本概念:微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等.
- (2) 变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利方程、全微分方程.
- (3) 可用简单的变量代换求解的某些微分方程、可降阶的高阶微分方程: $y^{(n)} = f(x)$ ,  $y'' = f(x, y')$ ,  $y'' = f(y, y')$ .
- (4) 线性微分方程解的性质及解的结构定理.
- (5) 二阶常系数齐次线性微分方程、高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程.
- (6) 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程:自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数,以及它们的和与积.
- (7) 欧拉方程.
- (8) 微分方程的简单应用.

#### 五、向量代数和空间解析几何

- (1) 向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积.
- (2) 两向量垂直、平行的条件、两向量的夹角.
- (3) 向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦.
- (4) 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程.
- (5) 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离.
- (6) 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程、常用的二次曲面方程及其图形.

- (7) 空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

#### 六、多元函数微分学

- (1) 多元函数的概念、二元函数的几何意义.
- (2) 二元函数的极限和连续的概念、有界闭区域上多元连续函数的性质.
- (3) 多元函数偏导数和全微分、全微分存在的必要条件和充分条件.
- (4) 多元复合函数、隐函数的求导法.
- (5) 二阶偏导数、方向导数和梯度.
- (6) 空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线.
- (7) 二元函数的二阶泰勒公式.
- (8) 多元函数极值和条件极值、拉格朗日乘数法、多元函数的最大值、最小值及其简单应用.

#### 七、多元函数积分学

- (1) 二重积分和三重积分的概念及性质、二重积分的计算(笛卡尔坐标、极坐标)、三重积分的计算(笛卡尔坐标、柱面坐标、球面坐标).
- (2) 两类曲线积分的概念、性质及计算、两类曲线积分的关系.
- (3) 格林公式、平面曲线积分与路径无关的条件、已知二元函数全微分求原函数.
- (4) 两类曲面积分的概念、性质及计算、两类曲面积分的关系.
- (5) 高斯公式、斯托克斯公式、散度和旋度的概念及计算.
- (6) 重积分、曲线积分和曲面积分的应用(平面图形的面积、立体图形的体积、曲面面积、