高等学校教材

泛函分析及其在自动控制中的应用

韩崇昭　胡保生　编著

西安交通大学出版社

高等学校教材

泛函分析及其在自动控制中的应用

韩崇昭　　胡保生　编著

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是为工科自控类研究生编写的应用泛函分析教材，内容包括代数基础、度量空间、赋范线性空间、线性算子、Hilbert 空间，以及抽象控制系统分析、泛函优化与最优控制、控制问题中的数值方法等。本书还可以作为从事自动控制和系统工程等专业的教师、科研人员和工程技术人员的参考读物。

泛函分析及其在自动控制中的应用
韩崇昭　胡保生　编著
责任编辑　陆　薇
*
西安交通大学出版社出版
（邮政编码：710049）
西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店经售
*
开本　787×1092　1/16　印张 22.5　字数 549 千字
1991 年 6 月第 1 版　1991 年 6 月第 1 次印刷
印数：1——3000
ISBN7-5605-0406-X/TP · 43　定价：5.80 元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从 1978 年至 1985 年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应"三个面向"的需要，贯彻"努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材"的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了 1986—1990 年的"七五"(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近 400 种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲议中经院校推荐，由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部电子类教材办公室

序　言

本教材系按原电子工业部制定的工科电子类专业教材 1986～1990 年编审出版规划，由计算机与自动控制教材编审委员会自动控制编审小组组织征稿、评选、推荐出版的。

众所周知，控制理论和系统科学发展到今天，已不再仅仅局限于研究工业过程自动化中的理论问题，而是以惊人的速度渗透到社会、经济、工程、生物、生态和生命科学等研究领域。与此同时，控制理论和系统科学本身在最近二三十年也以惊人的速度不断地更新与发展，业已形成理论体系日臻完善的诸多分支，而其赖以发展的主要数学基础之一便是“泛函分析”。事实上，泛函分析在当今系统理论研究中占有如此重要的地位，以至于不掌握这一数学工具，就无法深入到控制理论和系统科学的研究前沿。

本书是根据笔者近年来在西安交通大学给自控类博士研究生讲授《泛函分析及其在自动控制中的应用》课程的讲稿整理而成，旨在向工科自动控制、系统工程等专业研究生提供一本适用的应用泛函分析教材。笔者努力使本教材既适应工科自控类研究生的数学基础和专业需要，又能保持泛函分析理论体系的严谨性和完整性。为此，我们并没有完全采用数学专业相应教材的体系，而是由介绍代数基础知识入手，引入各种抽象数学系统，包括抽象控制系统的概念，然后转入线性泛函分析的有关内容，最后讨论其在控制理论诸分支中的应用，并且涉及非线性泛函分析的初步知识。我们并不要求读者具备实分析的基础，而把其内容割裂开来，穿插在有关章节中。对于内容较难的章节，标题用“*”号标出，读者根据需要可以跨过这些章节，只须知道某些结论而不必追究其论证细节，并不影响以后各章节内容的学习。

本书初稿曾经北京理工大学吴沧浦教授和西安交通大学张文修教授仔细审阅，提出了许多宝贵的修改意见；而本书的整理出版也受到上海交通大学张钟俊教授和西安交通大学万百五教授、李人厚教授的鼓励和支持，笔者一并深表感谢。同时，笔者也要感谢曾使用本书初稿的诸位博士研究生，他们不仅完成了书中大部分习题的演算或证明，而且对修改定稿提出了许多有益的建议。

限于笔者的学识水平，初稿虽几经修改，书中的错误或不妥之处仍在所难免，敬请广大读者不吝赐教。

韩崇昭　　胡保生

1990 年 5 月于西安交通大学

符号说明

$\in$ 属于；
$\varnothing$ 空集；
$\subseteq$ 蕴含于；
$\subset$ 真蕴含于；
$\forall$ 所有的；
$\exists$ 存在；
$\Rightarrow$ 推出；
$\Leftrightarrow$ 等价；
$\cup$ 集合并运算；
$\cap$ 集合交运算；
$\setminus$ 集合差运算；
$\triangle$ 集合对称差；
$\prod$ 连乘符；
$\sum$ 连加符；
$\sim$ 对等；
$\cong$ 同构；
$\dotplus$ 直和；
$\oplus$ 直交和；
$\perp$ 垂直；
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 线性泛函或内积；
$\|\cdot\|$ 范数；
$|\cdot|$ 绝对值或模；
A^C 集合 A 的余集；
A^T 矩阵 A 的转置；
A^* 矩阵 A 的转置共轭；
${}^\perp A$ 集合 A 的左直交补；
$\alpha(T)$ 算子 T 的零数；
$B^\perp$ 集合 B 的右直交补；
$B(x_0,r)$ 以 x_0 为中心，以 r 为半径的闭球；
$\beta(T)$ 算子 T 的亏数；
$C_{[a,b]}$ [a,b]区间上的连续函数空间；
$C^m_{[a,b]}$ [a,b]区间上 m 次连续可微函数空间；
$C^\infty_{[a,b]}$ [a,b]区间上任意次连续可微函数空间；
C 复数域；
C^n n 维复空间；
$\mathrm{d}T(x_0)$ 算子 T 在 x_0 的 Fréchet 微分；
$\mathrm{D}T(x_0)$ 算子 T 在 x_0 的 Gateaux 微分；
dia 直径；
diag 对角；
dim 维数；
dis 距离；
$\mathscr{D}(T)$（或 $\mathrm{dom}T$） 算子 T 的定义域；
$\mathscr{E}=(E_\lambda)$ 谱族；
ess sup 本质上确界；
$\mathscr{F}$ 数域 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$；
$\boldsymbol{G}$ 有理数域；
$\mathscr{G}(T)$（或 $\mathrm{graph}T$） 算子 T 的图象；
$\mathscr{K}(X,Y)$ 赋范线性空间 X 到 Y 的紧算子空间；
inf 下确界；
iff 当且仅当；
int A 集合 A 的内部；
I 指标集或恒等算子；
$\mathscr{I}_m x$ 复变量 x 的虚部；
J 目标函数；
χ 示性函数；
$\chi(T)$ 算子 T 的指标；
lim 极限；
$\overline{\lim}$ 上限；
$\underline{\lim}$ 下限；
l^p p 方和收敛数列空间；
l^∞ 有界数列空间；
$L^p_{[a,b]}$ $[a,b]$区间上 p 方可积函数空间；
$L^\infty_{[a,b]}$ $[a,b]$区间上本质有界函数空间；
$\mathscr{L}(X,Y)$ 赋范线性空间 X 到 Y 的有界线性算子空间；

max 最大；
min 最小；
$N(x_0,r)$ 以 x_0为中心，以 r 为半径的开球；
$\boldsymbol{N}$ 自然数集；
$\mathscr{N}(T)$ 算子 T 的零空间；
$\rho(T)$ 算子 T 的预解集；
$\rho(x,y)$ x 与 y 的距离函数；
$\sigma(T)$ 算子 T 的谱（集）；
$\sigma_c(T)$ 算子 T 的连续谱；
$\sigma_p(T)$ 算子 T 的点谱；
$\sigma_r(T)$ 算子 T 的剩余谱；
R 关系；
$\boldsymbol{R}$ 实数域；
$\boldsymbol{R}^n$ n 维实空间；
$\boldsymbol{R}^+$ 非负实数集；
$\bar{\boldsymbol{R}}$ 广义实数集 $R\cup\{\infty\}$；
$\mathscr{R}(T)$（或 range$T$） 算子 T 的值域；
$\mathscr{R}_e x$ 复变量 x 的实部；
sgn 符号函数；
span 张成；
s·t· 受约束于；
sup 上确界；
supp φ 函数 φ 的支集；
$S(x_0,r)$ 以 x_0为中心，以 r 为半径的球面；
$T:A\to B$ A 到 B 的映射（或算子）；
T^* 算子 T 的伴随算子；
$\mathscr{T}_t$ 算子半群；
X^* 线性空间 X 的对偶空间；
$\boldsymbol{Z}$ 整数集；
$\boldsymbol{Z}^+$ 非负整数集。

目　录

第一章　绪　　论

人们在研究各种自然系统、社会经济系统和工程系统时，发现其内在机理有神奇的相似之处，它们都可以用同一的数学工具进行描述和分析，而针对某一特定类型系统研究的结论，也很容易移植到另一类型的系统。系统科学或系统工程，正是研究各种系统共同规律的一门边缘学科，而控制理论则偏重于研究人或外部因素对系统行为的作用。

控制理论、系统工程以及其它应用学科的现代研究方法，往往首先需要建立一个用于描述对象特征的数学模型，进而利用这些模型来分析其静态或动态的行为，诸如稳定性、能控性、能观性、能镇定性等等；或者设计某个控制策略或决策方案，从而产生对系统的有效控制作用，使之按人们预期的目标发展。而现实的对象，除了极少数可利用物理定律或社会经济规律进行机理建模之外，大多数需要利用实测数据，按照某种方法，借用计算机辨识建模。对于系统的分析或控制，除了要求掌握专门领域的知识之外，都需要掌握各种数学方法和计算工具。当代计算机技术的辉煌成就，给人们提供了这种研究的可能性，而现代数学理论的发展，已经和正在不断地为控制理论和系统科学提供强有力的分析和计算方法。本书将向读者介绍泛函分析的基本理论体系，及其在控制理论和系统科学诸分支中的应用。

泛函分析的研究对象

何谓“泛函分析”？根据关肇直先生给出的定义，“泛函分析是研究无穷维线性空间上的泛函数与算子理论的一门分析数学。无穷维线性空间是描述具无限多自由度的物理系统的数学工具。因此，泛函分析是定量地研究诸如连续介质力学、电磁场理论等一类具有无穷多自由度的物理系统的有力工具”[1]。

所谓物理系统（包括社会经济系统）的自由度，是指用于完全描述系统行为的一组无关量的个数。要澄清泛函分析研究对象的特征，需要考察数学诸分支与自然科学之间的联系。

事实上，经典的数学分析是与经典力学的成就密切相关的，主要用来描述和分析物质作有限自由度连续运动的各种特性。在此，主要研究一元函数或多元函数的性态，诸如单调性、连续性、可微性和可积性等，对连续函数建立了各种微积分运算。与此同时，数学的抽象把三维立体空间中向量的概念，推广到任意有限维线性空间；同时把力学中简单的坐标变换，推广到一般的线性变换，并且由此引出矩阵对线性变换的表示，以及矩阵的运算等，这些都是线性代数的研究内容。常微分方程理论讨论集中参数对象连续运动过程的数学描述，以及运动轨线即微分方程解的存在性与唯一性问题，而且讨论连续运动过程的稳定性问题，并给出自由运动或受迫运动中运动轨线的求解方法。这种运动也只具有限多自由度，因为我们只考虑特定的系统，以及单个特定函数作用于系统所产生的行为。在电学理论和经典调节原理中，一种广泛适用的频域分析方法要求把函数的定义域由实数扩展到复数，而复变函数论则是专门讨论复变函数性态和数学分支，它给包括 Fourier 变换和 Laplace 变换在内的各种频域分析方法，提供了坚实的理论基础。同样，电学理论和经典调节原理的研究对象，一般也只具有限多自由度。

然而，连续介质力学、电磁场理论等的研究对象，一般是分布参数系统，需要用偏微分方程

来描述，而完全描述系统行为的一组无关量有无限多个，即系统具无限多自由度。与此同时，现代控制理论和系统科学，已经由研究单个特定函数作用于系统时所产生的行为，扩展到研究一类函数作用于系统时可能产生的行为。这样的一类函数或称函数类、函数空间同样具无限多自由度。而定义于其上的泛函数或算子，则可用来描述系统的行为或其中的各种关系。

不仅如此，因为有限维线性空间是无限维线性空间的特例，有限自由度运动是无限自由度运动的特例，泛函分析的结论对作有限多自由度运动的对象，也仍然是适用的。

泛函分析的研究内容

泛函分析的基本概念形成于上世纪末到本世纪初，而作为一门独立的数学分支则出现于本世纪30年代。40至50年代的发展，使其成为一门足够成熟的学科。它不断地渗透到各种应用领域，包括连续介质力学、电磁场理论，控制理论和系统科学等。

在某种意义上说，泛函分析提供了一种知识框架，它把数学分析中有关函数性态分析的结论，线性代数中有关向量与向量空间、线性变换的概念，古典变分法中关于泛函变分的概念，微分方程中定性分析与求解的概念等，纳入统一的框架中；同时按泛函分析的理论体系，给出统一的分析和处理。

在泛函分析中，首先要把有限维向量空间的概念，推广到一般线性空间，包括由函数类形成的无限维线性空间，接着要讨论一类在元素间定义了距离的集合，称为"度量空间"。在度量空间中，才有可能定义点序列的收敛，并由此引出点集的某些拓扑概念，同时还讨论定义于其上的泛函数与算子的某些性质。一类特殊的度量空间称为"赋范线性空间"，它兼有线性空间的代数结构和赋范数的拓扑结构，是用以描述具无限多自由度运动过程的一般数学工具。而在赋范线性空间中，又有一类更接近有限维空间(欧氏空间)特性的无限维线性空间，称为"内积空间"，其上定义了内积，类似欧氏空间上向量间的标量积，从而可以引入向量间的夹角、向量直交等概念。对各种抽象空间的研究，是泛函分析的研究内容之一。

其次，在泛函分析中，还要把有限维空间上的线性变换推广到一般度量空间上的算子理论，特别是赋范线性空间上的线性算子理论。事实上，相当广泛的一类实际系统，都可以用某些抽象空间，以及存在于这些空间上的算子来描述。算子理论，特别是线性算子理论，这是泛函分析的主要研究内容。算子的性态，诸如连续性、有界性、紧性和闭性等，又是算子理论研究的重点。算子方程求解及线性算子的能解性研究，给各种代数方程和微分方程求解，以及控制系统综合等，提供了理论基础。对偶空间和伴随算子的研究，是算子理论的一个主要组成部分。在算子理论中，还要把矩阵特征值的概念，推广到一般线性算子的谱特性。

线性泛函分析是本书讨论的重点，同时还涉及非线性泛函分析的基本知识，特别是有关凸集和凸泛函的凸分析理论，这对比较广泛的一类泛函求极值问题有着重要意义。非线性泛函分析还要把有限维线性空间上函数微积分的概念，推广到无限维线性空间上算子的微积分。

泛函分析在控制理论中的应用

因为控制理论中几乎所有的问题，都可以用泛函分析中有关空间和算子的术语来描述，而泛函分析严谨广博的理论体系，对所研究问题的归属有明确的规定，同时可以向研究者提供解决问题的途径。例如，利用对偶空间和伴随算子的理论，可以解释控制理论中几乎所有的对偶定理，而这些定理的发现，大多也是数学结论直接演绎的结果。

控制理论所研究的问题，可以概括为系统分析、系统综合、建模和优化。系统分析，包括系统的稳定性分析、能控能观性分析、鲁棒性分析等，主要是分析用以描述系统行为的算子的特性。传统的分析方法是实用的，但只限于某些特定的系统类型。例如传统的频域分析法只限于讨论单输入单输出的线性定常系统。而泛函分析所提供的分析方法，有可能对包括多输入多输出的线性时变系统、分布参数线性系统，以及某些类型的非线性系统进行统一的处理，从而获得更加一般的结论。系统的综合，包括控制器和补偿器的设计等，使系统得以镇定或获得某种性能，这是分析的逆问题。传统的综合方法不仅费时费事，而且解决问题的范围比较狭窄。现代的综合方法倾向于构造能用计算机实现的某些算法。迭代算法或递推算法的收敛性分析，以及闭环控制的稳定性分析等，只有借助于泛函分析所提供的工具，才有可能使问题得以解决。系统建模和系统的最优控制，一般是在某些约束条件下，对某个泛函指标进行优化的问题，这更是泛函分析研究范围内的问题。

综上所述，泛函分析已渗透到控制理论和系统科学的各个分支。“欲穷千里目，更上一层楼”，控制理论研究者只有掌握泛函分析这一工具，才有可能一览当今研究潮流中“群峰竞秀，万水争流”的局面。

第二章　代数基础

鉴于工科大学自动控制类专业研究生并不具备系统的抽象代数的知识，而泛函分析这门课程又经常涉及抽象代数的某些基本概念，所以首先在本章对必要的代数基础知识进行简要介绍，作为学习泛函分析的预备知识。

§2.1　集合与映射

2.1.1　集合

集合是数学上最基本的概念，难以给出确切的定义。一般说，所谓**集合**就是指具有某种属性的事物全体。构成集合的每个事物称为该集合的**元素**。集合也简称**集**，其元素也简称**元**。

集合可用列写其所有元素或注明其属性来表示，如

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},A=\{a:a\text{ 具有属性 P}\} \tag{2.1.1}$$

如果一个集合由有限多个元构成，称之为**有限集**；如果由无限多个元构成，称之为**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$；只含一个元的集合称为**单点集**。

用$a\in A$表示"a是A中的元"或"a属于A"；用$a\notin A$表示"a不是A中的元"或"a不属于A"。

有两个集合A和B，若A中的所有元均为B中的元，则称为A是B的**子集**，或A蕴含于B，或B包含A，记为$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$。

任意集A必是其自身的子集，而空集$\varnothing$又是任意集A的子集

若集A是集B的子集，而B中至少有一个元不属于A，则称A是B的**真子集**，或B真包含A，记为$A\subset B$，或$B\supset A$。

若集A是集B的子集，且B也是A的子集，则称集A与集B**相等**，记为$A=B$。

这个定义也经常用作集合相等的证明方法，即任取$x\in A$，证得$x\in B$，则推知$A\subseteq B$；其次任取$x\in B$，证得$x\in A$，则推知$B\subseteq A$；从而证明$A=B$。在以后的证明中，我们经常采用某些惯用符号："$\forall$"表示"所有的"，"$\exists$"表示"存在"，"$\Rightarrow$"表示"由左面的结论推出右面的结论"，"$\Leftrightarrow$"表示"左右两面相互推出"。

以集合为元素的集合称为**集类**。如$\mathscr{F}=\{A,B,C\}$，其中的元A,B,C均是集合，$\mathscr{F}$是集类。

A、B两个集合的所有元素共同构成的集合称为A和B的**并集**，记为

$$A\cup B=\{x:x\in A\text{ 或 }x\in B\} \tag{2.1.2}$$

集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并集定义为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x:x\in A_1,\text{或 }x\in A_2,\cdots,\text{或 }x\in A_n\} \tag{2.1.3}$$

A、B两个集合的公共元素构成的集合称为A和B的**交集**，记为

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{ 且 }x\in B\} \tag{2.1.4}$$

集合 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 的交集定义为

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x:x \in A_1,且\ x \in A_2,\cdots,且\ x \in A_n\} \tag{2.1.5}$$

如果集合 A 与集合 B 没有公共元素，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B **不相交**。

属于集 A 而不属于集 B 的所有元构成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记为

$$A\backslash B = \{x:x \in A\ 且\ x \notin B\} \tag{2.1.6}$$

集合 A 和 B 的**对称差**记为

$$A\triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \tag{2.1.7}$$

设 U 是一个特定的集合，$A\subseteq U$；称 $U\backslash A$ 为 A 关于 U 的**补集**，记为 A^c. 此时有

$$A^c \cup A = U, A^c \cap A = \varnothing \tag{2.1.8}$$

$$U^c = \varnothing, \varnothing^c = U \tag{2.1.9}$$

对于集类也可以定义并、交运算。设 $\mathscr{B}$ 是一个集类，其元的并和交分别为

$$\bigcup \{B:B \in \mathscr{B}\} = \{x:\exists\ B \in \mathscr{B},使\ x \in B\} \tag{2.1.10}$$

$$\bigcap \{B:B \in \mathscr{B}\} = \{x:\forall\ B \in \mathscr{B},使\ x \in B\} \tag{2.1.11}$$

例 2.1.1 设 $\boldsymbol{R}$ 表示实数集，$\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 表示实数序对 (x,y) 的集合，集合 $A_m=\{(x,y):y=mx,m\in\boldsymbol{R}$ 固定$\}$表示欧氏平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上 $y=mx$ 直线上的点集；所有这些集合（直线）构成一个集类 $\mathscr{A}=\{A_m:m\in\boldsymbol{R}\}$。在此情况下，集类 $\mathscr{A}$ 的交集为 $\bigcap_{m\in\boldsymbol{R}}A_m=\{(0,0)\}$，即 $\boldsymbol{R}$ 的坐标原点；其并集为 $\bigcup_{m\in\boldsymbol{R}}A_m=\boldsymbol{R}^2\backslash\{(0,y):|y|>0\}$，即除去坐标纵轴但保留坐标原点整个 $\boldsymbol{R}^2$ 平面。 △

前面给出的集合运算具有如下性质

（Ⅰ）幂等律：$A\cup A=A, A\cap A=A$；

（Ⅱ）交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

（Ⅲ）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

（Ⅳ）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

（Ⅴ）恒等律：$A\cup\varnothing=A, A\cap U=A$；

$A\cup U=U, A\cap\varnothing=\varnothing$；

另外还有一些恒等关系式

（Ⅵ）de Morgan 律：$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$，

$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$；

（Ⅶ）对偶律：$(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)^c=\bigcap_{k=1}^{n}A_k^c, (\bigcap_{k=1}^{n}A_k)^c=\bigcup_{k=1}^{n}A_k^c$；

（Ⅷ）互补律：$A\cup A^c=U, A\cap A^c=\varnothing$

$(A^c)^c=A, U^c=\varnothing, \varnothing^c=U.$

下面只证明（Ⅵ）和（Ⅶ），其余留给读者验证。

（Ⅵ）的证明：$x\in A\backslash(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A, x\notin(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A, x\notin B$ 且 $x\notin C\Leftrightarrow x\in A\backslash B$ 且 $x\in A\backslash C\Leftrightarrow x\in(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$。同理可证第二式。

（Ⅶ）的证明：$x\in(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)^c=x\in U, x\notin\bigcup_{r=1k}^{n}A_k\Leftrightarrow x\in U, x\notin A_1$ 且 $x\notin A_2\cdots$ 且 $x\notin A_n\Leftrightarrow x\in A_1^c$ 且 $x\in A_2^c$ $\cdots$ 且 $x\in A_n^c\Leftrightarrow x\in\bigcap_{k=1}^{n}A_k^c$。同理可证第二式。

集合 A 和 B 的**笛卡尔积**就是由序对构成的集

$$A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\} \tag{2.1.12}$$

元素 a 和 b 称为序对 (a,b) 的分量。

如果两个序对的对应分量相等，则称其相等。例如，$(x,y)=(a,b) \Leftrightarrow x=a$，且 $y=b$。

一般情况下，集合的笛卡尔积不可交换次序，即 $A\times B \neq B\times A$。

更一般地，$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是一组集合，其**笛卡尔积**定义为

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_k); a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, k\} \tag{2.1.13}$$

2.1.2 关系

由集合 A 到集合 B 的一个**关系** R，就是笛卡尔积 $A\times B$ 的一个子集. 若 $R\subseteq A\times B$，序对 $(a,b)\in R$，则称"a 与 b 有关系 R"，记为 aRb。关系 $R\subseteq A\times B$ 称为**二元关系**，因为此时其中的元由序对构成。

更一般地，若 $R\subseteq \prod_{i=1}^{k} A_i$，则称其为**多元关系**。

例2.1.2 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，则其笛卡尔积为

$$A \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,c),(c,d)\}$$

如果 R 表示"相等关系"，则

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c)\} \subset A \times B$$

△

关系 $R\subseteq A\times B$ 的**定义域**是 A 的子集，即

$$\mathrm{dom}R = \{a \in A; \exists\ b \in B, \text{使得 } aRb\} \tag{2.1.14}$$

其**值域**是 B 的子集，即

$$\mathrm{range}R = \{b \in B; \exists\ a \in A, \text{使得 } aRb\} \tag{2.1.15}$$

例2.1.3 设 $R=\{(x,y); x,y\in \mathbf{R}, y=x^2\}$ 表示一个关系，显然它是 $\mathbf{R}\times \mathbf{R}$ 的一个子集，即平面 $\mathbf{R}^2$ 上一条抛物线的点集。其定义域 $\mathrm{dom}R=\mathbf{R}$，其值域 $\mathrm{range}R=\mathbf{R}^+=\{y; y\geqslant 0\}$，即正半实轴。

△

设 A 是一个集合，$R\subseteq A\times A$ 是某种关系，下面给出几种特殊二元关系的定义

(Ⅰ)**自返关系**：若 $\forall\ a\in A \Rightarrow (a,a)\in R$；

(Ⅱ)**对称关系**：若 $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$；

(Ⅲ)**传递关系**：若 $(a,b),(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$；

(Ⅳ)**反对称关系**：若 $(a,b),(b,a)\in R \Rightarrow a=b$；

基于以上基本的二元关系还可以定义

(Ⅴ)**偏序关系**：若 R 是自返、传递和反对称的关系；此时称 A 为由 R 规定的**偏序集合**；

(Ⅵ)**全序关系**：若 R 是偏序关系，且任意 $a,b\in A$，要么 $(a,b)\in R$，要么 $(b,a)\in R$；

(Ⅶ)**等价关系**：若 R 是自返、传递和对称的关系。

例2.1.4 设 $R=\{(x,y); x,y\in \mathbf{R}, x\leqslant y\}\subset \mathbf{R}^2$ 表示平面 $\mathbf{R}^2$ 上包括 $x=y$ 直线在内的左上半平面，它是一个二元关系。因为(1) $\forall\ x\in \mathbf{R}$，$(x,x)\in R$，所以 R 是自返的；(2)任意 $(x,y),(y,z)\in R$，即有 $x\leqslant y, y\leqslant z$，从而有 $x\leqslant z$，即 $(x,z)\in R$，所以 R 是传递的；(3)任意 $(x,y),(y,x)\in R$，即有 $x\leqslant y, y\leqslant x$，从而 $x=y$，所以 R 是反对称的；综合起来即证明 R 是一个偏序关系(即关系"$\leqslant$")，或者说按偏序关系"$\leqslant$"规定的 R 是一个偏序集合。

其实，R 还是一个全序关系，因为除了 R 是偏序关系外，对任意 $x,y\in \mathbf{R}$，要么 $x\leqslant y$，要么 y

$\leqslant x$；即要么$(x,y)\in R$，要么$(y,x)\in R$。 △

例2.1.5 设$A=\{a,b,c,d,e\}$，$R=\{(a,a),(b,a),(b,b),(c,a),(c,b),(c,c)(c,d),(d,a),(d,d),(e,a),(e,b),(e,e)\}\subset A\times A$，它是$A$上的一个二元关系。因为(1)$\forall\ x\in A,(x,x)\in R$，即$R$是自返的；(2)任意$(x,y)(y,z)\in R$，即有$(x,z)\in R$，即$R$是传递的；(3)若$(x,y),(y,x)\in R$，即有$x=y$，即$R$是反对称的；所以$R$是一个偏序关系。

但是，因为$c,e\in A,(c,e)\notin R$且$(e,c)\notin R$，所以R不是一个全序关系。 △

若$R\subseteq A\times A$是A上的一个偏序关系，则

(Ⅰ)A的任一子集B按关系R仍是一个偏序集合，即$R'=(B\times B)\cap R$是B上的偏序关系；若B按关系R还是一个全序集合，则称其为A的一个**全序子集**。

(Ⅱ)设$b\in A$，若对$\forall\ x\in A$均有xRb，称b为A的**末位元素**。

(Ⅲ)设$a\in A$，若对$\forall\ x\in A$均有aRx，称a为A的**初位元素**。

(Ⅳ)若$b\in A$，对任意$x\in A$且$bRx\Rightarrow x=b$，则称b为A的一个**最大元素**。

(Ⅴ)若$a\in A$，对任意$x\in A$且$xRa\Rightarrow x=a$，则称a为A的一个**最小元素**。

例2.1.6 设$A=\{7,4,12,3,2,5\}$为一有限整数集，定义A上的一个二元关系

$$R=\{(x,y):x\in A,x\leqslant y\}$$
$$=\{(7,7),(7,12),(4,4),(4,5),(4,7),(4,12),(12,12),(3,3),(3,4),(3,5),(3,7),(3,12),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,7),(2,12),(5,5),(5,7),(5,12)\}$$

显然，按关系R(即“$\leqslant$”)，A是一个全序集合，同时2是A的初位元，也是最小元，12是A的末位元，也是最大元。 △

例2.1.7 例2.1.5的关系R可以用图2.1.1表示，其中xRy，即存在有向连线由x到y。A的任一子集如$B=\{e,b,a\}$按关系R仍是一个偏序集合，而且此时B还是A的一个全序子集。在A中，按关系R，a是末位元也是最大元；e和c均为A的最小元。但A无初位元，因为e和c不存在关系R。 △

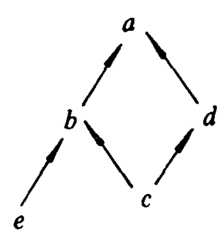

图 2.1.1 关系R

进而，假定R是集合A上的一个偏序关系，对于$B\subset A$，则有

(Ⅵ)$a\in A$称为由R规定的B的一个**上界**，当且仅当对$\forall\ x\in B$有xRa。如果a是由R规定的B的一个上界，而对于由R规定的B的任意其它上界μ，均有$aR\mu$，则称a为B的**最小上界**，或**上确界**，记为$a=\sup B$。

(Ⅶ)$a\in A$称为由R规定的B的一个**下界**，当且仅当对$\forall\ x\in B$有aRx。如果a是由R规定的B的一个下界，而对于由R规定的B的任意其它下界μ，均有μRa，则称a为B的**最大下界**，或**下确界**，记为$a=\inf B$。

例2.1.8 设$A=\{x\in \mathbf{R}:0\leqslant x\leqslant 1\}\subset\mathbf{R}$为一闭区间，而$B=\{x\in\mathbf{R}:0.2<x\leqslant 0.4\}\subset\mathbf{R}$为一半开半闭区间；显然$B\subset A$。按照偏序关系“$\leqslant$”，0.4和0.5都是$B$的上界，但$\sup B=0.4$；0.1和0.2都是$B$的下界，但$\inf B=0.2$。注意$\inf B$不是$B$中的元。 △

需要指出的是，一个偏序集合的子集未必有上确界或下确界。例如，在例2.1.5中，设$B=\{e,b,c\}$，它是A的子集。显然，a和b均为B的上界，而bRa，所以$\sup B=b$。但是，因为e和c之间不存在关系R，所以B没有下界，从而也没有下确界。

若$B\subset A$有上确界和下确界，它们必是A中的元，却未必是B中的元。集合B上的上确

界(或下确界)存在时必唯一。这是因为，若 B 有两个上确界(或下确界)，即 $a=\sup B, b=\sup B$(或 $a=\inf B, b=\inf B$)；由于 R 是偏序关系，由上确界(或下确界)的定义知，则有 aRb 且 bRa，所以 $a=b$。

关于集合 A 按偏序关系 R 最大元的概念，可以导出在泛函分析和其它数学分支中都很重要的一条著名公理，称为 Zorn 引理。

Zorn 引理①　设 A 是一个非空偏序集合，如果 A 的每个全序子集都有上界，则 A 至少含有一个最大元。

类似的也有关于 A 的最小元的结论，只须将引理中的"上界"换为"下界"，"最大元"换为"最小元"。这里叙述的是数学上的一条公理，不必也不能加以证明，下面给出简要说明。

设 $a_1\in A$，若其为 A 的最大元结论已成立；若其不是 A 的最大元，因 A 为非空偏序集，必存在 $a_2\in A$ 且 $a_2\neq a_1$，使得 a_1Ra_2。若 a_2 是 A 的最大元结论已成立；若 a_2 不是 A 的最大元，必存在 $a_3\in A$，且 $a_3\neq a_2$，使得 $a_2Ra_3\cdots\cdots$。这样继续下去，必得 A 的一个全序子集 $M=\{a_1,a_2,\cdots\}$。根据假设，M 有一个上界 a_m。若 a_m 是 A 的一个极大元，结论已成立；若 a_m 不是 A 的最大元，则必有 $a_{m+1}\in A, a_{m+1}\neq a_m$，使得 $a_mRa_{m+1}\cdots\cdots$。这样继续下去，又有一个全序子集 $N=M\cup\{a_m,a_{m+1},\cdots\}$；根据假设 N 有一个上界 $a_n\cdots\cdots$。依此下去，直到最大元出现。

对于上述说明过程稍加分析，就会发现 Zorn 引理实际上与下述 Zermelo 选择公理等价。

Zermelo 选择公理②　设 $\mathscr{A}=\{A_i;i\in I\}$ 是互不相交集合构成的集类，则存在一个集合 A 满足

(Ⅰ) $A\subseteq\bigcup\limits_i A_i$；

(Ⅱ)对任意 i，$A\cap A_i$ 严格有一个元素。

下面讨论等价关系 $R\subseteq A\times A$。设 $a\in A$，a 的一个等价类定义为

$$R(a)\triangleq\{x\in A;xRa\}\tag{2.1.16}$$

一个集合 A 的非空子集所形成的集类 $\mathscr{R}=\{A_i;i\in I\}$，其中 $A_i\subseteq A$，I 是指标集；称其为 A 的一个划分，如果

(Ⅰ) $\bigcup\limits_i A_i=A$；

(Ⅱ)对任意 $i\neq j$，$A_i\cap A_j=\varnothing$。

利用集合划分的概念，可以把一个集合按等价关系划分为不同等价类所形成的集类。

例2.1.9　设 $\mathbf{Z}^+$ 表示非负整数集，任取 $a,b\in\mathbf{Z}^+$，序对 $(a,b)\in R$，即表示 $a-b$ 能被3整除。显然，R 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的一个等价关系，因为(1) $\forall\, a\in\mathbf{Z}^+$，则有 $a-a=0$ 能被3整除，所以 $(a,a)\in R$，即 R 是自返的；(2)若 $a,b,c\in\mathbf{Z}^+$，$a-b$ 和 $b-c$ 均能被3整除，则 $a-c=(a-b)+(b-c)$ 也能被3整除，即 $(a,c)\in R$，R 是传递的；(3)若 $a,b\in\mathbf{Z}^+$，$a-b$ 能被3整除，$b-a$ 也一定能被3整除，即 R 是对称的；所以 R 是等价关系。

于是，可以得到三个不同的等价类

$R(1)=\{1,4,7,10,\cdots\}$，$R(2)=\{2,5,8,11,\cdots\}$，

$R(3)=\{0,3,6,9,\cdots\}$

---

① 此处称一条公理为引理是沿用习惯叫法，其实它与下面的 Zermelo 选择公理是完全等价的，其一作为公理，其二则可作为引理。

② 见 Zorn 引理注解。