

结构优化设计概论

谢祚水 编著

国防工业出版社

结构优化设计概论

谢祚水 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

结构优化设计概论/谢祚水编著. —北京:国防工业出版社, 1997. 5

ISBN 7-118-01721-3

I. 结… II. 谢… III. 结构设计:最优设计-概论 IV. T
U318

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 03971 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 12 $\frac{3}{4}$ 293 千字

1997 年 5 月第 1 版 1997 年 5 月北京第 1 次印刷

印数:1—4000 册 定价:20.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

前 言

工程结构优化设计是本世纪 50 年代出现的一种新的设计方法。它是以最优化数学理论为基础,借助电子计算机选择最优化设计方案的一种优化技术。实践表明,当一个工程设计所追逐的目标及必须满足的约束条件能用数学公式表达时,总可以选择适当的最优化算法,用电子计算机求解最优设计方案,从而缩短设计周期,提高设计质量。

60 年代中期以来,由于最优化算法、计算机技术以及有限元法在设计领域中的应用,工程结构优化设计发展非常迅速,它在国内科研、生产中的应用已非常广泛。当代工程结构技术人员、在校研究生、大学生掌握结构优化设计的入门知识已势在必行。为了适应这种形势,我们根据工程实践的需求,广泛参考国内外结构优化设计文献,并且融进多年来结构优化设计中的经验与体会和一些初步科学研究成果,写成了这本《结构优化设计概论》。

《结构优化设计概论》是一本通俗、普及型读物,它从工程结构的实例出发,力求阐明原理,导出结论,不作繁冗的数学推演与论证,深入浅出,通俗易懂,着眼于应用。在取材上避免贪多求全、主次不分,侧重介绍应用最广、最有效的几种优化方法。全书共分九章,第一章从最简单的例子导出结构优化设计的数学模型;第二章扼要介绍结构优化设计必备的数学知识;第三章叙述无约束最优化方法;第四、五章讨论有约束最优化方法;第六章涉及多目标最优化方法;第七章简述结构模糊优化设计;第八章说说结构优化设计的技巧和策略;第九章给出了工程结构优化设计的四个实例;最后以附录形式给出了几个结构优化设计的源程序及其简要的使用说明。

本书的重点是第四章和第五章。线性规划没有专列一章,只在第四章中在讨论非线性规划的线性化解法一节前专列一节加以介绍,这是基于工程结构中涉及线性规划问题的数量相对较少和减少篇幅的考虑。本书的数例有一些采用简单的数学例题,这是为了突出说明优化方法,而不致于被一些复杂的力学、结构计算所混淆。

本书可以作为广大工程结构技术人员了解结构优化设计方法的入门自学读物。

本书也可作为“船舶与海洋工程结构力学”等专业硕士研究生的教材。当作为船舶工程、建筑工程等专业本科生选修课教材时,如受教学时数限制,第二章中模糊集合的基本概念,第六章多目标最优化方法,第七章结构模糊优化设计等内容可以少选或不选。

最后,编著者对为本书作出许多贡献的吴剑国、俞铭华、窦培林、朱安庆、赵洪江、杨大明、张莉等老师以及研究生梅利元同学表示衷心的感谢。

由于水平有限,本书不当或错误之处在所难免,敬请读者批评指正。

编著者

目 录

第一章 结构优化设计的基本概念	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 从一个结构优化设计的简单例子说起	(2)
§ 1.3 结构优化设计的数学模型	(5)
§ 1.4 最优化方法的分类	(7)
§ 1.5 迭代的收敛条件和终止迭代的准则	(8)
第二章 数学预备知识	(10)
§ 2.1 方向导数与梯度	(10)
§ 2.2 海赛矩阵及多元函数的极值条件	(11)
§ 2.3 凸集与凸函数	(14)
§ 2.4 有约束极值的判别	(21)
§ 2.5 模糊集合的基本概念	(25)
第三章 无约束最优化方法	(30)
§ 3.1 引言	(30)
§ 3.2 单变量函数的最优化方法	(31)
§ 3.3 多变量函数的最优化方法	(39)
第四章 有约束最优化问题的直接法	(52)
§ 4.1 引言	(52)
§ 4.2 梯度法	(53)
§ 4.3 可行方向法	(54)
§ 4.4 网格法	(58)
§ 4.5 复合形法	(61)
§ 4.6 综合约束函数双下降法	(64)
§ 4.7 线性规划	(68)
§ 4.8 序列线性规划法	(81)
第五章 有约束最优化问题的间接法	(88)
§ 5.1 引言	(88)
§ 5.2 拉格朗日乘子法	(88)
§ 5.3 惩罚函数法的基本概念	(91)
§ 5.4 内点惩罚函数法(内点法)	(93)
§ 5.5 外点惩罚函数法(外点法)	(96)

§ 5.6 混合惩罚函数法(混合法)	(102)
第六章 多目标最优化方法	(104)
§ 6.1 引言	(104)
§ 6.2 有效解、弱有效解和绝对最优解的概念	(106)
§ 6.3 降维法	(108)
§ 6.4 顺序单目标方法	(108)
§ 6.5 评价函数法	(110)
第七章 结构模糊优化设计	(117)
§ 7.1 引言	(117)
§ 7.2 水平截集法	(118)
§ 7.3 限界搜索法	(123)
§ 7.4 最大水平法	(127)
§ 7.5 多目标模糊优化设计	(128)
第八章 结构优化设计的技巧和策略	(134)
§ 8.1 建立结构优化设计数学模型的原则方法	(134)
§ 8.2 设计变量的离散化处理	(138)
§ 8.3 响应量导数的求解方法	(141)
§ 8.4 最优化方法的选择	(146)
§ 8.5 优化结果的分析	(149)
§ 8.6 提高结构优化设计的效率	(150)
第九章 工程结构的优化设计	(152)
§ 9.1 集装箱船舶抗扭箱式中剖面结构的优化设计	(152)
§ 9.2 钢筋混凝土单柱基础的优化设计	(155)
§ 9.3 潜艇耐压圆柱壳结构的优化设计	(160)
§ 9.4 潜艇耐压圆柱壳结构的模糊优化设计	(166)
附录	(170)
附录 1 解无约束最优化问题的单纯形法	(170)
附录 2 解有约束最优化问题的复合形法	(174)
附录 3 解线性规划问题的单纯形法	(180)
附录 4 解有约束最优化问题的混合惩罚函数法	(188)
主要参考文献	(197)

第一章 结构优化设计的基本概念

§ 1.1 引言

人们在从事工程项目设计时,总是希望在满足一定环境条件和一些使用要求下达到方案最佳,这就是所谓的工程优化问题。实现方案最佳的一系列数学方法称为最优化方法,简称优化方法。优化方法在解决工程问题中的正确应用称为优化技术。

20 世纪 50 年代以前,用于解决最优化问题的数学方法还仅限于经典微分法和变分法,称为经典优化方法。50 年代以后,随着近代科学技术与生产的迅速发展,经典优化技术已远不能适应发展的需要。在 50 年代末,优化方法中的数学规划方法被首次用于结构最优化并取得巨大成功,成为优化方法的理论基础。电子计算机的出现、发展与普及,进一步促进了优化技术的发展。目前优化方法已成为数学中的一个重要分支。优化方法日趋完善,包括的内容和应用范围日趋扩大。线性规划、非线性规划、几何规划、动态规划、随机规划等优化方法不仅应用于结构设计,近年来已陆续应用到建筑、造船、化工、冶金、交通、航空、机械制造、自动控制、电力等行业。人们已清楚地看到,将优化方法应用于设计,不仅可以大大地缩短设计周期,显著地提高设计质量,而且还可以解决传统设计方法无法解决的复杂设计问题。

船舶结构优化设计方法的研究起步较晚,我国自 70 年代末开始研究船舶结构优化设计,这比国外差不多晚了 10 年。民用船舶的结构设计,传统的方法是用“规范”设计。“规范”是根据船舶结构设计实践和使用经验,按船舶类型制定的一个统一的设计标准。在按“规范”要求进行船舶结构设计时,只要满足“规范”的有关规定,便认为是“可靠的”设计,即能得到有关方面的认可。我们知道,满足“规范”要求的设计方案很多,如果我们以船体结构重量最小为目标,那么只有使结构重量最小的方案才是我们的最优方案。同样,用计算方法进行船舶结构设计时,设计约束条件是结构容许的应力、变形、振动频率、几何尺寸等,满足这些约束条件的设计方案不一定是最优方案。建筑结构设计跟船舶结构设计没有本质上的区别。结构优化设计的任务,就是利用最优化技术,在满足设计约束条件下寻求一个最优的设计方案。

结构优化设计大体上可分为三个阶段。第一个阶段是建立数学模型,把一个工程结构的设计问题变成一个数学问题;第二个阶段是选择一个合理、有效的计算方法;第三个阶段是编制通用计算机程序。电算程序编成以后,对于同一类型的结构,可由电子计算机迅速给出最优化设计方案来。

但是应当指出,结构优化所给出的解答,从数学上讲,是在给定条件下的最优解。但在工程上,实际设计问题是很复杂的,在建立数学模型时,通常只能考虑一些主要因素,忽略一些次要因素以简化计算。有些因素对结构设计有一定影响,但其影响又难以用数字表

述,这些因素在数学模型中无法考虑。因此不能把优化设计提供的最优解理解为绝对的“最优”。但它是一个良好的基础,在这个基础上,根据全面的判断设计者还可以进行一些必要的修改。

结构优化设计是一种近代的、科学的设计方法,跟传统设计方法比较,优化设计具有如下特点:

(1)优化设计是在众多的可行设计方案中找出最优的方案。

传统的设计基于经验,在参考现有结构的基础上,提出具体改进意见,进行可行设计或延续以前的可行设计。因为一个设计的可行设计方案是众多的,其中任何一个可行设计方案都不足以表明设计的先进性。而优化设计将是找出可行方案中充分表征先进性的方案。

(2)优化方法是优化设计的基本方法。

优化方法是使设计方案达到最佳的数学方法,利用其数学特性使得计算过程简化,精度提高或者采用相近的其他算法以达到求解的目的。因此它可以使设计方案向着改善的方向发展。由于应用数学理论也使得优化问题的解令人可信。

(3)电子计算机是优化设计的工具。

传统设计中,为了得到可解的数学模型往往忽略了许多重要的因素,造成理论计算与实际误差很大。由于计算机的高速、大容量,工程优化问题便可以同时考虑许多相关因素,问题可以更接近于真实情况,所获得的解更具有实用价值,也更精确。这是传统方法无法办到的。

但应当特别指出的是,结构优化设计并不是只要把优化设计所追求的目标和受到的约束作出适当的数学描述,建立起优化的数学模型,用现成的最优化算法就可以容易地求出“最优”解答来。首先,结构优化设计是一种迭代数值计算,计算工作量一般很大,必须由电子计算机来完成。对一些复杂的大型结构,因为设计变量多,约束条件多,且约束大部分是变量的隐式函数,这会使计算迭代和重分析次数急剧增加,有时即使是能力很强的电子计算机也难以胜任。其次,进行结构优化设计,除应掌握结构设计知识外,还应掌握有关的数学基础、程序设计、计算技巧等知识,传统的结构设计只是优化设计过程中的一个子环节,因而优化设计的难度较传统的结构设计要大得多。第三,优化设计方法很多,但没有一种方法是“放之四海而皆准”的,每种方法都有它的局限性,一种结构究竟选用什么优化方法,要靠经验,要靠摸索。第四,结构优化设计是一门新兴的学科,尚不完善也不够成熟,有待进一步开展科学研究,并在实践中加以充实提高。

§ 1.2 从一个结构优化设计的简单例子说起

为了引入结构优化的基本概念,我们从一个简单例子说起。

例 1-1 设有某铝制箱形舱口盖板如图 1-1 所示。已知长度 $l_0 = 600\text{cm}$, 宽度 $b = 60\text{cm}$, 侧板板厚 $t_s = 0.5\text{cm}$, 面板板厚为 $t_f(\text{cm})$, 高度为 $h(\text{cm})$, 承受的最大单位载荷 $q = 0.98\text{N/cm}^2$, 要求在满足强度、刚度和稳定性等条件下, 设计一个重量最小的结构。

箱形舱口盖板的截面惯性矩可近似地取为

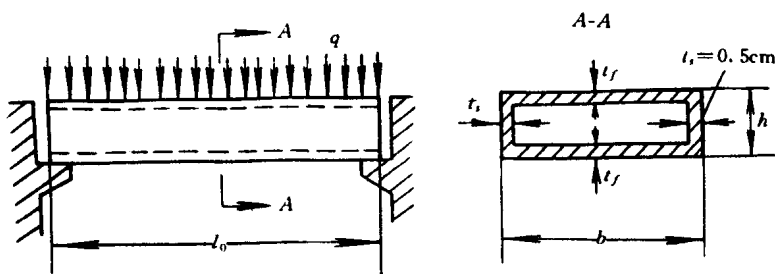


图 1-1 箱形盖板

$$I = \frac{1}{2} b t_f h^2 = 30 t_f h^2 \quad (\text{cm}^4)$$

由结构分析得箱形梁中各计算值为

$$\text{最大剪应力} \quad \tau_{\max} = \frac{Q}{2 t_f h} = \frac{176.4}{h}$$

$$\text{最大弯曲应力} \quad \sigma_{\max} = \frac{M h}{2 I} = \frac{441}{t_f h}$$

式中 Q ——最大剪力, $Q = 17.64 \text{ kN}$;

M ——最大弯矩, $M = 2646 \text{ kN} \cdot \text{cm}$ 。

面板中的屈曲临界应力为

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t_f}{b} \right)^2 \approx 69 t_f^2$$

$$\text{式中} \quad E = 6860 \text{ kN/cm}^2 \quad \nu = 0.3$$

$$\text{最大挠度} \quad f = \frac{5}{384} q b l_0^4 / E I = (55.12 \times 10^2 / E t_f h^2) l_0$$

舱口盖板每厘米长度重量为

$$W = \rho g (120 t_f + h)$$

式中 ρ ——材料密度 (kg/cm^3);

g ——重力加速度。

于是,箱形梁结构设计就变成下述优化设计问题,它的数学命题是选择一组设计变量

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, (即 $\begin{bmatrix} t_f \\ h \end{bmatrix}$) 使箱形梁结构重量 $F(x) = W = 120 x_1 + x_2$ 最小,且满足约束条件

$$g_1(x) = -x_1 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_2 \leq 0$$

$$g_3(x) = 1 - \{[\tau]/\tau_{\max}\} = 1 - 0.25 x_2 \leq 0$$

$$g_4(x) = 1 - \{[\sigma]/\sigma_{\max}\} = 1 - \left(\frac{7}{45} x_1 x_2 \right) \leq 0$$

$$g_5(x) = 1 - \{\sigma_K/\sigma_{\max}\} = 1 - \left(\frac{7}{45} x_1^2 x_2 \right) \leq 0$$

$$g_6(x) = 1 - \{[f]/f\} = 1 - \left\{ \frac{1}{320} x_1 x_2^2 \right\} \leq 0$$

其中, $[\sigma] = 68.6 \text{ MPa}$; $[\tau] = 44.1 \text{ MPa}$; 单位长度允许挠度 $[f]/l_0 = 1/400$ 。

根据例 1-1 的分析,可以看出,最优化设计的数学命题应包含三个部分。

1. 设计变量

优化设计中参与设计的量可以是常量,也可以是变量,凡参与结构优化设计的变量称为设计变量。

优化设计中参与设计的变量大致可分为两类:一类是几何参数,如板的厚度、宽度、截面面积、截面惯性矩、节点坐标、柱的高度、梁的间距、拱的矢高等;另一类是物理参数,如材料的弹性模量、钢或混凝土的标号、应力、变形、结构固有频率、材料屈服极限等。在设计中预先给定的量称为设计常量,例如前面例 1-1 中侧板板厚 t_s ,盖板宽度 b 等,在设计中所指的设计变量是指那些在设计中可供选择的独立变量,例如例 1-1 中的面板板厚 t_f ,高度 h 等。在最优化问题中设计变量的个数称作该问题的维数。如把设计变量看成一个矢量,它由 n 个设计变量构成,例如 $x_1, x_2, \dots, x_n$,用矩阵可表示成

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \quad (1-1)$$

矢量端点的坐标就是一个设计点,它代表一个设计方案。设计点的集合,称为设计空间。因为工程设计的设计变量只能是实数,所以优化设计空间称为欧氏空间,记为 R^n 。

设计变量的个数愈多,则结构优化问题愈复杂,所需计算时间愈长,但设计的自由度愈大,可望取得的结果愈好。因此设计者要精心选择那些对优化结果最有影响的参数作为设计变量,合理选择设计变量的数目。

在优化设计中可以连续地取值的设计变量称为连续变量,只能选用某些离散值的设计变量称为离散变量。处理连续设计变量时问题比较简单。当涉及到离散设计变量(例如规格产品钢筋的截面积、型钢的惯性矩等)时,问题就要复杂得多,设计者为了简化计算,有时权宜地视为连续变量,而在最后决定方案时,再选取最为接近的离散值,但这往往只能得到一个接近最优解的设计方案。

2. 约束条件

在结构优化设计中,设计变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的取值是要受到某些条件限制的,这些限制统称为约束条件。它反映了有关设计规范、计算规程、运输、安装、施工、构造等各方面的要求,有时还反映了设计者的意图。对某个或某组量的直接限制的约束条件称为显约束;对某个或某些与设计变量的关系无法直接说明的量加以限制的约束条件称为隐约束。在船舶或建筑工程结构优化设计中一般情况下约束条件很多,但大致可分为两大类,即辅助约束和性态约束。辅助约束是由设计规范等规定和要求的数值范围,如板的最小厚度、钢筋混凝土的最小或最大配筋率、纵向钢筋的最小直径等。这类约束条件比较简单,一般都是显约束形式。性态约束是对结构的强度、变形、稳定、频率等的限制,它们一般与设计变量没有直接关系,必须通过结构分析才能求得,因而常为隐约束形式。

约束条件可以分为等式和不等式约束两种,用数学表达式可以写成

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 & i = 1, 2, \dots, p \\ h_j(x) = 0 & j = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (1-2)$$

约束表达式大多数是不等式形式。如把结构分析时所用的平衡条件和连续条件也算在内,则它们以等式形式出现。

在例 1-1 中,列出了六个约束条件,它们都是不等式约束,前两个是辅助约束,后四个是性态约束。因为问题比较简单,通过结构分析,性态约束已变隐约束为显约束形式。

3. 目标函数

结构优化设计要求在多种因素下寻求人们最满意、最适宜的一组参数,从而使设计达到追求的目标。根据特定问题所追求的目标,用设计变量的数学关系式表达出来,就是优化设计的目标函数。对有 n 个设计变量的最优化问题,目标函数可以写成

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1-3)$$

最常用的目标函数是结构的重量,即以结构最轻为优化目标,例如例 1-1 的情形。当然结构体积、刚度、造价、变形、承载能力、自振频率、振幅也都可以根据需要作为优化设计中的目标函数。

目标函数值是评价一个设计方案优劣程度的依据,因此选择目标函数是优化设计过程中最为重要的决策之一。一般情况下,目标函数值越小设计方案越优;然而有的问题不是追求目标函数值极小,而是追求目标函数值极大。这时注意到求 $(-F(x))$ 极小值和求 $F(x)$ 极大值是等价的,不难把求目标函数极大值问题转化成求目标函数极小值问题。

有时重量最轻的结构不一定是最好的结构。以钢筋混凝土结构为例,从重量角度讲,混凝土的重量占绝对数量,但从材料价格讲,钢筋占很大比重。若要求结构的重量最轻,设计出来的结构必然是截面积较小,配置的钢筋很多。显然,这样的结构在造价上是不经济的。另外,结构中不同部件的造价有时也会有较大差别,因此有时以结构的造价作为目标函数具有更大的现实意义。结构的价格应综合考虑材料、加工制作、运输、安装、维修等一系列因素,但有时不易了解到充分、准确的资料,给造价作为目标函数带来实际困难。

工程实践中还可能遇到所谓多目标函数的情况,例如船舶结构设计要追求的目标不光是重量最小,而且还要求造价最低,这便是一个多目标函数的优化问题。若把重量函数用 $F_1(x)$ 表示,造价函数用 $F_2(x)$ 表示,作为一种选择,由 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 构成的广义目标函数可写成

$$F(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x) \quad (1-4)$$

式中, $\alpha + \beta = 1$, α, β 为加权系数, α, β 的选择应能确切反映各个特征在结构评价中的分量。

目标函数的取法不同,会导致优化的结果不同,因此合理地确定目标函数非常重要。

§ 1.3 结构优化设计的数学模型

根据上一节的叙述,我们可以把结构优化设计的任务归结为求一组设计变量,即找到一个设计方案既满足规定约束条件,又使目标函数值最小。用数学方法表达上述思想,则可写成

求设计变量

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (1-5)$$

满足约束条件

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 & i = 1, 2, \dots, p \\ h_j(x) = 0 & j = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (1-6)$$

使目标函数

$$F(x) \rightarrow \min(\text{最小}) \quad (1-7)$$

(1-6) 式中由 p 个不等式约束和 q 个等式约束规定了问题的可行域。

用优化方法求得的一组设计变量

$$x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$$

表示了一个最优设计方案,称为最优设计点,对应一个最优目标函数值

$$F^* = F(x_p^*) = F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

最优点和最优目标函数值两者构成了一个优化问题的最优解。

若目标函数 $F(x)$ 和约束表达式 $g_i(x) \leq 0$ 和 $h_j(x) = 0$ 都是设计变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的线性函数,那么这样的优化问题称为线性规划问题;否则称为非线性规划问题。

最优化问题的数学模型或数学表达式可以用几何描述的方法直观、形象地加以理解。

例 1-1 只有两个设计变量,是一个二维优化问题,可以用一个平面图形来描述它,如图 1-2 所示。

借助图 1-2 我们可以说明如下几个概念

1. 目标函数等值线

令目标函数 $F(x)$ 的值等于一系列的数值 $C_1, C_2, \dots$ 时,这个二维函数便在 x_1, x_2 平面上得到相应的一系列平面曲线。这些平面曲线就是目标函数的等值曲线族。本例目标函数 $F(x)$ 是线性的,如取 $C_1 = 80, C_2 = 100, C_3 = 120, C_4 = 140$ 则在图 1-2 中对应的是四条平行的直线,它们中的任一条都是相应的目标函数等值线。目标函数等值线的分布表示了目标函数值变化的情况。

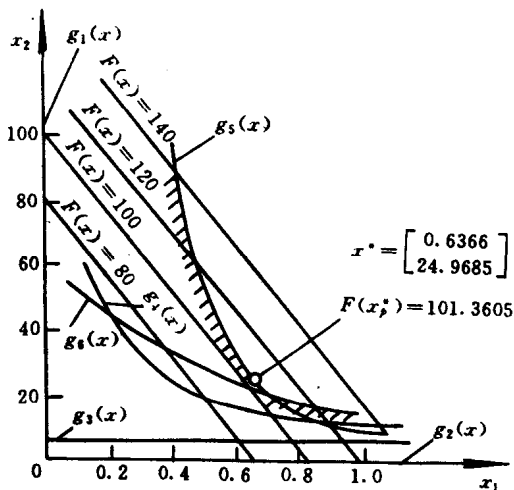


图 1-2 箱形梁优化设计结果

2. 可行域与非可行域

约束条件使设计变量的选择受到了限制。一切满足 $g_i(x) \leq 0$ 和 $h_j(x) = 0$ 的设计点的集合构成了优化问题的可行域。由图 1-2 可见, 约束曲线 $g_5(x) = 0$ 和 $g_6(x) = 0$ 一起将 x_1 - x_2 平面分为两部分(以阴影线为界限), 右上方所有各点都能满足约束要求, 它们构成了优化问题的可行域。右下方的各点至少违反了一个约束, 这些违反约束的点构成了问题的非可行域。构成问题可行域的诸多约束被称为有效约束; 远离可行域的约束属于无效约束。图 1-2 中 $g_5(x), g_6(x)$ 是有效约束, 而 $g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$ 都是无效约束。

3. 最优解

在最优化问题中, 有些问题没有约束条件, 它们称为无约束最优化问题, 求解这种最优化问题, 就是求目标函数的极值点。带有约束条件的最优化问题称为有约束最优化问题, 有约束优化问题的最小点在可行域内, 更多的情况是在有效约束曲线与目标函数等值线的切点(或触点)上。图 1-2 中, 约束最优化问题的最优解在目标函数等值线与约束曲线 $g_5(x) = 0$ 的切点 $x_p^* = [0.6366, 24.9685]^T$ 上, 该点目标函数值 $F(x_p^*) = 101.3605$ 。

§ 1.4 最优化方法的分类

优化技术是和电子计算机的应用密切相关的, 它是数值计算而不是解析法; 它具有简单的逻辑结构, 可以反复地进行计算; 它不要求精确解, 只要满足精度要求的近似解。满足这些要求的计算方法是数值迭代方法, 基本思想是: 从某一个选定的初始设计点 $x^{(0)}$ 出发, 按照某种最优化方法所规定的办法, 确定适当的搜索方向和步长, 获得第一个修改设计点 $x^{(1)}$, 计算此点的目标函数值 $F(x^{(1)})$, 使其满足 $F(x^{(1)}) < F(x^{(0)})$, 然后以 $x^{(1)}$ 点为新的起点重复上述步骤, 取得第二个设计点 $x^{(2)}$, 依次得到 $x^{(3)}, x^{(4)}, \dots$, 最终达到与理论最优解 x^* 非常逼近的近似最优解 x^* 。一般迭代格式可写成

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot S^{(k)} \quad (1-8)$$

式中 α 为搜索的步长, S 为搜索的方向。

优化设计的方法很多, 目前没有统一的分类方法。按优化方法的特征可以分为两类, 即准则法和数学规划法。准则法是从工程观点出发, 提出结构达到优化设计时应满足的某些准则, 如满应力准则, 能量准则等等, 然后用迭代方法求出满足这些准则的解。该法主要特点是收敛快, 重分析次数与设计变量数目无直接关系, 计算工作量不算大, 但适应范围有局限性, 主要适用于结构布局及几何形状已定的情况。最早提出的准则法是满应力设计, 该法认为能充分发挥材料强度的潜力。准则法也可以处理位移、自振频率、弹性稳定等方面的约束条件, 通常是从第二章将要讨论的 Kuhn-Tucker 条件出发建立准则方程。数学规划法是从结构力学的基本原理出发, 运用数学规划和优选法等各种方法去寻找设计变量的最优解。数学规划法主要有线性规划、非线性规划、动态规划、几何规划。线性规划、非线性规划是研究设计变量在约束条件限制下, 求目标函数极值的方法; 动态规划是把所研究的问题分成若干阶段, 利用递推关系依次作出最优决策的方法; 几何规划是在目标函数的各个部分中寻求分配总目标函数值的最优方案的方法。

本书主要是为了让广大读者在短时间内能掌握结构优化设计的基本概念、基本思路等基本知识,所涉及的内容不宜贪多。结构优化中常用的多为数学规划法,而在数学规划法中又多常用非线性规划,有时也用到线性规划,只在个别情况下用过动态规划和几何规划。基于这种认识,本书将重点讨论非线性规划,线性规划只在非线性规划的线性化一节中加以论述,准则法、动态规划、几何规划都予以舍去。希望深入研究的读者可以广泛参阅众多的其他相关书籍或资料。

§ 1.5 迭代的收敛条件和终止迭代的准则

优化迭代过程得到一系列的修改点 $x^{(k)}$, 这个点列应收敛到最优点上。为此, 需要判断点列的收敛性。

1. 点列收敛的柯西准则

设某种迭代过程所产生的设计点序列为

$$x^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

所谓点列是收敛的, 即存在极限

$$\lim x^{(k)} = x^*$$

点列 $x^{(k)} (k = 0, 1, 2, \dots)$ 收敛的必要与充分条件是: 对于任意指定的足够小的正数 ϵ , 存在自然数 N , 使得当两个自然数 m, p 大于 N 时, 满足

$$\|x^{(m)} - x^{(p)}\| < \epsilon \quad (1-9)$$

(1-9) 式称为点列收敛的柯西准则, 满足此条件的点列叫基本序列。

收敛条件的(1-9)式也可写成

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - x_i^{(p)})^2} < \epsilon \quad (1-10)$$

从而必然有

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(p)}| < \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-11)$$

2. 迭代计算的终止准则

理论上, 优化迭代过程是一个无穷点的序列 $x^{(k)} (k = 1, 2, \dots)$, 一直到使目标函数值达到极小值的点 x^* 才可终止计算。对一个具体的工程优化问题, 目标函数值理论极小点 x^* 在哪里, 预先并不知道。因此要想找到一个理想的迭代终止准则很困难, 只能根据迭代计算中进行的情况来判断。在什么时候可以终止迭代呢? 通常采用的迭代终止准则有以下几种形式:

(1) 相邻两次迭代点 $x^{(k)}$ 和 $x^{(k+1)}$ 之间的距离已达到足够小时, 即

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$$

或

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2} < \epsilon \quad (1-12)$$

(2) 目标函数的下降量已达到足够小时, 即

$$|F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})| < \epsilon \quad (1-13)$$

或目标函数值相对下降量达到足够小时,即

$$\frac{|F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})|}{F(x^{(k+1)})} < \epsilon \quad (1-14)$$

(3) 迭代点目标函数梯度值达到足够小时,即

$$\|\nabla F(x^{(k)})\| < \epsilon \quad (1-15)$$

但这个方法有个缺点,它可能把鞍点作为最优点输出。

在优化设计中,只要满足上述诸式之一就可认为目标函数值 $F(x^{(k+1)})$ 已收敛于函数 $F(x)$ 的极小点,其近似最优解为

$$x^{**} = x^{(k+1)} \quad F(x^{**}) = F(x^{(k+1)})$$

迭代即可结束。

上述诸式中的 ϵ 是表示计算精度要求的足够小的正数,它的大小应根据不同优化算法和工程问题的实际需要适当地给出。上面所用符号 x^* , x^{**} 分别表示理论最优点和近似最优点。 x^* 只有理论价值,迭代获得的最优点只能是 x^{**} ,以后在优化计算中不再区分 x^* 和 x^{**} ,一律用 x^* 表示最优点。

第二章 数学预备知识

结构优化设计涉及许多数学基本概念,为便于后面章节的学习,有必要先提供一些有关的数学预备知识。

§ 2.1 方向导数与梯度

1. 二元函数及多元函数的方向导数

在高等数学中,以 x_1, x_2 为变量的二元可微函数 $f(x_1, x_2)$ 在 $x_0(x_{10}, x_{20})$ 点处,沿 S 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial S} \Big|_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_0} \cos\theta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_0} \cos\theta_2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_{x_0} \begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \cos\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

对于有 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 $x_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ 点处沿 S 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial S} \Big|_{x_0} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]_{x_0} \begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \cos\theta_2 \\ \vdots \\ \cos\theta_n \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

式中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 分别为 S 方向与 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 之间的夹角。方向导数表征了函数在该方向上的变化率。

2. 二元函数及多元函数的梯度

(2-1) 式中的 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_{x_0}$ 的转置 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_{x_0}^T$ 称为二元函数 $f(x_1, x_2)$ 在 x_0 点处的梯度,记为

$$\nabla f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_{x_0}^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{Bmatrix}_{x_0} \quad (2-3)$$

同理,多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 x_0 点处的梯度记为

$$\nabla f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]_{x_0}^T \quad (2-4)$$

3. 梯度的性质

1) 函数在某一确定点处的变化率最大值是函数在这一点处梯度的模。

2) 函数变化最速的方向是函数的梯度方向。

以二元函数为例,由(2-1),(2-2)式,有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial S} \right|_{x_0} = \nabla f^T(x_0) \cdot S = \|\nabla f(x_0)\| \cos(\nabla f(x_0), S) \quad (2-5)$$

式中

$$S = \begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$(\nabla f(x_0), S)$ 为向量 $\nabla f(x_0)$ 与 S 方向的夹角, $\|\nabla f(x_0)\|$ 为梯度 $\nabla f(x_0)$ 的模。

不难看出,当 S 方向与梯度方向一致时, $\cos(\nabla f(x_0), S) = 1$, 从而 $\left. \frac{\partial f(x)}{\partial S} \right|_{x_0}$ 有最大值。所以说沿梯度方向的导数值最大。换句话说, $\nabla f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 点增长最快的方向。反之, $-\nabla f(x_0)$ 的方向是 $f(x)$ 在 x_0 点下降最快的方向。而且 $f(x)$ 在这个方向的变化率就等于梯度的模。

例 2-1 求二元函数

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5$$

在 $x_0(0, 0)$ 点处的梯度方向。

解: 梯度

$$\nabla f(x_0) = \begin{Bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{(0,0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 - 2 \end{Bmatrix}_{(0,0)} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

梯度的模

$$\|\nabla f(x_0)\| = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(0,0)}\right)^2 + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{(0,0)}\right)^2} = 2\sqrt{5}$$

梯度的单位矢量

$$r^0 = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix}$$

§ 2.2 海赛矩阵及多元函数的极值条件

1. 海赛矩阵

二元函数 $f(x_1, x_2)$ 在点处的泰勒展开为

$$f(x_1, x_2) = f(x_{10}, x_{20}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_0} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_0} (x_2 - x_{20}) + \frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{x_0} \times (x_1 - x_{10})^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{x_0} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_{x_0} (x_2 - x_{20})^2 \right] + \dots$$

将上式改成矩阵式,有

$$f(x_1, x_2) = f(x_{10}, x_{20}) + \nabla f^T(x_0) \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T G(x_0) \Delta x + \dots$$

式中

$$\Delta x = \begin{Bmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{Bmatrix} \quad G(x_0) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{x_0} & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{x_0} \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right|_{x_0} & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_{x_0} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$