高等数学辅导三十讲

张元德　宋烈侠

清 华 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是根据国家教委制订的工科高等数学教学大纲的要求编写的，是编者在总结高等数学辅导课的教学经验，特别是近几年来教学实践经验的基础上整理而成的。

全书共三十讲，内容包括：空间解析几何与向量代数；一元函数微积分；多元函数微积分；无穷级数；常微分方程等。是工科院校、电大、职工大学数学教师的教学参考书，也可作为工科院校学生、高等数学自学者、非数学专业的研究生学习的辅导教材。

高等数学辅导三十讲

张元德　宋烈侠

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/32　印张：$10\frac{1}{8}$　字数：244 千字

1988 年 4 月第 1 版　1988 年 4 月第 1 次印刷

印数：00001—25000　　定价：1.70 元

ISBN 7-302-00203-7/O·40

目　　录

第一章　空间解析几何与向量代数

第一讲　向量代数 …………………………………………………… 1

第二讲　平面方程与直线方程 ……………………………………… 8

第三讲　二次曲面图形、平面直线问题 ……………………………18

第二章　函数

第四讲　函数概念、函数的基本特性 ………………………………28

第三章　极限与连续

第五讲　极限概念，极限的 ε-N 定义，ε-δ 定义 ………………36

第六讲　极限运算（一） ……………………………………………44

第七讲　极限运算（二） ……………………………………………51

第八讲　无穷小比阶、函数的连续性 ………………………………59

第四章　导数与微分

第九讲　导数概念与导数计算 ………………………………………65

第十讲　微分概念、高阶导数 ………………………………………73

第五章　导数的应用

第十一讲　微分学的基本定理 ………………………………………80

第十二讲　函数的极值、最大值、最小值 …………………………88

第十三讲　未定型极限、台劳公式 …………………………………96

第六章　不定积分

第十四讲　不定积分计算（一） ……………………………………104

第十五讲　不定积分计算（二） ……………………………………116

附　不定积分计算方法小结 …………………………………………124

第七章　定积分及其应用、广义积分

第十六讲　定积分概念、变上限定积分……130
第十七讲　定积分计算……141
第十八讲　定积分应用……149

第八章　多元函数及其微分法

第十九讲　多元函数基本概念……159
第二十讲　多元函数微分法……165
第二十一讲　多元函数微分法应用……179

第九章　重积分

第二十二讲　二重积分计算……186
第二十三讲　三重积分计算……197

第十章　曲线积分与曲面积分

第二十四讲　曲线积分计算……205
第二十五讲　曲面积分计算……214

第十一章　无穷级数

第二十六讲　级数基本概念，正项级数判敛……230
第二十七讲　任意项级数判敛、函数项级数的收敛域……238
第二十八讲　幂级数与傅氏级数……251

第十二章　常微分方程

第二十九讲　一阶微分方程的解法……272
第三十讲　二阶线性方程的解法……283
附录……297

阶段小测验……309

第一章　空间解析几何与向量代数

本章安排三次辅导课。第一次向量代数；第二次平面与直线；第三次平面直线问题与二次方程及其图形。

第一讲　向 量 代 数

空间解析几何中的直线、平面是以向量为工具进行研究，故本节辅导课的重点放在向量的概念及其运算性质上。具体要求是：（1）掌握向量的投影表示式；（2）熟练掌握向量的数量积、向量积、混合积的运算规律及其应用。通过对具体问题的讨论逐步加深对向量概念的理解和运算性质的正确应用；并通过对一个题目的多种解法，训练学生思考的全面性，达到调动其积极思维的目的，同时也是从不同角度检查了解题的正确性。

选题

1. 下列命题是否正确？为什么？

（1）$2\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$；

（2）$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 均为单位向量；

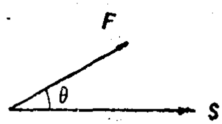

图 1

（3）如图1.

力 $\boldsymbol{F}$ 在向量 $\boldsymbol{S}$ 上的分力为 $F\cos\theta$。

2. 回答下列问题，并说明理由.

已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$。

(1) $\boldsymbol{b}$ 是否垂直 oz 轴？

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 是否平行？

(3) $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 是否垂直？

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是否共面？

3. 讨论下列命题是否正确？说明理由。

(1) 若 $\boldsymbol{a}\neq 0$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\neq 0$ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；

(3) 若 $\boldsymbol{a}\neq 0$ $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\end{cases}$ 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。

4. 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$，则 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面。

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求一单位向量 $\boldsymbol{\theta}$，使 $\boldsymbol{\theta}\perp\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共面。

6. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$。

(1) 满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 的向量 $\boldsymbol{c}$ 存在吗？为什么？

(2) 若存在 $\boldsymbol{c}$，写出满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 的向量 $\boldsymbol{c}$ 的投影表示式。

(3) 求出 $|\boldsymbol{c}|$ 为最小的那个向量。

说明

1. 为了引导学生对问题作深入的思考，有必要准备一批追问的问题。如围绕第 1-(2) 题讨论时，可以准备下列问题。

问题 1：任何一个向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq 0)$，其单位向量应如何表达？

问题 2：$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的方向角是 $\pi/3$, $\pi/3$, $\pi/3$ 吗？它的方向余弦是什么？

问题 3：模一定，与 x, y, z 轴正方向夹角相等的向量有几个？位于何处？方向角是多少？

问题 4：任意三个角都能构成一个方向吗？任给两个角，

就一定能由关系式 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 求出第三个角，从而构成向量的方向角吗？若已知 $\alpha=45°$，$\beta=30°$，$\gamma=?$ 请从几何上作出解释。

问题 5：α，β，γ 满足条件 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 是构成方向角的什么条件（充分条件、必要条件、充分必要条件）？并证明之。

对于第 2 题，可先提问：如何判别两个向量垂直？平行？如何判别三个向量共面？

每个小题的正确解答如下：

（1）$\boldsymbol{b}$ 在 xoy 面内故与 oz 垂直或 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}=0$。

（2）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\neq\lambda\boldsymbol{c}$ 或 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq 0$ 故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行。

（3）$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$。

（4）$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq 0$，故 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面。

2．第 3 题是要学生搞清向量的乘积（数量积与向量积）是一种新的运算，它与代数运算有相同处又有不同处。在向量运算中消去律是不成立的。这从对（1），（2）的讨论中可以说明。

（1）可先画出当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 的图形如图 2，引导学生从数量积的定义来讨论：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta_1=(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}\cdot|\boldsymbol{a}|$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\theta_2=(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{a}}\cdot|\boldsymbol{a}|$$

只能得出 $(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{a}}$ 的结论。从图上看，这个结论也是显而易见的。故得不出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的结论。

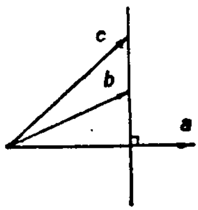

图 2

（2）请学生仿照（1）的分析方法，来加以讨论。从向量积的定义和图 3 均可得到这样的结论：

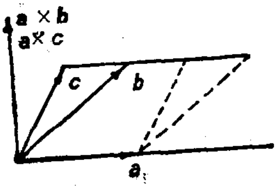

图 3

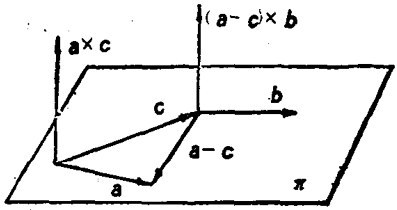

图 4

① $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 在同一平面内；

② $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的同一侧；

③ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$；

④ $|\boldsymbol{b}|\sin\theta_1=|\boldsymbol{c}|\sin\theta_2$。

3. 第 4 题在证明之前可先引导分析题目所给的条件。对于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$，若其中 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$ 即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共线。结论显然成立。因此，以下是在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线情况下证明的。进而引导学生用多种方法证明。至少有以下两种方法：

法 1： 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，

故 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$。

所以 $\boldsymbol{b}$ 必在平面 π 上，如图 4。

所以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面。

法 1 的另一种证法：由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$，推出 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 共面，而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ 均垂直于 $\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ 决定的平面，故 $\boldsymbol{b}$ 也垂直于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，由此得出 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面。

法 2：利用三个向量共面的充分必要条件是其混合积为零。要证 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面，只要证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$。

对等式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$ 两端与 $\boldsymbol{a}$ 作点积，因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{a}$，所以有 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0$。

由 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0$，有 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面。

紧接着，可提问请学生迅速回答：

若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为互不平行的单位向量，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 吗？为什么？注意此处 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 之间的关系，夹角 θ 的大小。正确的回答是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-3/2.$$

4． 第 5 题解法较多。

法 1：待定系数法。

设所求 $\boldsymbol{\theta}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，由已知条件列出 x，y，z 的三个三元方程。

$$\begin{array}{ll} |\boldsymbol{\theta}|=1 & \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1; \\ 2x-2y+z=0; \\ 2y+z=0. \end{array}\right. \\ \boldsymbol{\theta}\perp\boldsymbol{c} & \\ \boldsymbol{\theta}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} & \end{array}$$

解得 $\boldsymbol{\theta}=\pm\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right)$.

法 2：由已知 $\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，则 $\boldsymbol{\theta}$ 可表示为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性组合。

设 $\boldsymbol{\theta}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{i}+\mu\boldsymbol{j}-2\mu\boldsymbol{k}$，根据已知条件：

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\theta}\perp\boldsymbol{c} & \left\{\begin{array}{l} 2\lambda-2\mu-2\mu=0; \\ \lambda^2+5\mu^2=1. \end{array}\right. \\ |\boldsymbol{\theta}|=1 & \end{array}$$

解得 $\mu=\pm1/3$，$\lambda=\pm2/3$。

法 3：由已知 $\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，可知 $\boldsymbol{\theta}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{\theta}\perp\boldsymbol{c}$，故 $\boldsymbol{\theta}//(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$。可直接得到

$$\theta = \frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}}{\pm|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|}.$$

但写成 $\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\pm|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|}$ 是错误的。可让学生思考错在那里？事实上，$\theta\perp\boldsymbol{a}$ 且在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 所在的平面上，不符所给条件。

5. 第 6 题主要明确分析方法。

首先由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是否为零来确定 $\boldsymbol{c}$ 的存在性。因为如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 存在，则必有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}$ 不垂直 $\boldsymbol{b}$，那么不存在 $\boldsymbol{c}$ 使 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$。再用待定系数法求出 $\boldsymbol{c}$ 的投影表示式。

设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 得到方程组：

$$\begin{cases} y+z=1 & \text{①} \\ 2x-z=1 & \text{②} \\ 2x+y=2 & \text{③} \end{cases}$$

方程①为多余方程，②，③是独立的。

$$\begin{cases} x=x \\ y=2-2x \\ z=2x-1 \end{cases}$$

故 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{i}+(2-2x)\boldsymbol{j}+(2x-1)\boldsymbol{k}$，即 $\boldsymbol{c}$ 有无穷多个向量。

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+(2-2x)^2+(2x-1)^2}=\sqrt{(3x-2)^2+1}.$$

当 $3x-2=0$ 时，即 $x=2/3$ 时，$|\boldsymbol{c}|$ 最小，$|\boldsymbol{c}|_{\min}=1$，此时，$\boldsymbol{c}=\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$.

提问：若 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$ 有几个向量？

第 6 题的简图如图 5，图中两平行直线的距离为 1，不能

大也不能小，由 $|b|$ 与 $|a|$ 决定的。

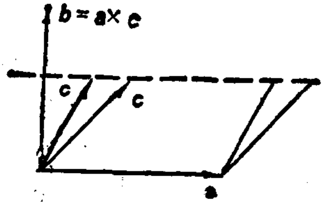

图 5

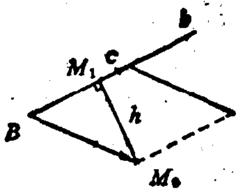

图 6

参考题

1．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，求此平行四边形中与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的高线向量 $\boldsymbol{h}$。（提示：应考虑 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角为锐角、钝角、直角等各种情况时的 $\boldsymbol{h}$。答案：$\boldsymbol{h}=\pm\left(\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}\right)$。）

2．向量 $\boldsymbol{b}$ 过点 $B(1, 2, 3)$ 与向量 $\boldsymbol{c}=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 平行，求点 $M_0(3,4,2)$ 到向量 $\boldsymbol{b}$ 的距离。（要求学生总结各种做法，并比较之。答案：$h=20\sqrt{2}/11$。）

本题可帮助学生开阔解题思路．

作出简图（图 6）．注意 $\boldsymbol{b}$ 过 B 点与 $\boldsymbol{c}$ 平行，将 $\boldsymbol{c}$ 移到 B 点（自由向量），问题转化为求以 $\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BM_0}$ 为两边的平行四边形的高，要求学生用向量代数方法求解．

法 1：用向量积来求，

$$h=\frac{|\boldsymbol{c}\times\overrightarrow{MB_0}|}{|\boldsymbol{c}|}.$$

法 2：用数量积来求。

$BM_1=(\overrightarrow{BM_0})_c$，$h=\sqrt{|BM_0|^2-|BM_1|^2}$。

法 3：过 M_0 作一平面 π 垂直于向量 $\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{b}$ 与 π 的交点 M_1 的坐标，再由两点的距离公式求出 $h=|\overrightarrow{M_1M_0}|$. 此法计算量大，但思路较清楚.

3. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为非零且不共面的三个向量，欲使四个向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 的终点在同一平面上，问 x, y, z 之间应满足什么条件？

此题主要考察学生的解题思路及逻辑推理能力，可让学生按照解题思路写出每一步的道理.

思路 1：①$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$ 至少有两个向量不共线，那么另一个向量必能表成此两向量的线性组合. ②找到 x, y, z, λ, μ 的三个方程，消去 λ, μ 就可得到 x, y, z 满足的一个关系式.（答案：$x+y+z=1$.）

思路 2：由 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$ 共面. 得出混合积 $[(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})\times(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})]\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})=0$，由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面，得到

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ x & y-1 & z \\ x & y & z-1 \end{vmatrix}=0,$$

解得 $$x+y+z=1.$$

第二讲　平面方程与直线方程

本次辅导课的重点是训练学生熟练、灵活地运用向量来求平面与直线的方程. 空间解析几何习题中经常有一题可以多解的情况. 这种题与平面解析几何类似，一般是首先分析几何条件，然后用代数方法去实现. 对于本讲所选的题，要求学生对每一道题都能提出两种以上的解法. 通过对各种解法的评价、

讨论，激发思维、开阔思路，达到保持和发扬多数学生在中学时代就具有的对数学浓厚兴趣之目的。

选题

1. 平面过点 $P(2,3,4)$ 及 z 轴，求其方程。

2. 将直线的一般式方程 L：$\begin{cases} x=2z-5 \\ y=6z+7, \end{cases}$ 化为标准方程.

3. 直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求直线方程.

4. 求过点 $A(1,0,-2)$ 与平面 π：$3x-y+2z+3=0$ 平行，且与直线 L_1：$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线 L 的方程.

5. 已知 $|\overrightarrow{OM_0}|=p$，$O$ 为原点，$p\neq 0$，$\overrightarrow{OM_0}$ 方向角为 α，β，γ。证明：过点 M_0，且垂直于 $\overrightarrow{OM_0}$ 的平面方程为

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

说明

1. 第 1 题要求学生先根据题意作出草图如图 7。

法 1：由已知条件分析，所求平面也过原点，平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 既垂直于 z 轴又垂直于 $\overrightarrow{oP}$。所以

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{oP}\times\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}.$$

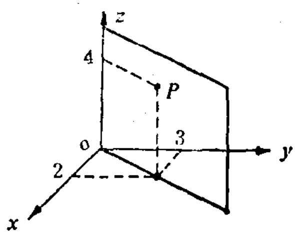

图 7

由点法式（平面过原点，以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量）得所求平面方程为 $3x-2y=0$。

法 2：找出所求平面上的三个已知点 $o(0, 0, 0P)$，$(2, 3, 4)$，q $(0, 0, 1)$。若 $M(x, y, z)$ 是平面上任意一点，根据三个向量共面的条件，有 $\overrightarrow{oM}\cdot(\overrightarrow{oP}\times\overrightarrow{oq})=0$。即

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

为所求平面方程。

法 3：待定系数法。

由草图分析，平面是过原点且平行于 z 轴的柱面。根据柱面方程的特点（方程中缺 z），设平面方程为：

$$ax+by=0.$$

又平面过 $P(2, 3, 4)$，将 P 代入所设平面方程，解出 $a=-\dfrac{3}{2}b$，得到 $-\dfrac{3}{2}bx+by=0$，$(b\neq0)$。

所以 $3x-2y=0$ 为所求平面方程。

法 4：平面束法。

过 z 轴（即 $x=0$，$y=0$ 二平面的交线）作平面束方程：$\lambda x+\mu y=0$。所求平面就是此平面束中过 P 点的那个平面。将 P 点代入平面束方程，求出 λ，μ 即得平面方程。

比较以上四种方法，前两种方法是用向量之间的关系得到平面方程，后两种方法都是在分析了所求方程的特点后作出假设。各自的思路不同，但解法类似，也简单。

2. 第 2 题比较简单，要求学生至少用两种方法。下面介绍几种做法。

法 1：直线 L 的一般方程由两个平面方程联立。由两平面法线向量的向量积可得直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$。再在 L 上找一点（令 $z=0$，则 $y=7$，$x=-5$），由该点 $(-5, 7, 0)$ 及方向向量 $\boldsymbol{s}$，可得直线的标准方程：

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{6}=\frac{z}{1}.$$

法 2：在直线 L 上找出两个点，可得直线的方向向量，根据一点一方向可直接写出直线的标准方程。

法 3：由 L 的一般方程写出 L 的参数方程。

即

$$L:\begin{cases}x=t\\ y=22+3t\\ z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$$

由此可得 $M_0(0,22,5/2)$ 是 L 上一点，方向向量 $\mathbf{s}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}$。再由 M_0，$\mathbf{s}$ 可得 L 的标准方程。

法 4：从直线标准方程的构造：$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 出发。由 L 的一般式方程：

$$L:\begin{cases}x=2z-5\\ y=6z+7\end{cases}$$

中解出 $z=\dfrac{x+5}{2}$，$z=\dfrac{y-7}{6}$。由此可得等式 $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{6}=\dfrac{z}{1}$，即为 L 的标准方程。

3. 第 3 题首先根据题意作出草图如图 8。从不同角度分析其几何关系，便得出不同的解法。

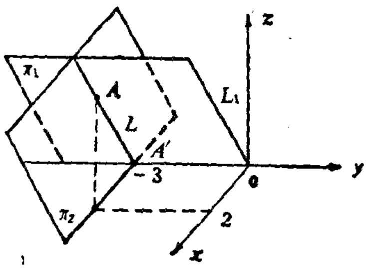

图 8

法 1：点 A' 是点 A 在 y 轴上的投影，显然就是直线 L 过 A 与 y 轴垂直相交的交点。可以取 $\mathbf{s}=\overrightarrow{A'A}=2\mathbf{i}+4\mathbf{k}$，由已知点 A 及 $\mathbf{s}$ 可得直线 L 的标准

方程：

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

法 2：利用向量平行的关系．设 $B(x,y,z)$ 是 L 上任意一点，

$$\overrightarrow{BA}=(x-2)\boldsymbol{i}+(y+3)\boldsymbol{j}+(z-4)\boldsymbol{k},$$

由 $\overrightarrow{BA}//\overrightarrow{A'A}$ 的关系，可知二平行向量的投影表达式的系数成比例，立即可得 L 的标准方程：

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

法 3：过 A 点及 y 轴作平面 π_1，且过 A 点作垂直于 y 轴的平面 π_2．π_1 与 π_2 的交线就是所求直线 L．

求 π_1 平面：π_1 过 A 及 y 轴，其方程为 $ax+bz=0$，由 $A(2,-3,4)$可得 $a=-2b$. 所以，π_1 的方程为 $2x-z=0$. 而 π_2 就是 $y=-3$（为什么？），所以直线 L 的方程为

$$\begin{cases}2x-z=0\\ y=-3.\end{cases}$$

法 4：设直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+lt\\ y=-3+mt\\ z=4+nt,\end{cases}$$

由已知条件列方程解出 l，m，n．$l=-2/t$，$m=0$，$n=-4/t$．令 $t=-1$，则 $l=2$，$m=0$，$n=4$．所以直线 L 的方程为：

$$\begin{cases}x=2+2t\\ y=-3\\ z=4+4t\end{cases}.$$

法 5：由于所求直线 L 垂直于 y 轴，必平行于 xoz 面。由法 3 得到的平面 π_1：$2x-z=0$ 与 xoz 面的交线 L_1 是 L 的平行线，也是 L 在 xoz 面上的投影。L_1 是 xoz 面上过 $o(0,0,0)$ 的平面直线，其参数方程显然是：

$$\begin{cases} y=0 \\ x=2t \\ z=4t. \end{cases}$$

由此得到 L 的参数方程为：

$$\begin{cases} y=-3 \\ x=2t \\ z=4t. \end{cases}$$

4. 第 4 题首先要让学生明确本题的条件及注意事项。

条件 1：A 点在 L 上。

条件 2：$L // \pi$，即 $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$。

条件 3：L 与 L_1 相交，即 L 与 L_1 共面。

注意到 L_1 的方程不标准，先将其标准化，以免引起不必要的错误。

$$L_1:\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1},$$

即 $M_1(1,3,0)$，$\boldsymbol{s}_1=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$。

法 1：交面式

思路：① 过 A 点作平面 π_1 与平面 π 平行。② 过 A 点与 L_1 作平面 π_2，则 π_1 与 π_2 的交线即为所求直线 L。

草图如图 9。

π_1 平面：点 $A(1,0,-2)$，$\boldsymbol{n}_1=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，

$$3(x-1)-y+2(z+2)=0$$

$$3x-y+2z+1=0$$