国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

经典系列·22

王竹溪遗著选集

第一分册

复变函数大要

王竹溪 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

经典系列·22

王竹溪遗著选集

第一分册

复变函数大要

王竹溪 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

王竹溪遗著选集:全3册/王竹溪著.—北京:北京大学出版社,2014.12
(中外物理学精品书系)
ISBN 978-7-301-25219-2

Ⅰ.①王… Ⅱ.①王… Ⅲ.①理论物理学—研究 Ⅳ.①O41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第285113号

书　　　名:王竹溪遗著选集
著作责任者:王竹溪　著
责 任 编 辑:顾卫宇
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-25219-2/O·1058
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
新 浪 微 博:@北京大学出版社
电 子 信 箱:zpup@pup.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
印　刷　者:北京中科印刷有限公司
经　销　者:新华书店
730mm×980mm　16开本　30印张　530千字
2014年12月第1版　2014年12月第1次印刷
定　　　价:90.00元(全三册)

伽

47. 嘎马函数 (W-W, p. 235)

Weierstrass 定義 $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}, \qquad (1)$$

其中 $$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left\{ 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m} - \ln m \right\} = 0.5772157\cdots$$ 为Euler常数.

可求得 $$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} \right) + \ln\frac{m+1}{m} \right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \right\} \qquad (2)$$

根據這个定義得知 $1/\Gamma(z)$ 是一个整函数，以 $z=-n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 为一级零点. 因此 $\Gamma(z)$ 是一个亚纯函数，以 $z=-n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 为一级极点.

很容易证明 $$\Gamma(1)=1, \qquad \Gamma'(1) = -\gamma. \qquad (3)$$

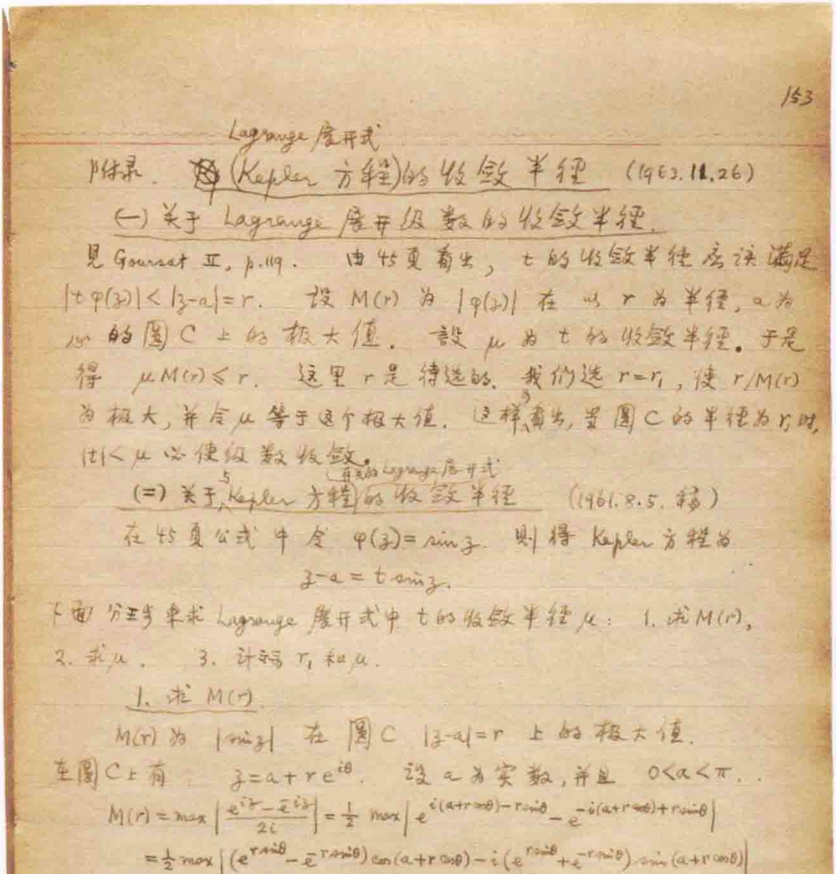
取对数得（注意這是多值函数，需要適当選擇）
$$\ln\Gamma(z) = -\ln z - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{z}{n} - \ln\left(1+\frac{z}{n}\right) \right\} \qquad (4)$$

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right\} \qquad (5)$$

将(2)代入(4)，得
$$\ln\Gamma(z) = -\ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ z\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{z}{n}\right) \right\} \qquad (6)$$

由(2)得
$$\left.\begin{aligned} e^{\gamma} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{\frac{1}{n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \right\}, \\ \text{或} \quad e^{-\gamma} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

《复变函数大要》原稿68页



153

附录. Lagrange展开式 (Kepler 方程)的收敛半径 (1963.11.26)

(一) 关于 Lagrange 展开级数的收敛半径

见 Goursat Ⅱ, p.119. 由45页看出, t 的收敛半径应该满足 $|t\varphi(z)|<|z-a|=r$. 设 $M(r)$ 为 $|\varphi(z)|$ 在以 r 为半径, a 为心的圆 C 上的极大值. 设 μ 为 t 的收敛半径. 于是得 $\mu M(r)\leqslant r$. 这里 r 是待选的. 我们选 $r=r_1$, 使 $r/M(r)$ 为极大, 并令 μ 等于这个极大值. 这样可看出, 当圆 C 的半径为 r_1 时, $|t|<\mu$ 必使级数收敛.

(二) 关于5 Kepler 方程(开普勒的 Lagrange 展开式)的收敛半径 (1961.8.5. 稿)

在45页公式中令 $\varphi(z)=\sin z$. 则得 Kepler 方程为

$$z-a=t\sin z.$$

下面分三步来求 Lagrange 展开式中 t 的收敛半径 μ: 1. 求 $M(r)$, 2. 求 μ. 3. 计算 r_1 和 μ.

1. 求 $M(r)$

$M(r)$ 为 $|\sin z|$ 在圆 C $|z-a|=r$ 上的极大值.

在圆 C 上有 $z=a+re^{i\theta}$. 设 a 为实数, 并且 $0<a<\pi$.

$$M(r)=\max\left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right|=\frac{1}{2}\max\left|e^{i(a+r\cos\theta)-r\sin\theta}-e^{-i(a+r\cos\theta)+r\sin\theta}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\max\left|\left(e^{r\sin\theta}-e^{-r\sin\theta}\right)\cos(a+r\cos\theta)-i\left(e^{r\sin\theta}+e^{-r\sin\theta}\right)\sin(a+r\cos\theta)\right|$$

$$4M^2=\max\left\{\left(e^{r\sin\theta}-e^{-r\sin\theta}\right)^2\cos^2(a+r\cos\theta)+\left(e^{r\sin\theta}+e^{-r\sin\theta}\right)^2\sin^2(a+r\cos\theta)\right\}$$

$$=\max\left\{e^{2r\sin\theta}+e^{-2r\sin\theta}-2\cos(2a+2r\cos\theta)\right\}$$

$$=2\max\left\{\operatorname{ch}2r\sin\theta-\cos(2a+2r\cos\theta)\right\}$$

《复变函数大要》原稿153页

“中外物理学精品书系”
编 委 会

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌,是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是,在把西方物理的精华要义“请进来”的同时,也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻,引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态,可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面,改革开放几十年来,我国的物理学研究取得了长足发展,一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域,使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解,不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”,也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”,对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是,“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来,中国物理界诞生了很多经典作品,但当时大都分散出版,如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中,读者们对这些论著也都是“只闻其声,未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫,对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值,不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献,充分发挥其应有的传世育人的作用,更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统,真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出,“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径,是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新,而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信,这套“中外物理学精品书系”的出版,不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣,也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展,为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任

中国科学院院士,北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

出 版 说 明

王竹溪是我国著名理论物理学家，他一生治学勤奋，笔耕不辍，身后留下大量讲稿、笔记、算草和日记．在他 1983 年不幸因病辞世时，彭桓武、周光召和何祚庥三位在一篇悼念文章 (见《物理》 12 卷第 7 期) 中就说过：“竹溪同志在研究各种学问时所做的大量的笔记是学生们的宝贵参考书．竹溪同志在科学上涉猎极广，特别在古典物理和古典数学方面，有极深的造诣．他每涉猎过一个新领域，就一定整理成一本本很厚、但又很工整的笔记．这不仅促使竹溪同志在他所涉猎过的领域达到很深入的水平，而且也极大地启迪了后辈．他的著名的热力学著作，统计物理的著作以及他和郭敦仁同志合著的特殊函数的著作，就是根据他的笔记加以整理和发展而成的．……在西南联大、清华大学物理系，历代学生相传的一条重要经验：谁要想学习理论物理学，一条方便的道路就是直接借阅竹溪先生的笔记．除上面提到的热力学和统计物理以外，他的电动力学笔记，量子力学笔记都是历代弟子‘必读’的‘参考资料’．……应该说，竹溪同志的笔记是他给我们留下的一笔珍贵遗产．我们希望北京大学的同志们能够注意收集、保存和整理他的笔记，以便在适当时候加以出版．”

王竹溪留下的数十本笔记，分别使用了英、德、法、中等多种文字．他在西南联大和清华时，是用英语授课，留下的讲稿和讲义都是英文的．后来到北大，改用中文授课，就留下了一些中文的讲稿和笔记．现在从中选出内容完整自成体系的《复变函数大要》《量子力学中一些重要理论》和《量子电动力学重正化理论大要》三部，结集为《王竹溪遗著选集》，分成三本分册出版，以飨读者．由于已经不可能征询作者的意见，我们在编排中尽量避免改动原稿，除了极个别明显的笔误外，只改动了个别字词，另外，按照编辑出版的风格，在行文格式和标点上作了少量适当的调整，并加了一些说明情况或帮助理解的注释．此外，为了帮助读者检索，在每一分册的书末都加编了一个简单的索引．总的来说，我们很少加工和修饰，希望为读者提供一份原汁原味的笔记．

由于这些笔记写作于多年之前，原稿的一般情况、写作背景和时代背景等基本信息对读者就显得十分重要．这些在每一分册的后记中都有简略的介绍和说明，可供读者参考．

内容简介

本书是我国著名理论物理学家王竹溪教授的一份遗稿，正文写于1953年秋季学期，是为北大物理系初次开设数学物理方法课的第一部分复变函数大要的讲稿，包括复变函数、复变积分、无穷级数、逊纯函数、无穷乘积、渐近级数、Fourier 换式、Laplace 换式、伽马函数、超比函数、Legendre 函数、球函数、汇合超比函数等 50 节，附录则写于1963年. 全书概念严格准确，理路清晰明白，方法巧妙简洁，推演细致缜密，讨论普遍深入，体现了王竹溪一贯严谨与简洁的风格和品味，以及他具体细致的作风. 适合大学物理系学生和研究生，以及对复变函数和我国大学物理系数学物理方法课程的发展演变有兴趣的广大读者.

目　　录①

① 本书取自王竹溪一本题为“数理物理方法”的笔记，这里只收入其第一部复变函数大要(即本书 1—50 节) 和附录 (即本书附录) 两部分. 第二部数理物理方程包括数理物理方程、二级偏微分方程的分类、弦的横振动、 D'Alembert 的解法、富氏方法、强迫振动、空间波动方程、非齐次方程、唯一性定理、电报方程等 10 节，是王竹溪听胡祖炽讲课的记录，这里从略. 详见本书后记. —— 编者注

① 原稿标题后还有“ (gamma fu.) ”，下节标题后还有“ (hypergeometric fu.) ”. 作者常在标题后加英文括注，并用简写或缩写，在正文中这种情形更多. 此亦佐证这是一份讲稿. 下同. —— 编者注

② 原稿为“ Euler 积分， Dirichlet 积分”. —— 编者注

① 原稿为 Ferrer's associated Legendre fu., 其中 Ferrer's 系 Ferrers' 之误. 当时知识分子 “思想改造” 运动刚刚结束, 大学授课用外语被批判为 “崇洋媚外” 和 “洋奴思想”, 开始改用中文授课, 但许多专业术语尚无恰当译名, 或者出于习惯, 偶尔还用英文. 本书这种情形不多, 我们仅将入目录的标题译出, 其余均按原稿照录, 酌加译注.　—— 编者注

② 原稿为 “渐近展开式”, 这里用原稿正文中的标题.　—— 编者注

1. 复　　数

一对实数，a, b, 适合一定条件的，叫做复数 α:

$$\alpha = (a, b) = a + b\,\mathrm{i}. \qquad \text{[超越复数]}$$

其所适合之条件为

$$\text{(i)}\quad \alpha + \alpha' = (a + a') + (b + b')\,\mathrm{i},$$

$$\text{(以实数乘的例)}\quad \text{(ii)}\quad \alpha\alpha' = (a + b\,\mathrm{i})(a' + b'\,\mathrm{i}) = (aa' - bb') + (ab' + ba')\,\mathrm{i}.$$

i 为一复数，由 (ii) 得 (令 $\alpha = \alpha' = \mathrm{i}$)

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

同样，得

$$(-\mathrm{i})^2 = -1.$$

故 $\pm\mathrm{i}$ 为

$$x^2 + 1 = 0$$

之解. 用了 $\mathrm{i}^2 = -1$ 的关系后，复数的运算就和实数在形式上完全相同了. 所有的复数构成一复数域.

有时把 a 写为 $\mathrm{R}(\alpha)$, b 写为 $\mathrm{I}(\alpha)$ ①. a 为 α 的实数部分，b 为 α 的虚数部分.

$$\overline{\alpha} = a - b\,\mathrm{i}$$

是 α 的共轭复数.

$$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2.$$

减法与除法和实数运算法一样：设

$$\alpha - \alpha' = \beta,$$

则

$$\alpha = \beta + \alpha'.$$

设

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

① $\mathrm{R}(\alpha)$, $\mathrm{I}(\alpha)$ 现在通常写成 $\mathrm{Re}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\alpha)$. —— 编者注

则

$$\alpha' = \gamma\alpha.$$

由 $\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$, 得

$$\alpha'\overline{\alpha} = \gamma\alpha\overline{\alpha} = \gamma(a^2 + b^2),$$

故

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{a' + b'\,\mathrm{i}}{a + b\,\mathrm{i}} = \frac{\alpha'\overline{\alpha}}{a^2 + b^2} = \frac{(a' + b'\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i})}{a^2 + b^2} = \frac{aa' + bb' + (ab' - ba')\,\mathrm{i}}{a^2 + b^2}.$$

若一复数 $\alpha = 0$, 则

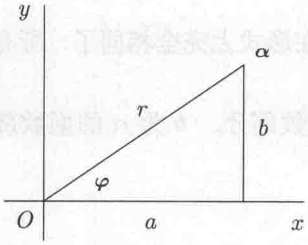
$$a = 0, \quad b = 0.$$

因为 $\alpha + 0 = \alpha$. 又若 $\alpha\alpha' = 0$, 则必有

$$\alpha = 0 \ \text{或} \ \alpha' = 0.$$

因为若 $\alpha \neq 0$, 则乘以 $\overline{\alpha}$, 即得 $\alpha' = 0$.

2. 复数的几何表示法



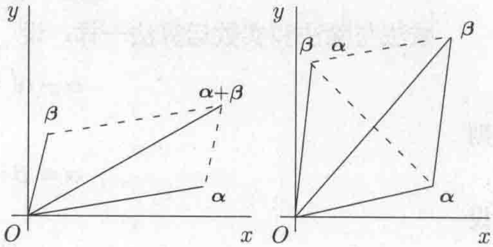
$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2}, & \text{为模 (modulus)} \\ \varphi = \arctan\dfrac{b}{a}, & \text{为辐角 (argument)} \end{cases}$$

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi,$$

$$\alpha = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

$r = |\alpha|$, $\varphi = \arg\alpha$ 是常用的符号. 辐角可差 $2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

加减法的几何表示法见右图, 平面 (x, y) 称为复数平面.



关于乘法:

$$\alpha = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

$$\beta = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi),$$

$$\alpha\beta = r\rho\big[\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)\big].$$

故

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \qquad \arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta.$$

伸长与旋转: 乘以 i 等于旋转 90°.

推广：

$$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n| = |\alpha_1||\alpha_2|\cdots|\alpha_n|, \qquad \arg(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) = \arg\alpha_1 + \cdots + \arg\alpha_n.$$

故

$$\big[r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\big]^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi). \qquad \text{[de Moivre 公式]}$$

$$\alpha^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

除法：

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|}, \qquad \arg\frac{\beta}{\alpha} = \arg\beta - \arg\alpha.$$

不等式：

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|, \qquad |\alpha-\beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|.$$

3. 复变函数

$$w = f(z), \qquad w = u + \mathrm{i}v, \qquad z = x + \mathrm{i}y.$$

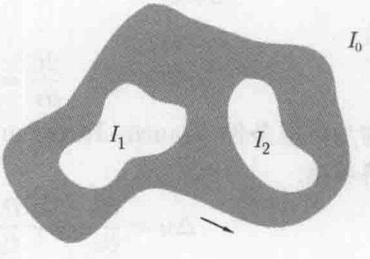
对于每一复数 z, 有一相当的复数 w 与之对应. 只有一个 w 值时， $f(z)$ 为单值函数；有数个 w 值时， $f(z)$ 为多值函数. 显然， u 和 v 都是 x 及 y 的实函数：

$$w = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y).$$

假定函数 $f(z)$ 给定在某一区域 G 之内*, G 由平面上的点所组成. 这个区域的界是有限个连续闭曲线 ($I_0, I_1, I_2, \cdots$, 见图) 所构成的，每个连续闭曲线没有重点，称为若当 (Jordan) 曲线. 一个若当曲线可由参数方程：

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

表达，其中 $x(t), y(t)$ 是 t 的连续函数，而给定一值 t 时只有一组 x, y 值 (两个不同的 t 值一定相当于曲线上两个不同的点), 而反过来曲线上两个不同点总有两个不同的 t 值，除 $t=\alpha$ 或 $t=\beta$ 以外. 若



$$x(\alpha) = x(\beta), \quad y(\alpha) = y(\beta),$$

则曲线是封闭的. 一个若当曲线分平面为两个区域，一为外部，一为内部，内部为沿正向进行时左边的区域. 一个圆是一个若当曲线的例子. 任何若当曲线可

* 区域：点 P 是集合 E 的内点，若以 P 为心的小圆内各点都属于 E. G 是一区域若 (i)G 纯粹由内点组成； (ii) 对于集合中任意两点，总可用足够多的线段组成的折线把它们连起来，并使得折线上所有的点都属于 G.

与圆对应.

连续性 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点是连续的条件:

$$|f(z)-f(z_0)|<\epsilon, \qquad 若 \quad |z-z_0|<\delta. \quad (在区域\ G\ 内)$$

$w=z^n$ (n 是正整数) 在平面上每点都是连续的，因为

$$z^n-z_0^n=(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+z_0^{n-1}),$$

$$|z_n-z_0^n|\leqslant|z-z_0|(r^{n-1}+r^{n-2}r_0+\cdots+r_0^{n-1}).$$

一致连续性 $|f(z')-f(z'')|<\epsilon$, 若 $|z'-z''|<\delta$.

4. 单演函数

$w=f(z)$ 在 z 点可导 (differentiable) 时，若

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\longrightarrow f'(z),$$

不论 h 如何趋于 0. 又称为*单演的* (monogenic). 这和实变数可导不同，举 $x-y\mathrm{i}$, $R(z)$ 为例，在区域内是*解析的*.

微分: $\Delta w=f'(z)\Delta z+\eta\Delta z$.

5. 哥里条件

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta y=0)}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\(\Delta x=0)}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

称为哥里条件 (Cauchy-Riemann relation). 反过来，哥里条件加上 (u,v) 可导性得单演.

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\eta_1, \qquad \Delta v=\cdots,$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\eta_3, \qquad \eta_3=\frac{\eta_1+\mathrm{i}\eta_2}{\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y}\to 0.$$

调和共轭函数: 假设 u, v 有二级偏导函数. (以后可证明解析函数一定有各级导函数)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad 同样有 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$