

经典物理学

(1)

〔日〕汤川秀树 主编

科学出版社

内 容 简 介

本书是日本著名物理学家汤川秀树主编的《岩波讲座 现代物理学基础》的第一卷,重点介绍经典物理学中的经典力学,经典电动力学.由浅入深地阐述了力学、光学、电磁学的过去和现在.较为系统地介绍了物理学发展中具有重大历史意义的观点和方法,并指出了许多尚待解决的问题.

本书适合于理工科高等院校师生阅读,也可供其它科研人员参考.

湯川秀樹 監修
古 典 物 理 学

(I)

岩波書店 1978

经典物理学

(I)

〔日〕汤川秀树 主编
周成民 方丹群 译
方旋 陈 潜 郭永江 校
责任编辑 朱毓敏

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1986年9月第一版 开本:787×1092 1/32

1986年9月第一次印刷 印张:18 1/2

印数:0001—4,600 字数:425,000

统一书号:13031·3286

本社书号:4891·13—3

定价: 4.30 元

译者前言

本书是“岩波讲座 现代物理学基础”的第一卷。主编汤川秀树教授是国际上享有盛名的日本物理学家，曾因预言介子的存在而荣获 1949 年诺贝尔物理学奖金，他在理论物理的许多领域均有重大贡献。

作者以物理学的发展为线索，由浅入深阐述了力学、光学、电磁学的过去和现在，用新颖的构思、确凿的史料、丰富的实验提供了学习和研究物理学的素材和方法。本书虽着重讲述经典物理学，但也有机地联系到现代物理学的最新成就。它不仅包括了物理学发展中具有重大历史意义的观点和结论，而且也指出了目前尚待解决的许多问题，如磁单极子的存在、夸克的验证、非线性波动方程的求解等等。这对进一步探讨现代物理学具有很大的启发性。

因此，本书对理科高等院校的教师和学生有很好的参考价值，对从事物理学史的研究工作者亦不失为一份难得的资料。

由于我们水平有限，错误之处在所难免，敬希读者提出宝贵意见，以期改进。

1979 年 9 月

序 言

本讲座把“经典物理学”理解成在现代物理学之前业已成立的理论体系，并通过该理论体系能够充分解释所有宏观物理现象。在这种情况下，我们把量子力学的创立作为现代物理学的起点。这种规定与现代物理学开始于二十世纪的通常概念略有不同。最重要的差别在于把相对论归入经典物理学范畴之中，还是把它看成现代物理学的一部分。然而究竟怎样做比较好，尚有很大的灵活性，并不存在什么决定性的理由，可以判断这两种做法中哪一种绝对是绝对必要的。本讲座把相对论归并到经典物理学，第一个理由是两者之间并没有什么鸿沟。与此密切相关的第二个理由是，相对论与经典物理学的其他领域一样，也是研究宏观现象的理论。不用说，狭义相对论的基本观点，即使在现代物理学中也仍然有它的生命力，这一点决不可忽视，然而对于各种微观现象，有些方面光靠它是无法解释的。从这个侧面来看，各种微观现象显示了与包含相对论在内的经典物理学相矛盾的性质。最初，人们认为存在作用量子或能量子，以这种形式来解释这种矛盾性质。随着量子的发现，“自然界是没有飞跃的”这个提法，在整个物理现象中已不复适用。因此，我们才有可能把一个仅仅以自然现象的连续性为大前提的理论体系——经典物理学——同现代物理学分开来。与此相应，所谓的早期量子论，就应该放到《量子力学》的开头加以概述。

鉴于上述理由，本讲座第一卷及第二卷所处理的《经典物理学》内容，就以经典力学、经典电动力学、相对论、热力学及

经典统计力学为主。但是，以这样的形态使经典物理学独立开来，其本身包含着与以往物理学教科书不相同的意图。也就是说，与其收罗无遗地来叙述经典物理学各领域的内容，倒不如重点描述那些能够表明它与现代物理学在各种不同意义上保持着密切联系的东西。我们不妨举出历史的关联，作为各种关联的一个例子。比如，最初作为物理学体系而建立的经典力学，通过十七世纪到十九世纪的发展，怎样为后来其它理论体系——如经典电动力学、相对论和量子力学等——的跃变打下基础的？在撰写第一卷第一部分“物质、空间和时间”的过程中，我们总是时时想到这个问题。而在第三章“连续体力学”中，除此之外，还介绍了有关非线性波动方程的最新研究成果。在第一章“物体的运动”中，则特别着重明确物质概念和空间概念之间的不可分割性。其中的研究，直接包含着与现在的基本粒子论相关的内容。另外，第二部分“光和电磁场”光学是十七世纪物理学的另一个支柱，它与力学同时并存。我们是从详细地讲它的历史开始，然后讲麦克斯韦和洛伦兹所完成的经典电动力学的发展过程。同时也是在介绍各种以太学说的演变史。由于相对论的出现，以太的存在遭到否定，此后也就很快被人们遗忘。但是，它所起到的历史作用却是非常巨大的；回顾这一点是有意义的。

第二卷第三部分“相对论”中，明确地显示出经典物理学作为一个统一体所具有的性质。而在第四部分“宏观状态的概念”中则阐明，尽管热力学是在物质原子结构的知识极为贫乏的时代产生的，但它在说明宏观现象时仍然不失为一个成效卓著的唯象理论；同时，还阐述了最近尚在探讨的相对论热力学。第五部分“经典力学的概率论处理”，并未按传统观点，把经典力学描述成各种物体运动的完全连续的因果关系，而是从迥然不同的观点出发，来重新评价布朗运动和波耳兹曼的

各态历经假说的；我们认为，这是新颖的立论。第六部分“经典物理学的世界像”，由现在叙述的牛顿-拉普拉斯因果律这个经典力学的传统解释出发，试图给出包括相对论在内的整个经典物理学所描绘出的世界像。它本身就是一个具有高度完整性的世界。然而，此后所产生的量子力学，在很多方面与经典物理学有着本质不同。不仅如此，还必须承认，即使在量子力学所给出的新的世界像中，经典物理学依然保持某种独立性，而且两者形成双重结构。有关它们之间的关联，请参看第四卷《量子力学 II》第八部分“量子力学的世界像”。

在这次发行第二版时，除对《经典物理学 I, II》进行部分勘误及字句修改外，内容未加变更。

汤川秀树

1977年11月

目 录

序言

第一部分 物质、空间和时间

第一章 物体的运动	1
§ 1.1 由几何学到运动学	1
§ 1.2 相对运动	12
§ 1.3 时间、空间和刚体运动	20
§ 1.4 物质的结构和运动	27
第二章 有关运动和力的定律	32
§ 2.1 惯性和力	32
§ 2.2 超距作用和接触作用	39
§ 2.3 旋转运动和惯性力	48
§ 2.4 开普勒三定律	56
§ 2.5 保守力和非保守力	64
§ 2.6 作为力学系的刚体	70
§ 2.7 变分原理和广义坐标	86
第三章 连续体力学	104
§ 3.1 前言	104
§ 3.2 应力	108
§ 3.3 应变	112
§ 3.4 应力和应变的关系	121
§ 3.5 变形的平衡	131
§ 3.6 变形的传播	141
§ 3.7 惠更斯原理	156
§ 3.8 一维点阵模型	168

§ 3.9 连续物质的运动	178
§ 3.10 流体的运动方程	184
§ 3.11 完全流体的运动	193
§ 3.12 粘滞流体的运动	207
§ 3.13 雷诺数	214
§ 3.14 逆散射法	220
§ 3.15 非线性波动方程的实例	231

第二部分 光和电磁场

第四章 光和以太	243
----------------	-----

前言——光和物质	243
----------------	-----

§ 4.1 光的周期性	252
-------------------	-----

§ 4.2 光的波动——惠更斯-菲涅耳-基尔霍夫原理	278
----------------------------------	-----

§ 4.3 偏振和旋光(光学活性)	319
-------------------------	-----

§ 4.4 光以太和运动物体中的光学现象	355
----------------------------	-----

§ 4.5 部分相干性和部分偏振光	376
-------------------------	-----

§ 4.6 波和粒子	407
------------------	-----

第五章 电磁场和电子	417
------------------	-----

§ 5.1 静电力的普利斯特莱-卡文狄希-库仑定律	420
---------------------------------	-----

§ 5.2 稳恒电流之间的相互作用	430
-------------------------	-----

§ 5.3 磁现象的电本质	441
---------------------	-----

§ 5.4 磁电感应和电极化	452
----------------------	-----

§ 5.5 位移电流	467
------------------	-----

§ 5.6 似稳恒现象的接触作用论解释	474
---------------------------	-----

§ 5.7 电磁场的基本方程组(I)	479
--------------------------	-----

§ 5.8 电磁场的基本方程组(II) 势函数表示	495
---------------------------------	-----

§ 5.9 电磁场的基本方程组(III) 哈密顿形式和非线性物质 方程	519
--	-----

§ 5.10 微观场方程和宏观场方程	530
--------------------------	-----

§ 5.11 各种电量及磁量的量纲和单位	560
----------------------------	-----

文献与参考书	571
--------------	-----

第一部分 物质、空间和时间



第一章 物体的运动

§ 1.1 由几何学到运动学

现代物理学虽然在很多方面和经典物理学显著不同，但是，它并不能完全脱离经典物理学而独立存在。可以说，现代物理学是由经典物理学演变而来的，如同具有较高级结构的生物是由具有较简单结构的生物进化而来一样。然而，不仅有这种历史上的联系，而且我们所说的物理世界当然还包括我们日常的经验世界，更正确地说，它是构成客观事物的总体的那一部分。这种经验世界依然需要通过经典物理学去理解。例如，即使在今天，我们研究眼睛能看到的物体的运动时，只要用经典力学来说明就可以了，不必每次都涉及构成物体的分子和原子的运动。不言而喻，今天与确立经典力学的十七世纪相比，情况已有很大不同。就拿上面所举的例子来说，在十七世纪人们对于物质结构几乎还没有什么确切的知识，然而到了十九世纪，就已经把宏观物体看成是由大量分子和原子构成的集合体，并通过对这种集合体的力学研究所得的结果，来理解眼睛能见到的宏观物体的运动；这样的尝试已获得了相当大的成功。但是，在那时人们也把在宏观世界中适用的经典力学的各种概念、定律，原封不动地推广到微观世界中去。然而，到了二十世纪，人们已认识到在微观世界中（特

别是关于电子和光的行为),需要采取与经典物理学不同的观点。这一事实亦同时表明,人们终于明了,以经典力学为出发点的经典物理学有它的适用范围。

但是,另一方面,我们所说的物理世界是具有相互物理联系各个部分所构成的整体。因此,对其中所发生的各种现象的理解方法,尽管随着情况不同有所变化,甚至或者对同一现象有着不同的解释,但是,最低限度它们必须能够并存不悖。例如,在光和电磁的各种现象中,有很多用经典电动力学就能充分说明的,但是也有象脉降和激光那样不用量子电动力学就无法理解的现象。尽管如此,并不能说在上述意义下的物理世界的整体性就已经丧失。这是因为,一方面,量子电动力学可以说是由经典电动力学演变而来的;另一方面,经典电动力学又是量子电动力学的基础。这样的双重关系在量子力学和经典力学之间也是存在的。狭义的经典力学,从建立之初开始直到十九世纪末叶,它的适用范围并不清楚。只是到了二十世纪,由于和经典力学有着本质不同的相对论和量子力学的出现,前者才终于明确了自己的界限,同时也由此明确了,它们是自己赖以存在的基础。

以上所说的,是经典力学作为物理学最初的坚固理论体系建立之后的情况。然而,这绝不是说,在此之前类似理论体系的东西不曾有过。早在古希腊时代,就有了在某种意义上已成体系的亚里士多德(Aristoteles)物理学和阿基米德(Archimedes)静力学。此后,还有欧几里德(Euclid)几何学。今天,欧几里德几何学已经完全脱离物理学而包括在数学范畴之中。但是,欧几里德几何学,按它的起源我们可以追溯到对土地面积的测量上,因而从根本上说,较多地带有经验科学的特点。而且,我们所生存的世界是一个三维的欧几里德空间,毫无疑问这一点一些人很早就清楚地认识到了(不过,

对于大多数人来说,大概是无意识的)。不能说人们一点不知道,通过加上时间这一维就能够正确地描述运动,特别是天体的运行。但是,我们今天所说的运动学,毕竟还是到了十七世纪以后才初具规模。当时,作为几何学的延伸而对整个运动进行研究的那种运动学,尚未得到独立地发展。什么样的运动从物理上来说是可能的呢?这个问题是和对运动起因的力的研究紧密地联系在一起,于是,比运动学再深入一步,力学便作为物理学的理论体系发展起来了。然而,不管历史情况如何,从理论上说,由于更具有一般性,更为简单,所以下面我们首先由运动的一般研究来开始讲述。

在今天的经典力学教科书中,通常是借助于矢量分析来描述运动的。尽管依靠矢量分析可以直观而明确地理解运动,而且能使描述简化,不过意外的是历史上在力学中使用矢量表示法是近期的事。大约最早出现在1880年前后出版的W. 吉布斯 (Willard Gibbs) 的

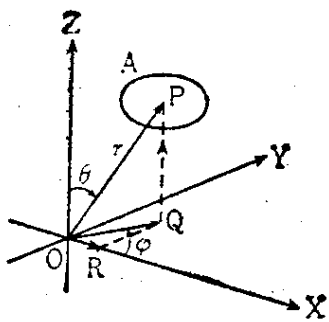


图 1.1

讲义中。这里我们首先要研究的是,矢量表示与坐标系概念之间的关系。我们先不考虑时间要素,设想在三维欧几里德空间中放置几个物体,它们可以看成是各自具有明确形状的几何体。

然后,在这个空间内设置一个直角坐标系。如图1.1所示,它由互相正交并通过原点的三条直线 $\overrightarrow{OX}$ 、 $\overrightarrow{OY}$ 、 $\overrightarrow{OZ}$ 构成。于是,物体A的表面上或者内部的任意一点P,都可以由笛卡儿 (Descartes) 坐标 (x, y, z) 唯一确定。显然, x 、 y 、 z 的大小可以分别用图中的线段 $\overline{OR}$ 、 $\overline{RQ}$ 、 $\overline{QP}$ 的长度给出。当R在由O指向X的半直线上,Q在由 $\overrightarrow{OX}$ 、 $\overrightarrow{OY}$ 所划出的XY

平面的四分之一象限中，P 在空间的上半部时，符号规定为正；相反就加负号。这里 Q 是由 P 向 XY 平面所引的垂线 $\overline{PQ}$ 的垂足，R 是由 Q 向 $\overrightarrow{OX}$ 所引的垂线的垂足。

可是，如图 1.1 所示，同一点 P 也可以用**矢量** $\overrightarrow{OP}$ 唯一确定，这个矢量是由从 O 到 P 的方向与长度所规定的。这时，长度 r 和笛卡儿坐标 (x, y, z) 之间的关系如下：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.1.1)$$

如图所示，其方向则由 $\overrightarrow{OP}$ 与 z 轴 $\overrightarrow{OZ}$ 的夹角 θ 以及 $\overrightarrow{OQ}$ 与 x 轴 $\overrightarrow{OX}$ 的夹角 φ 来决定。 r, θ, φ 和 (x, y, z) 之间的关系是

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

(r, θ, φ) 叫做点 P 的球坐标；大家知道，为了使它和笛卡儿坐标之间有一一对应的关系，需要加上如下限制：

$$0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (1.1.3)$$

通常把矢量 $\overrightarrow{OP}$ 称为**位置矢量** (position vector) 或**矢径** (radius vector)，并用符号 $\mathbf{r}$ 表示。就空间位置被固定的意义而言，可以把它叫做**固定矢量** (fixed vector) 或**束缚矢量** (bound vector)。在后面出现的大多数矢量，则与它相反，只要不改变方向和长度，都看作是相同的，随便放到什么地方都可以；从这个意义上讲，应该把这些矢量叫做**自由矢量** (free vector)。但是，也有不少情况，不考虑这种区别，或者有意不考虑这种区别，这样更为方便，而且也是允许的。矢径 $\mathbf{r}$ 和笛卡儿坐标 (x, y, z) 之间的上述关系，又常常可以表示成下面的矢量关系：

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad (1.1.4)$$

这里， $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是单位长度并分别由 O 指向 **X**、指向 **Y** 和指向 **Z** 的矢量，如图 1.2 所示。因为 $\mathbf{r}$ 是固定矢量，所以照理应

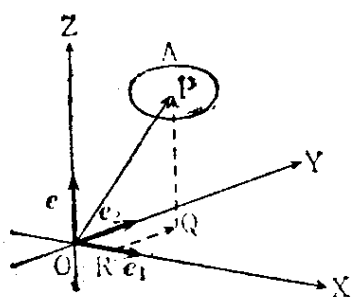


图 1.2

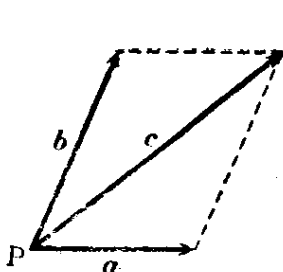


图 1.3

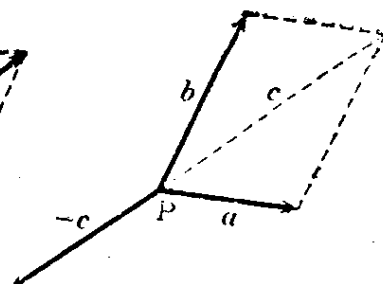


图 1.4

当认为单位矢量 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 也是固定矢量。可是，如后面所示，常常出现这种情况： $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 可以看成是自由矢量，也就是说，在长度和方向都不变的情况下移动，即在平移的情况下，仍然是相同的矢量。

关系式(1.1.4)可以看作是从更基本的两个矢量之和的定义

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad (1.1.5)$$

推导出来的。如图 1.3 所示，矢量 $\mathbf{c}$ 是 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 所构成的平行四边形的对角线。这同静力学中人所共知的力的平行四边形是一样的。从历史上来说，人们认识到力是有大小和方向的物理量要比矢径来得早，用矢量来表示力的平行四边形法则是根据经验确立的。

也就是说，假设在一个物体的同一点 P 上(或者是在三个靠得很近，几乎可以看成一点的点上)同时作用着 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $-\mathbf{c}$ 三个力，并保持平衡。如图 1.4 所示，根据经验有下面的关系式：

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + (-\mathbf{c}) = 0. \quad (1.1.6)$$

这里所写的 $(-\mathbf{c})$ ，表示大小和 $\mathbf{c}$ 相同，而方向正好相反的力。就力而言，这是作用在哪个物体的哪个点上的问题，所以尽管与矢径略有不同，但它仍然是一种固定矢量。对于矢径或更一般的矢量来说，采用与力同样的方法，按照式(1.1.5)定

义矢量加法，倘若再承认某一矢量乘以实数可得一个仅长度不同而方向相同或相反的矢量，则重复上述的程序，便可推导出式(1.1.4)。但是，对于矢径来说，式(1.1.6)或(1.1.4)的成立绝不是不言而喻的。不用矢量表示而得到的坐标分量之间的关系式，通过使用矢量就能以比较简明，而且易于直观理解地重新表示出来，因此应该认为用矢量表示是合理的。

进而，我们把对于力和矢径那样意义下的各种不同的固定矢量都成立的关系式，推广到后面出现的一般的自由矢量上。这时，基于相同的理由，可以认为它的正确性是能够验证的。如果注意到这一点，那么在许多情况下不考虑(至少暂时不考虑)固定矢量和自由矢量的区别是更合适，更方便的。例如，假设图 1.3 的矢量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 是即使平移也并不变化的自由矢量，就可以认为能按照图 1.5(a) 那样来构成 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和 $\mathbf{c}$ 。同样，对于式 (1.1.4) 右边的 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ ，可以考虑把 $\mathbf{e}_2$ 的原点平移到 $\mathbf{R}$ ， $\mathbf{e}_3$ 的原点平移到 $\mathbf{Q}$ 。而关系式(1.1.6)，亦如图 1.5 (b)所示，在几何学上可以同 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 和 $-\mathbf{c}$ 所构成闭合三角形表示相对应。

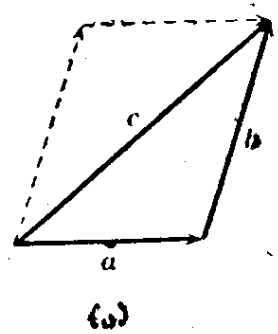


图 1.5

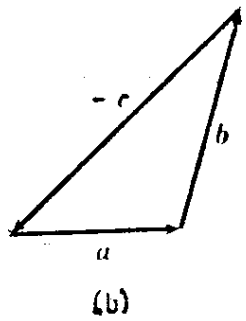
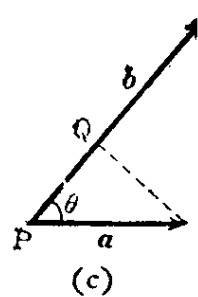


图 1.6



下面，我们可以定义两个矢量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 的两种乘积，它们都具有明确的几何意义。一个称为内积 (inner product) 或者标积 (scalar product)，可以用标量

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ab \cos \theta \quad (1.1.7)$$

这样的实数来表示；其中 a, b 分别是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的绝对值， θ 是图 1.6 所示的 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 之间的夹角。假设由 $\mathbf{a}$ 的末端向 $\mathbf{b}$ 所引的垂线的垂足为 Q ，那么，所谓内积就是线段 $\overline{PQ}$ 的长度和 b 的乘积这样一个几何量。但在这里规定，当角度 θ 大于直角时， $\overline{PQ}$ 的长度为负值。显然，在这种情况下即使将 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的位置调换一下（因而乘积的顺序改变了，但内积还是相同的）。

将式 (1.1.7) 的定义应用于互相正交的单位矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ，我们就可以得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 &= 1 \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.1.8)$$

这样一来，由图 1.5、图 1.6 的几何作图就会立即看出，对内积来说，分配律是成立的。因此，由式 (1.1.4) 可以推出

$$\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1.1.9)$$

更一般地，假设任意矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的坐标分量分别为 $(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z)$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{e}_1 + b_y\mathbf{e}_2 + b_z\mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}, \quad (1.1.10)$$

利用式 (1.1.8) 和分配律，我们就可以立刻得到

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.1.11)$$

矢量的另一种乘积称为 **外积** (outer product) 或 **矢积** (vector product)。两个矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的外积 $\mathbf{c}$ ，如图 1.7 所示，是用一个矢量来定义的，其大小等于

$$ab \sin \theta,$$

也就是等于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所构成的平行四边形的面积；其方向垂直

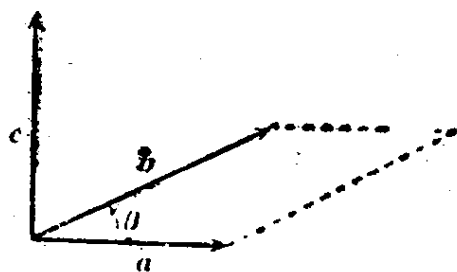


图 1.7

于 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 所构成的平面,更正确些说,是在由 $\mathbf{a}$ 向 $\mathbf{b}$ 旋转的右手螺旋前进的方向上。换句话讲,三个矢量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 构成了右手螺旋系。外积有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, [\mathbf{ab}], [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \quad (1.1.12)$$

等各种写法,但以后主要使用的符号是

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \quad (1.1.13)$$

由此定义可知:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \times \mathbf{a}], \quad (1.1.14)$$

也就是说,改变相乘的顺序,外积的符号也要改变,得到的是方向相反的矢量。

如果互相正交的单位矢量 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 按照这个顺序构成右手螺旋系,那么我们立刻就可以知道

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1] &= [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3] = 0 \\ [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] &= -[\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_3 \\ [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3] &= -[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_1 \\ [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1] &= -[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.1.15)$$

若使用这些关系式,则 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的外积就是

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{e}_1 + c_y \mathbf{e}_2 + c_z \mathbf{e}_3, \quad (1.1.16)$$

其分量为

$$\left. \begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned} \right\}. \quad (1.1.17)$$

以上只是把欧几里德几何学的一部分用矢量重新写了出来,可是,如果想要用它来研究运动,就会出现种种在几何学中不曾有过的新问题。首要的一个问题是,究竟什么在运动?在日常的经验世界中,运动着的东西是各式各样的。有像人类和动物那样运动时外形发生显著变化的情况;也能看到运动时形状与大小几乎都不变化的情况,例如开动的汽车或投

掷的石块就是这样。但是,无论在哪一种情况下,只要从极远的地方去观察运动,通常总可以忽略生物躯体的各个部分及非生物体的各个部分的运动的差异,而用适当规定的中心点的运动去代表该物体整体上的运动。特别是在天文学中,自古就把星体看作一个点,来仔细地跟踪它们的运动。不用说,星球是巨大的天体,如果靠近一些,就会看到星球的自转以及星球各部分之间的相对运动。但是,如果和到观察者的距离相比,星球的直径小到能够忽略不计,那么我们就可以把它看作一个点。

不过,我们也可以采用与上稍微不同的观点,认为物体的运动能够归结为点的运动。这就是说,肉眼可见的具有形状和大小的物体,无论是生物,还是非生物,都是由很多部分组成的;它的各部分又由更小的部分组成。比如,若用显微镜来观察生物体,就可以发现它是由很多细胞构成的。而且,各个细胞又都具有复杂的结构。在确立经典力学的牛顿时代,显微镜已经相当发达,那时胡克(Hooke)就观察了植物的细胞结构。但是,当时所能看到的,较单个原子还是大得不可比拟。因此,即使设想存在着原子,也无法估计它小到什么程度。于是,可以相信,无论是把物体想象为由肉眼和显微镜都看不到的无数个微小原子和虚无空荡的间隙所组成,还是想象为一种能够无限细分的连续体,对于包括用显微镜可以看到的微小颗粒在内的宏观物体来说,经典力学总是正确成立的。因此,从经典力学的立场上来说,将形状和大小清晰可见的物体看作是在宏观上能够当成点的小物体的集合,并把这种意义上的点的运动作为研究的出发点,似乎是可行的。由此可见,无论是从这个理由来说,还是从前面所叙述的理由来说,都需要首先来研究点的运动。然而,在继续深入下去之后我们再来说明,那里实际上隐藏着疑点。