概率论与数理统计

（第二版）

吴亚森　孙爱霞　主编

华南理工大学出版社

概率论与数理统计

（第二版）

吴亚森　孙爱霞
陈树英　庄楚强　编

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/吴亚森,孙爱霞主编.—2版.—广州:华南理工大学出版社,1994.5(2000.10重印)

ISBN 7-5623-0012-7

Ⅰ.概…

Ⅱ.①吴…②孙…

Ⅲ.概率论-数学理论

Ⅳ.O211

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山　邮编510640)

责任编辑　谢艳桂

各地新华书店经销

广州市新明光印刷有限公司印装

*

2000年10第2版第8次印刷

开本:787×1092　1/32　印张:11.125　插页1　字数:256千

印数:32000—37000册

定价:14.50元

再版前言

我们编写的《概率论与数理统计》一书，自1987年初版以来，教学效果良好。使用本教材的教师及学生均认为该书对工科大学本科各专业是比较适用的，同时对该教材提出了一些改进的意见。

根据1993年5月8日高等学校工科数学课程教学指导委员会“关于工科数学课程教学的基本要求”及使用本教材的教师提出的意见，我们对该书进行了修改、补充，予以再版，使之更适合工科本科学生的需要。

编者对关心本教材并提出修改意见的老师，特别是华南理工大学任工程数学课的教师表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中难免还存在缺点和不妥之处，殷切希望师生们批评指教。

编　者

1993年11月

目　　录

第一章 预备知识

§1.1 排列与组合

一、加法原理与乘法原理

我们首先叙述两个基本原理——加法原理与乘法原理，这两个原理是排列、组合的基础。

1．*加法原理* 若完成某一工作任务有 k 种方式，第一种方式中有 n_1 个方法，第二种方式中有 n_2 个方法……第 k 种方式中有 n_k 个方法，这些方法都不相同，无论通过其中哪一种方法都可以完成这一工作任务，则完成这一工作任务共有 $N=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种不同的方法。

2．*乘法原理* 若完成某一工作任务可以分成 k 个步骤进行，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法……第 k 步有 n_k 种方法，各步骤连续完成，这一工作任务才能完成，则完成这一工作任务共有 $N=n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 种不同的方法。

如果一件工作分几种方法独立完成，计算所用的方法总数时，用加法原理，而若一件工作要分几步连续完成，则计算完成这件工作的方法总数时，用乘法原理。

二、排列

1．*选排列与全排列*

从 n 个不同的元素里，任意取出 r 个不同的元素（$1\leqslant r\leqslant n$），按一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出

r个不同元素的一种排列，所有不同排列的总数用符号P_n^r或A_n^r表示。

【例1】 用1，2，3，4四个数字可以排成多少个没有重复数字的三位数？

解 这个问题相当于从1，2，3，4这四个数字中，每次取出三个数字，按百位、十位、个位的顺序进行排列，求排列的总数P_4^3，可以这样来考虑，从四个数中任取一个为百位上的数字，有4种取法，在剩下的三个数中任取一个为十位上的数字，有3种取法，而个位上的数字只有在剩下的两个数字中选取，有2种取法，根据乘法原理，一共有$4\times3\times2=24$种排法。即可以排成24个不同的三位数，记以

$$P_4^3=4(4-1)(4-2)=4\cdot3\cdot2=24$$

类似地，从n个不同的元素中每次取出r个不同元素进行排列，其排列总数P_n^r的计算方法可以这样来考虑：放在第一个位置的元素可以从n个元素中任意取一个，有n种取法；放在第二个位置的元素从剩下的$n-1$个元素中任取一个，有$n-1$种取法；第三个位置的元素从剩下的$n-2$个元素中任取一个，有$n-2$种取法；这样继续下去，直到最后一个位置，即第r个位置，只能在剩下的$n-(r-1)$个元素中选取一个，共有$n-(r-1)=n-r+1$种取法，于是（对$r\leqslant n$）所求排列总数为

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (1\text{-}1)$$

当$r<n$时，称这样的排列为从n个不同元素中取r个不同元素

的选排列。当$r=n$时，即n个元素全部取出进行排列，叫做全排列，全排列总数记作P_n，即

$$P_n=P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n! \qquad (1\text{-}2)$$

【例2】 从10本不同的书中取出3本排在书架上，共有多少种排法？

解 这是一个从10个不同的元素中每次取出3个的选排列问题，把$n=10$，$r=3$代入（1-1）式得

$$P_{10}^3=10(10-1)(10-2)=10\times 9\times 8=720$$

即共有720种排法。

如果把这10本书全部排在书架上，这就是10个元素的全排列问题，共有$10!$种排法。即$P_{10}=10!$。

【例3】 两位老师与四位学生并排坐着照相，如果老师坐在中间，问有多少种坐法？

解 两位老师坐在中间有$2!=2$种坐法，当老师就坐后，学生有$P_4=4!=24$种坐法，根据乘法原理，共有：$2\times 24=48$种坐法。

【例4】 从0，1，2，3，4，5六个数字中每次取出三个来排列，问（1）共有多少种排列；（2）在没有重复数字的三位数中，百位数上是2的有多少个？（3）可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 （1）共有$P_6^3=6\times 5\times 4=120$种排列。

（2）在百位数上取定为2，十位数与个位数只能在0，1，3，4，5这五个数字中取，有P_5^2种取法，故百位数上是2的三位数共有$P_5^2=5\times 4=20$个。

（3）要组成三位数，零不能在百位上，而零在百

位上的三位数有$P_5^2=5\times4=20$个。故没有重复数字的三位数有$P_6^3-P_5^2=120-20=100$个。

2．允许重复选取的排列

如果从n个不同的元素里任取一个元素，然后，把这个元素放回去，再取一个，又放回去，这样有放回地选取共进行了r次，取出r个元素，并按先后选取的顺序排成一列，称为从n个不同元素中允许重复地取出r个元素的排列。

从n个不同元素中，允许重复取出r个元素的排列总数为n^r。因为可以重复选取，所以，从n个元素中每次取出一个元素都有n种方法，故取出r个元素有

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{个}}=n^r$$

种方法。

【例5】 广州市的电话号码用七个数字组成，问最多可以安装多少台不同号码的电话机？

解 因为电话号码允许数字重复，且零可以安排在任何位置上，而数码相同而顺序不同是不同的号码，所以题中所要解决的问题，就是从0，1，2，…，9十个数码中，允许重复的选取七个数字的排列问题，所以最多可安装10^7台电话机。

三、组合

从n个不同元素中，每次取出r个元素，不管它们之间的顺序，合为一组，叫做从n个元素中每次取出r个元素的组合，这样得出的所有不同组合的总数，叫做组合数，记作C_n^r或$\binom{n}{r}$，$(1\leqslant r\leqslant n)$。

组合问题是与元素的顺序无关的，即从n个元素中取定r个不同元素后，只得到一种组合，但如果对这r个不同元素进行排列，可得到$r!$种不同的排列，而所有这些排列均是由一种组合变来的，所以，从n个不同元素中取出r个不同元素的选排列总数P_n^r是C_n^r的$r!$倍，即

$$P_n^r = r! \cdot C_n^r$$

于是有

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \qquad (1-3)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

从公式（1-3）可推得$C_n^{n-r} = C_n^r$，因为

$$C_n^{n-r} = \frac{P_n^{n-r}}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-r)+1]}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(r+1)}{(n-r)!}$$

又
$$\frac{n(n-1)\cdots(r+1)}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(r+1)r!}{(n-r)!\ r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\ r!} = C_n^r$$

故
$$C_n^{n-r} = C_n^r$$

当$r > \frac{n}{2}$时，用C_n^{n-r}代替C_n^r在计算上较为简单。如：$C_{100}^{99} = C_{100}^{1} = 100$。

【例 1】 从一副扑克牌52张中，任意取出 5 张，如果

限定这5张牌中有一张A牌，问有多少种取法？

解 一副扑克牌中有4张A牌，故从4张A牌中任取一张有C_4^1种取法，又从其余48张牌中任取4张有C_{48}^4种取法，根据乘法原理得

$$C_4^1 \cdot C_{48}^4 = 4 \cdot \frac{48\times47\times46\times45}{4!}$$

$$=\frac{48\times47\times46\times45}{1\cdot2\cdot3}=778320$$

种取法。

【例2】 两批产品各50件，其中各有次品5件，现在从这两批产品中各抽选一件，问

（1）两件都不是次品的选法有多少种？

（2）只有一件次品的选法有多少种？

（3）至少有一件次品的选法有多少种？

解 （1）从两批各有45件正品中各抽选1件，就是两件都不是次品的选法，有

$$C_{45}^1 \cdot C_{45}^1 = 45\times45 = 2025$$

种选法。

（2）从一批5件次品中抽选1件，另一批45件正品中抽选1件，就是只有一件次品的选法，于是，只有一件次品的选法有

$$C_5^1 \cdot C_{45}^1 + C_{45}^1 \cdot C_5^1 = 450$$

（3）至少有一件次品，可以分两类情况：一是只有一件次品，二是两件都是次品，由于是分类完成，所以须将各类选法相加才得到选法种数，故至少有一件次品的选法种数是

$$C_5^1 \cdot C_{45}^1 + C_{45}^1 \cdot C_5^1 + C_5^1 \cdot C_5^1 = 475$$

读者思考：例 2 中至多有 1 件次品的选法有多少种？

§1.2 集　合

一、集合的基本概念

集合是指具有某种特定性质的事物的总体（简称集）．构成集合的事物称为集合的元素．

习惯上用大写字母A，B，C等表示集合，用小写字母a，b，c等表示集合的元素．如果a是集合A的元素，记作$a \in A$（读作a属于A），如果a不是集合A的元素，则记作$a \overline{\in} A$（读作a不属于A），如果集合A是由元素a，b，c，…等组成，则集合A可记作

$$A = \{a, b, c, \cdots\}$$

对于一个集来说，任何事物（即元素）或者是这个集的元素，或者不是这个集的元素，二者必居其一，不得兼有．即任何事物(元素)a与集A之间有两种关系：$a \in A$或$a \overline{\in} A$，集是由所有属于它的事物（元素）所完全确定的．

例如：设B是由一切奇数所组成的集合，即$B = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$则$9 \in B$而$4 \overline{\in} B$．又如，设$A$是由方程$x^2 - x - 2 = 0$的实根所组成的集合，即$A = \{-1, 2\}$．

在集合中，我们不考虑元素之间的顺序，只要**元素**完全相同，就认为是同一集合，在集合中重复出现的**元素**，只算作一个元素，如：集合$A_1 = \{2, 2, 3, 0\}$与$A_2 = \{3, 2, 0\}$是同一集合．

由有限个元素所组成的集合，称为有限集，如果一个集合中有无限多个元素，则称这个集合为无限集，由所有自然数所组成的集合$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$是一个无限集。如果一个无限集中的各个元素与全体自然数构成一一对应关系，这样的无限集称为可列集或可数集，如$B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$为可列集，不含任何元素的集合称为空集，用记号$\varnothing$表示空集。例如，由方程$x^2+1=0$的一切实根所组成的集合为空集。

二、集与集之间的关系

包含关系　如果集A的每一个元素都是集B的元素，称集B包含集A，记作$B\supset A$（也可记作$A\subset B$），并称A被B包含，或称A为B的子集）

如果集A的每一个元素都是集B的元素，而且集B中存在不属于A的元素，则说A是B的一个真子集（图1－1）。

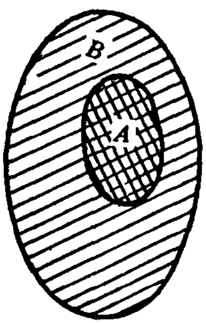

图1－1

相等关系　如果集A的每一个元素都是集B的元素，而集B的每一个元素也都是集A的元素，则说集A与集B相等，记作$A=B$，即

$$A\subset B\text{且}B\subset A\Longleftrightarrow A=B$$

式中，符号$\Longleftrightarrow$表示它的一边是另一边的充分必要条件。

三、集的运算

并集　由集A和集B的一切元素所组成的集合称为集A与集B的并集，记作$A\cup B$（图1－2）。（并集也可以说成

由至少属于集A及集B二者之一的所有元素所组成的集合)即

$$A\cup B=\{x: x\in B\text{或}x\in A\}$$

如:

$$\{3,4,2\}\cup\{1,3,5\}=\{1,2,3,4,5\}$$

集合的并的概念不难推广到有限多个或可列多个集合的情形，即

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i \qquad i=1,2,3,\cdots,n$$

或 $$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \qquad i=1,2,\cdots,n,\cdots$$

它们都是由至少属于一个A_i的元素所组成的集合．例如

$$\{1,2,3\}\cup\{4,5,6\}\cup\{6,7,8\}$$
$$=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

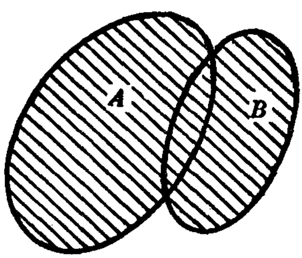

图1-2

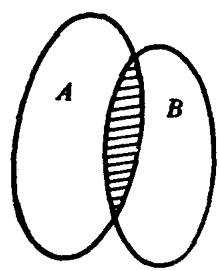

图1-3

交集　由集A和集B的公共元素所组成的集合，称为A与B的交集，记作$A\cap B$.（即由同时属于集A及集B的所有元素所组成的集合）．即$A\cap B=\{x: x\in A\text{且}x\in B\}$（图1-3阴影部分），如:

设 $A=\{1,2,3,4,5\}$

$B=\{5,6,7\}$

$C=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$

则 $A\cap B=\{5\}$；$A\cap C=\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$。

即A与B的公共元素为5，而A与C及B与C无公共元素。

集合的交集的概念不难推广至有限多个或可列多个集合的情形，即

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\quad i=1,2,\cdots,n,\cdots$$

它们都是由属于A_i的公共元素所组成。

差集　由属于A但不属于B的所有元素所组成的集合称为A与B的差集，记作$A-B$，即

$A-B=\{x:\ x\in A$但$x\notin B\}$（如图1-4阴影部分）。

余集　设集B是集U的子集（$B\subset U$），则$U-B$称为B在U内的余集，记作$\overline{B}_U$或简记作$\overline{B}$，即$\overline{B}=U-B$。（图1-5阴影部分）。

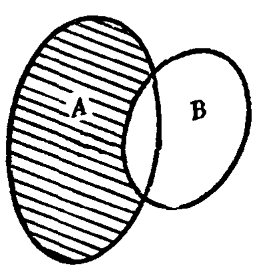

图1-4

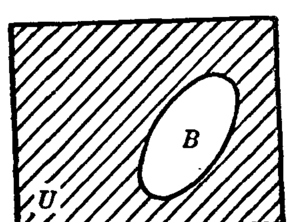

图1-5