21世纪 高等学校电子信息类规划教材

电磁场与电磁波

（第四版）

王家礼　朱满座　路宏敏　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

第一章 矢 量 分 析

电场和磁场都是矢量场，因此在研究电磁场与电磁波之前，我们先介绍分析矢量场和标量场问题的数学工具——矢量分析。掌握矢量分析将为学习电磁场与电磁波内容奠定必要的数学基础。本章重点讨论如下内容：

· 标量场的方向导数和梯度
· 矢量场的通量和散度
· 矢量场的环量和旋度
· 亥姆霍兹定理

1.1 场 的 概 念

1.1.1 矢性函数

数学上，实数域内任一代数量 a 都可以称为标量，因为它只能代表该代数量的大小。在物理学中，任意一个代数量一旦被赋予物理单位，则成为一个具有物理意义的标量，即所谓的物理量，如电压 u、电流 i、面积 S、体积 V 等等。

在二维空间或三维空间内的任一点 P 是一个既存在大小(或称为模)又有方向特性的量，故称为实数矢量。实数矢量可用黑体 $\boldsymbol{A}$ 表示，而白体 A 表示 $\boldsymbol{A}$ 的大小(即 $\boldsymbol{A}$ 的模)。若用几何图形表示，实数矢量是从原点出发的一条带有箭头的直线段，直线段的长度表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模，箭头的指向表示该矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向。矢量一旦被赋予物理单位，便成为具有物理意义的矢量，如电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 等等。

若某一矢量的模和方向都保持不变，此矢量称为常矢，如某物体所受到的重力。而在实际问题中遇到的更多的是模和方向或两者之一会发生变化的矢量，这种矢量我们称为变矢，如沿着某一曲线物体运动的速度 $\boldsymbol{v}$ 等。

设 t 是一数性变量，$\boldsymbol{A}(t)$ 为变矢，对于某一区间 $G[a, b]$ 内的每一个数值 t，$\boldsymbol{A}$ 都有一个确定的矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 与之对应，则称 $\boldsymbol{A}(t)$ 为数性变量 t 的矢性函数。记为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t)$$

而 $G[a, b]$ 为 $\boldsymbol{A}(t)$ 的定义域。矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在直角坐标系中的三个坐标分量都是变量 t 的函数，分别为 $A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$，则矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 也可用其坐标表示为

$$\boldsymbol{A} = A_x(t)\boldsymbol{e}_x + A_y(t)\boldsymbol{e}_y + A_z(t)\boldsymbol{e}_z$$

其中，$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的正向单位矢量。

在矢量代数中，已经学习过矢性函数的极限和连续性，矢性函数的导数和微分，矢性函数的积分。由于篇幅所限我们不再讨论，但是它们的运算法则我们必须掌握，这样才能学好后面的内容。

1.1.2 标量场和矢量场

在许多科学问题中，常常需要研究某种物理量在某一空间区域的分布情况和变化规律，为此，在数学上引入场的概念。

如果在某一空间区域内的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，则称在此区域内确定了该物理量的一个场。换句话说，在某一空间区域中，物理量的无限集合表示一种场。如在教室中温度的分布确定了一个温度场，在空间电位的分布确定了一个电位场。场的一个重要的属性是它占有一定空间，而且在该空间域内，除有限个点和表面外，其物理量应该是处处连续的。若该物理量与时间无关，则该场称为静态场；若该物理量与时间有关，则该场称为动态场或称为时变场。

在研究物理系统中温度、压力、密度等在一定空间的分布状态时，数学上只需用一个代数变量来描述，这些代数变量(即标量函数)所确定的场称为标量场，如温度场 $T(x, y, z)$、电位场$\varphi(x, y, z)$等。然而在许多物理系统中，其状态不仅需要确定其大小，同时还需确定它们的方向，这就需要用一个矢量来描述，因此称为矢量场，例如电场、磁场、流速场等等。

1.1.3 标量场的等值面和矢量场的矢量线

在研究场的特性时，以场图表示场变量在空间逐点分布的情况具有很大的意义。对于标量场，常用等值面的概念来描述。所谓等值面，是指在标量场 $\varphi(x, y, z)$中，使其函数 φ 取相同数值的所有点组成的集合，这些点组成一个曲面，该曲面称为等值面。如温度场的等值面，就是由温度相同的点所组成的一个曲面，此曲面称为等温面。等值面在二维空间就变为等值线。如地图上的等高线，就是由高度相同的点连成的一条曲线。

标量场 $\varphi(x, y, z)$的等值面方程为

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

对于矢量场 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$，则用一些有向线来形象地表示矢量 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$在空间的分布，这些有向线称为矢量线，如图 1-1 所示。矢量线上任一点的切线方向表示该点矢量 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$的方向。在直角坐标系中，其矢量线方程可写为

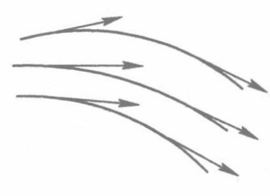

图 1-1 矢量场的矢量线

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z} \tag{1-1}$$

按照一定的规则，绘制出矢量线，既可根据矢量线确定矢量场中各点矢量的方向，又可根据矢量线的疏密程度，判别出矢量场中各点矢量的大小和变化趋势。因此，矢量线在分析矢量场特性时是十分有用的。

例 1-1 求数量场 $\varphi = (x+y)^2 - z$ 通过点 $M(1, 0, 1)$的等值面方程。

解：点 M 的坐标是 $x_0=1$，$y_0=0$，$z_0=1$，则该点的数量场的场值为

$$\varphi=(x_0+y_0)^2-z_0=0$$

其等值面方程为

$$(x+y)^2-z=0 \quad 或 \quad z=(x+y)^2$$

例 1－2　求矢量场 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{e}_x+x^2y\boldsymbol{e}_y+zy^2\boldsymbol{e}_z$ 的矢量线方程。

解：矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\frac{\mathrm{d}y}{x^2y}=\frac{\mathrm{d}z}{y^2z}$$

从而有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x^2y}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\dfrac{\mathrm{d}z}{zy^2}\end{cases}$$

解之即得矢量方程：

$$\begin{cases}x^2-y^2=C_2\\ z=C_1x\end{cases}$$

C_1 和 C_2 是积分常数。

1.2　标量场的方向导数和梯度

1.2.1　标量场的方向导数

在标量场中，标量 $\varphi=\varphi(M)$ 的分布情况可以由等值面或等值线来描述，但这只能大致地了解标量 φ 在场中的整体分布情况。而要详细地研究标量场，还必须对它的局部状态进行深入分析，即要考察标量 φ 在场中各点处的邻域内沿每一方向的变化情况。为此，引入方向导数的概念。

设 M_0 是标量场 $\varphi=\varphi(M)$ 中的一个已知点，从 M_0 出发沿某一方向引入一条射线 $\boldsymbol{l}$，在 $\boldsymbol{l}$ 上 M_0 点的邻近取一点 M，其长度 $\overline{M_0M}=\rho$，如图 1－2 所示。若当 M_0 点趋于 M 点时（即长度 ρ 趋于零时），即

$$\frac{\Delta\varphi}{\rho}=\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{\rho}$$

的极限存在，则称此极限为函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{M_0}$，即

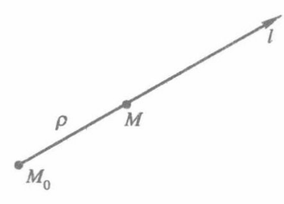

图 1－2　方向导数的定义

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{M_0\to M}\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{\rho} \tag{1-2}$$

由上式可见，方向导数 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{M_0}$ 是函数 $\varphi=\varphi(M)$ 在点 M_0 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向对距离的变化率。当

方向导数大于零时$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}>0\right)$，表示在点 M_0 处函数 $\varphi=\varphi(M)$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向是增加的，反之就是减小的。

在直角坐标系中，方向导数可按下述公式计算。

若函数 $\varphi=\varphi(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向余弦，则函数 $\varphi=\varphi(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数必定存在，且为

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-3}$$

证明：M 点的坐标为 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$，由于函数 φ 在 M_0 处可微，故

$$\Delta\varphi=\varphi(M)-\varphi(M_0)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z+\Delta$$

式中 Δ 为高阶无穷小。上述等式两边除以 ρ，可得

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi}{\rho}&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\rho}+\frac{\Delta}{\rho}\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma+\frac{\Delta}{\rho}\end{aligned}$$

当 ρ 趋于零时对上式取极限，可得

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

证毕

例 1-3　求数量场 $u=\frac{x^2+y^2}{z}$ 在点 $M(1, 1, 2)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$ 方向的方向导数。

解：$\boldsymbol{l}$ 方向的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

而其数量场对坐标的偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-(x^2+y^2)}{z^2}$$

数量场在 l 方向的方向导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\\&=\frac{1}{3}\frac{2x}{z}+\frac{2}{3}\frac{2y}{z}-\frac{2}{3}\frac{x^2+y^2}{z^2}\end{aligned}$$

在点 M 处沿 l 方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{3}$$

1.2.2　标量场的梯度

方向导数可以描述标量场中某点处标量沿某方向的变化率。但从场中某一点出发有无

穷多个方向，通常不必要更不可能研究所有方向的变化率，而只是关心沿哪一个方向变化率最大，此变化率是多少？我们从方向导数的计算公式来讨论这个问题。标量场 $\varphi(x, y, z)$ 在 $\boldsymbol{l}$ 方向上的方向导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

在直角坐标系中，令

$$\boldsymbol{l}^{\circ}=\cos\alpha\boldsymbol{e}_x+\cos\beta\boldsymbol{e}_y+\cos\gamma\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{G}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

则

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}=|\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{l}^{\circ}) \tag{1-4}$$

矢量 $\boldsymbol{l}^{\circ}$ 是 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位矢量，矢量 $\boldsymbol{G}$ 是在给定点处的一常矢量。由上式显然可见，当 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的方向一致时，即 $\cos(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{l}^{\circ})=1$ 时，标量场在点 M 处的方向导数最大，也就是说，沿矢量 $\boldsymbol{G}$ 的方向的方向导数最大，此最大值为

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{\max}=|\boldsymbol{G}| \tag{1-5}$$

这样，我们找到了一个矢量 $\boldsymbol{G}$，其方向是标量场在 M 点处变化率最大的方向，其模值即为最大的变化率。

在标量场 $\varphi(M)$ 中的一点 M 处，其方向为函数 $\varphi=\varphi(M)$ 在 M 点处变化率最大的方向，其大小又恰好等于最大变化率矢量 $\boldsymbol{G}$ 的模，该最大变化率矢量 $\boldsymbol{G}$ 称为标量场 $\varphi=\varphi(M)$ 在 M 点处的梯度，用 $\mathrm{grad}\varphi(M)$ 表示。在直角坐标系中，梯度的表达式为

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1-6}$$

梯度用哈密尔顿微分算子表示的表达式为

$$\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi \tag{1-7}$$

由上面的分析可知：

(1) 在某点 M 处沿任意方向的方向导数等于该点处的梯度在此方向上的投影；

(2) 标量场 $\varphi=\varphi(M)$ 中的每一点 M 处的梯度垂直于过该点的等值面，且指向函数 $\varphi(M)$ 增大的方向。这一点是因为点 M 处梯度的坐标 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}、\frac{\partial\varphi}{\partial y}、\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ 恰好是过 M 点的等值面 $\varphi(x, y, z)=c$ 法线的方向导数，即梯度为其法向矢量，因此梯度垂直于该等值面。

等值面和方向导数均与梯度存在一种比较特殊的关系，这使得梯度成为研究标量场的一个极为重要的矢量。

下面给出梯度的基本运算法则。$u(M)$ 和 $v(M)$ 为标量场，c 为一常数。很容易证明下面的梯度运算法则成立。

$$\mathrm{grad}c=\boldsymbol{0} \quad 或 \quad \nabla c=\boldsymbol{0} \tag{1-8}$$

$$\mathrm{grad}(cu)=c\,\mathrm{grad}u \quad 或 \quad \nabla(cu)=c\nabla u \tag{1-9}$$

$$\mathrm{grad}(u\pm v)=\mathrm{grad}u\pm\mathrm{grad}v \quad 或 \quad \nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v \tag{1-10}$$

$$\mathrm{grad}(uv)=v\,\mathrm{grad}u+u\,\mathrm{grad}v \quad 或 \quad \nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v \tag{1-11}$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\,\mathrm{grad}u-u\,\mathrm{grad}v) \quad 或 \quad \nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\nabla u-u\nabla v) \tag{1-12}$$

$$\mathrm{grad}[f(u)]=f'(u)\mathrm{grad}u \quad 或 \quad \nabla[f(u)]=f'(u)\nabla u \tag{1-13}$$

例 1－4 标量函数 r 是动点 $M(x, y, z)$ 的矢量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 的模，即 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：$\mathrm{grad}r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}^\circ$。

证：

$$\mathrm{grad}r=\nabla r=\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

因为

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}$$

所以

$$\mathrm{grad}r=\nabla r=\frac{x}{r}\boldsymbol{e}_x+\frac{y}{r}\boldsymbol{e}_y+\frac{z}{r}\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{r}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}^\circ$$

例 1－5 求 r 在点 $M(1, 0, 1)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$ 方向的方向导数。

解：由例 1－4 得知

$$\mathrm{grad}r=\nabla r=\frac{1}{r}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)$$

点 M 处的坐标为 $x=1$，$y=0$，$z=1$，而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$，所以 r 在 M 点处的梯度为

$$\mathrm{grad}r=\nabla r=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_z$$

r 在点 M 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial r}{\partial l}\right|_M=\nabla r\cdot\boldsymbol{l}^\circ$$

而

$$\boldsymbol{l}^\circ=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_x+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_y+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_z$$

所以

$$\left.\frac{\partial r}{\partial l}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例 1－6 已知位于原点处的点电荷 q 在点 $M(x, y, z)$ 处产生的电位为 $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$，其中矢径 $\boldsymbol{r}$ 为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，且已知电场强度与电位的关系是 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，求电场强度 $\boldsymbol{E}$。

解：

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

根据$\nabla f(u)=f'(u)\cdot\nabla u$的运算法则：

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{1}{r}\right)'\nabla r=\frac{-1}{r^2}\nabla r$$

又由例 1－4 得知，$\nabla r=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^\circ$，所以

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\nabla r$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}^\circ$$

1.3 矢量场的通量和散度

1.3.1 矢量场的通量

在分析和描绘矢量场的特性时，矢量穿过一个曲面的通量是一个很重要的基本概念。将曲面的一个面元用矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 来表示，其方向取为面元的法线方向，其大小为 $\mathrm{d}S$，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{1-14}$$

$\boldsymbol{n}$ 是面元法线方向的单位矢量。$\boldsymbol{n}$ 的指向有两种情况：对开曲面上的面元，设这个开曲面是由封闭曲线 l 所围成的，则选定绕行的方向后，沿绕行方向按右手螺旋的拇指方向就是 $\boldsymbol{n}$ 的方向，如图 1－3(a)所示；对封闭曲面上的面元，$\boldsymbol{n}$ 取为封闭曲面的外法线方向，如图 1－3(b)所示。

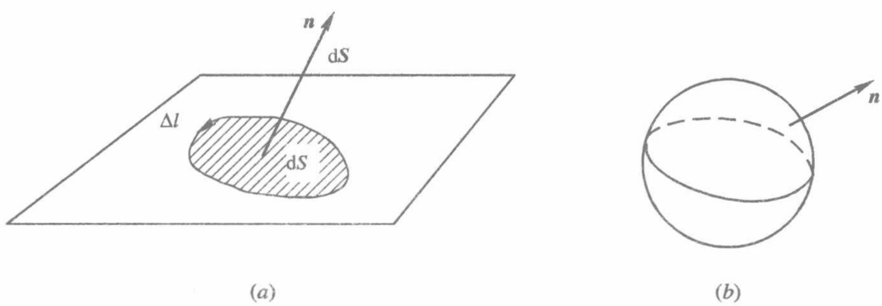

图 1－3 法线方向的取法

若面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 位于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，由于面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 很小，且面元上各点的场值可以认为是相同的，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 和面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的标量积 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 便称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的通量。例如在流速场中，流速 $\boldsymbol{v}$ 是一个矢量，$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 就是每秒钟通过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的通量。通量是一个标量。

将曲面 S 各面元上的 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 相加，它表示矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过整个曲面 S 的通量，也称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在曲面 S 上的面积分：

$$\Psi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1-15}$$

如果曲面是一个封闭曲面，则

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-16}$$

该积分表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过封闭曲面 S 的通量。若 $\Psi>0$，表示有净通量流出，这说明封闭曲面 S 内必定有矢量场的源；若 $\Psi<0$，表示有净通量流入，说明封闭曲面 S 内有洞(负的源)。在大学物理课程中我们已知，通过封闭曲面的电通量 Ψ 等于该封闭曲面所包围的自由电荷 Q。若电荷 Q 为正电荷，Ψ 为正，则表示有电通量流出；若电荷 Q 为负电荷，Ψ 为负，则表示有电通量流入。

1.3.2 矢量场的散度

上述通量是一个大范围面积上的积分量，它反映了在某一空间内场源总的特性，但它没有反映出场源分布的特性。为了研究矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在某一点附近的通量特性，我们把包围某点的封闭曲面向该点无限收缩，使包含这个点在内的体积元 ΔV 趋于零，取如下极限：

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

称此极限为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在某点的散度，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$，即散度的定义式为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1-17}$$

此式表明，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度是一个标量，它表示从该点单位体积内散发出来的矢量 $\boldsymbol{A}$ 的通量(即通量密度)。它反映出矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在该点通量源的强度。显然，在无源区域中，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在各点的散度均为零。

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度可表示为哈密尔顿微分算子 ∇ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的标量积，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1-18}$$

计算 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 时，先按标量积规则展开，再做微分运算。在直角坐标系中有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \cdot (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{1-19}$$

利用哈密尔顿微分算子，读者可以证明，散度运算符合下列规则：

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \pm \nabla \cdot \boldsymbol{B} \tag{1-20}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla \varphi \tag{1-21}$$

1.3.3 散度定理

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度代表的是其通量的体密度，因此可直观地知道，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 散度的体积分等于该矢量穿过包围该体积的封闭曲面的总通量，即

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-22}$$

上式称为散度定理，也称为高斯定理。证明这个定理时，将闭合曲面 S 围成的体积 V 分成许多体积元 $\mathrm{d}V_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，计算每个体积元的小封闭曲面 S_i 上穿过的通量，然后叠

加。由散度的定义可得

$$\oint_{S_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_i = (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\Delta V_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

由于相邻两体积元有一个公共表面，这个公共表面上的通量对这两个体积元来说恰好是等值异号，求和时就互相抵消了。除了邻近 S 面的那些体积元外，所有体积元都是由几个相邻体积元间的公共表面包围而成的，这些体积元的通量总和为零。而邻近 S 面的那些体积元，它们中有部分表面是在 S 面上的面元 $\mathrm{d}S$，这部分表面的通量没有被抵消，其总和刚好等于从封闭曲面 S 穿出的通量。因此有

$$\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

故得到

$$\oint_{S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n}(\nabla \cdot \boldsymbol{A})\Delta V_i = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V$$

例 1－7 已知矢量场 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，求由内向外穿过圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=H$ 所围成的封闭曲面的通量。

解：根据题意(见图 1－4)可把封闭曲面分成 S_1 面，即 $Z=H$ 所围成的平面，S_2 面也就是圆锥面。则所围成的封闭曲面的通量为

$$\Psi = \oiint_S \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{S_2} \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因为在圆锥侧面上 $\boldsymbol{r}$ 处处垂直于 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，所以

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_2} r\,\mathrm{d}S\cos\theta = 0$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint_{S_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{S_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \iint_{S_1} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{S_1} H\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = H\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= H \cdot \pi H^2 = \pi H^3\end{aligned}$$

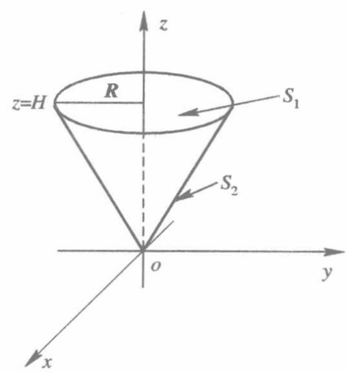

图 1－4 圆锥面与平面围成的封闭曲面

例 1－8 在坐标原点处点电荷产生电场，在此电场中任一点处的电位移矢量为

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}^\circ \quad \left(其中，\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z，r = |\boldsymbol{r}|，\boldsymbol{r}^\circ = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right)$$

求穿过原点为球心、R 为半径的球面的电通量(见图 1－5)。

解：穿过以原点为球心，R 为半径的球面的电通量为

$$\Psi = \oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于球面的法线方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向一致，因此

$$\begin{aligned}\Psi &= \oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S D\,\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi R^2}\oiint_S \mathrm{d}S \\ &= \frac{q}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = q\end{aligned}$$

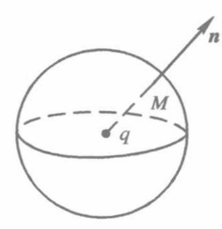

图 1－5 例 1－8 图

例 1-9 原点处点电荷 q 产生的电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}^{\circ}=\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}$，试求电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的散度。

解：
$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{x}{r^3}\boldsymbol{e}_x+\frac{y}{r^3}\boldsymbol{e}_y+\frac{z}{r^3}\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$D_x=\frac{qx}{4\pi r^3},\quad D_y=\frac{qy}{4\pi r^3},\quad D_z=\frac{qz}{4\pi r^3}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3y^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

所以

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_x}{\partial y}+\frac{\partial D_x}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0$$

从上面计算可知，在 $r=0$ 以外的空间，$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=0$，故在 $r=0$ 以外的空间没有电荷。也就是说，无源区域电位移矢量的散度均为零。

例 1-10 半径为 R 的球面 S 上任意点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，求 $\oint\!\!\oint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。

解：根据散度定理知

$$\oint\!\!\oint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V$$

而 $\boldsymbol{r}$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

所以

$$\oint\!\!\oint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V=\iiint_V 3\,\mathrm{d}V=3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^3$$

1.4 矢量场的环量和旋度

1.4.1 矢量场的环量

在力场中，某一质点沿着指定的曲线 l 运动时，力场所做的功可表示为力场 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线 l 的线积分，即

$$W=\int_l\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int F\cos\theta\,\mathrm{d}l \tag{1-23}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是曲线 l 的线元矢量，方向是该线元的切线方向，θ 角为力场 $\boldsymbol{F}$ 与线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的夹角。在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，若曲线 l 是一闭合曲线，其矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭合曲线 l 的线积分可表示为

$$\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l A\ \cos\theta\ \mathrm{d}l \tag{1-24}$$

此线积分称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的环量(或称旋涡量)，如图 1-6 所示。

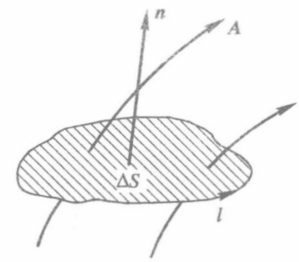

图 1-6　矢量场的环量

矢量场的环量与矢量场的通量一样都是描述矢量场特性的重要参量。我们知道，若矢量穿过封闭曲面的通量不为零，则表示该封闭曲面内存在通量源。同样，矢量沿闭合曲线的环量不为零，则表示闭合曲线内存在另一种源——旋涡源。例如在磁场中，在环绕电流的闭合曲线上的环量不等于零，其电流就是产生该磁场的旋涡源。

1.4.2　矢量场的旋度

从式(1-24)中可以看出，环量是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在大范围内闭合曲线上的线积分，它反映了闭合曲线内旋涡源分布的情况，而从矢量场分析的要求来看，我们需要知道每个点附近的旋涡源分布的情况。为此，我们把闭合曲线收缩，使它包围的面积元 ΔS 趋于零，并求其极限值：

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{1-25}$$

此极限值的意义就是环量的面密度，或称为环量强度。由于面元是有方向的，它与闭合曲线 l 的绕行方向成右手螺旋关系，因此在给定点上，上述的极限对于不同的面元是不同的。为此，引入如下定义，称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left[\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]_{\max}}{\Delta S} \tag{1-26}$$

由式(1-26)可以看出，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度是一个矢量，其大小是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在给定处的最大环量面密度，其方向就是当面元的取向使环量面密度最大时，该面元的方向 $\boldsymbol{n}$。矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度描述了矢量 $\boldsymbol{A}$ 在该点的旋涡源强度。若在某区域中各点的旋度等于零，即 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$，则称矢量场为无旋场或保守场。

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度可用哈密尔顿微分算子 ∇ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的矢量积来表示，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1-27}$$

计算时，可先按矢量积的规则展开，然后再作微分运算。在直角坐标系中可得

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \times (A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{1-28}$$

即

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1-29}$$

利用哈密尔顿微分算子可以证明旋度运算符合如下规则：

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}\pm\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{1-30}$$

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A} \tag{1-31}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{1-32}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{1-33}$$

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\boldsymbol{0} \tag{1-34}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{1-35}$$

式(1－33)说明，任意矢量场的旋度的散度恒等于零。式(1－34)表明任一标量场的梯度的旋度恒等于零。式(1－35)中的∇^2 称为拉普拉斯算子，在直角坐标系中有

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-36}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla^2A_x\boldsymbol{e}_x+\nabla^2A_y\boldsymbol{e}_y+\nabla^2A_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-37}$$

1.4.3 斯托克斯定理

因为旋度代表单位面积的环量，因此矢量场在闭合曲线 l 上的环量等于闭合曲线 l 所包围曲面 S 上旋度的总和，即

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-38}$$

此式称为斯托克斯定理或斯托克斯公式。它将矢量旋度的面积分转换成该矢量的线积分，或将矢量 $\boldsymbol{A}$ 的线积分转换为该矢量旋度的面积分。式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向成右手螺旋关系。斯托克斯定理的证明，与散度定理的证明相类似，这里就不再叙述了。

例 1－11 求矢量 $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{e}_x+x\boldsymbol{e}_y+c\boldsymbol{e}_z$($c$ 是常数)沿曲线 l：$(x-2)^2+y^2=R^2$、$z=0$ 的环量(见图 1－7)。

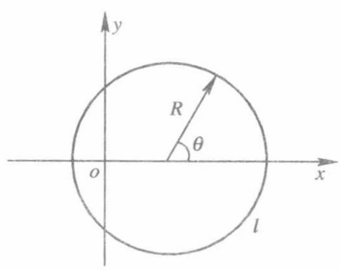

图 1－7 例 1－11 图

解：由于在曲线 l 上 $z=0$，因此 $\mathrm{d}z=0$。

$$\begin{aligned}\Gamma&=\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)\\&=\int_0^{2\pi}-R\sin\theta\,\mathrm{d}(2+R\cos\theta)+\int_0^{2\pi}(2+R\cos\theta)\,\mathrm{d}(R\sin\theta)\\&=\int_0^{2\pi}R^2\sin^2\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}(2+R\cos\theta)R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}[R^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2R\cos\theta]\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}(R^2+2R\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi R^2\end{aligned}$$

环量的计算通常利用曲线的参数方程。

例 1 - 12　求矢量场 $\boldsymbol{A}=x(z-y)\boldsymbol{e}_x+y(x-z)\boldsymbol{e}_y+z(y-x)\boldsymbol{e}_z$ 在点 $M(1, 0, 1)$处的旋度以及沿 $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y+3\boldsymbol{e}_z$ 方向的环量面密度。

解：矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x(z-y) & y(x-z) & z(y-x)\end{vmatrix}$$

$$=(z+y)\boldsymbol{e}_x+(x+z)\boldsymbol{e}_y+(y+x)\boldsymbol{e}_z$$

在点 $M(1, 0, 1)$处的旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\big|_M=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$$

$\boldsymbol{n}$ 方向的单位矢量

$$\boldsymbol{n}^\circ=\frac{1}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}}(2\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y+3\boldsymbol{e}_z)=\frac{2}{7}\boldsymbol{e}_x+\frac{6}{7}\boldsymbol{e}_y+\frac{3}{7}\boldsymbol{e}_z$$

则沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的环量面密度为

$$\mu=\nabla\times\boldsymbol{A}\big|_M\cdot\boldsymbol{n}^\circ=\frac{2}{7}+\frac{6}{7}\cdot2+\frac{3}{7}=\frac{17}{7}$$

例 1 - 13　在坐标原点处放置一点电荷 q，它在自由空间产生的电场强度矢量为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)$$

求自由空间任意点($r\neq0$)电场强度的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{E}$。

解：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{r^3} & \dfrac{y}{r^3} & \dfrac{z}{r^3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)\right]\boldsymbol{e}_x+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]\boldsymbol{e}_y\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)\right]\boldsymbol{e}_z\right\}$$

$$=\boldsymbol{0}$$

这说明点电荷产生的电场为无旋场。

1.5　圆柱坐标系与球坐标系

前面对梯度、散度和旋度的分析中都采用了直角坐标系，并给出它们的表达式。在实际的应用中为了分析的方便、简洁和明了，有时往往采用其它坐标系，本节将介绍常用的两种坐标系——圆柱坐标系和球面坐标系。

1.5.1 圆柱坐标系

在圆柱坐标系(简称柱坐标系)中，任意一点 P 的位置用 ρ、ϕ、z 三个量来表示，如图 1-8 所示。

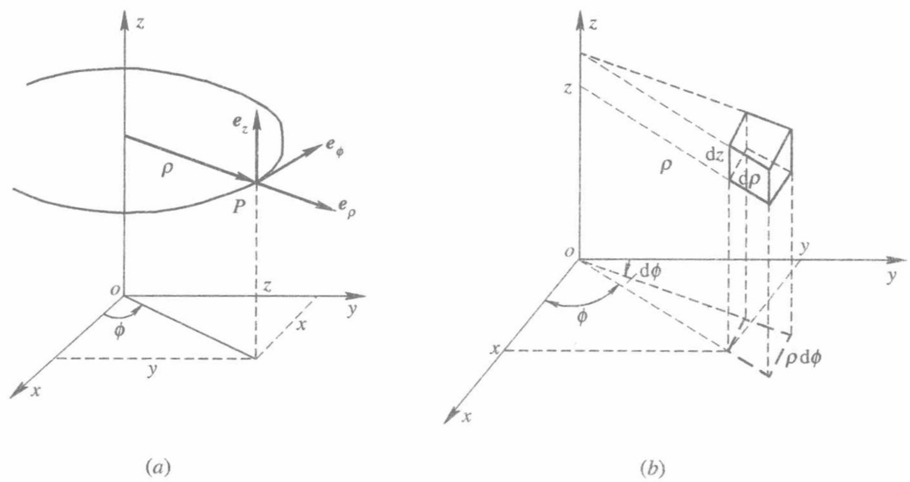

图 1-8　圆柱坐标系

各量的变化范围如下：

$$0 \leqslant \rho < \infty$$
$$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$
$$-\infty < z < \infty$$

P 点的三个坐标单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\phi$、$\boldsymbol{e}_z$，分别指向 ρ、ϕ、z 的增加方向。值得注意的是与直角坐标系的不同点，即除 $\boldsymbol{e}_z$ 外，$\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 都不是常矢量，它们的方向随 P 点位置的不同而变化，但 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\phi$、$\boldsymbol{e}_z$ 三者总保持正交关系，并遵循右手螺旋法则：

$$\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_z$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在球面坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho + A_\phi \boldsymbol{e}_\phi + A_z \boldsymbol{e}_z$$

以坐标原点为起点，指向 P 点的矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为 P 点的位置矢量或矢径。在圆柱坐标系中 P 点的位置矢量是

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}_\rho + z \boldsymbol{e}_z$$

式中未显示角度 ϕ，但角度 ϕ 将影响 $\boldsymbol{e}_\rho$ 的方向。对任意增量 $\mathrm{d}\rho$、$\mathrm{d}\phi$、$\mathrm{d}z$，P 点位置沿 ρ、ϕ、z 方向的长度增量(长度元)分别为

$$\mathrm{d}l_\rho = \mathrm{d}\rho, \quad \mathrm{d}l_\phi = \rho \mathrm{d}\phi, \quad \mathrm{d}l_z = \mathrm{d}z$$

它们的拉梅系数(它们同各自坐标增量之比)分别为

$$h_1 = \frac{\mathrm{d}l_\rho}{\mathrm{d}\rho} = 1, \quad h_2 = \frac{\mathrm{d}l_\phi}{\mathrm{d}\phi} = \rho, \quad h_3 = \frac{\mathrm{d}l_z}{\mathrm{d}z} = 1$$

与三个单位矢量相垂直的三个面积元以及体积元分别是

$$\mathrm{d}S_\rho = \mathrm{d}l_\phi\, \mathrm{d}l_z = \rho\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}z$$

$$dS_\phi = dl_\rho\, dl_z = d\rho\, dz$$
$$dS_z = dl_\rho\, dl_\phi = \rho\, d\phi\, d\rho$$
$$dV = dl_\rho\, dl_\phi\, dl_z = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

哈密尔顿微分算子∇的表示式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1-39}$$

拉普拉斯微分算子∇^2的表示式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-40}$$

在圆柱坐标系中标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的表示式，可以根据上面介绍的关系自行导出，也可以从附录中查出。

1.5.2 球面坐标系

在球面坐标系(简称球坐标系)中，任意 P 点的位置用 r、θ、ϕ 三个量来表示，如图 1-9 所示。

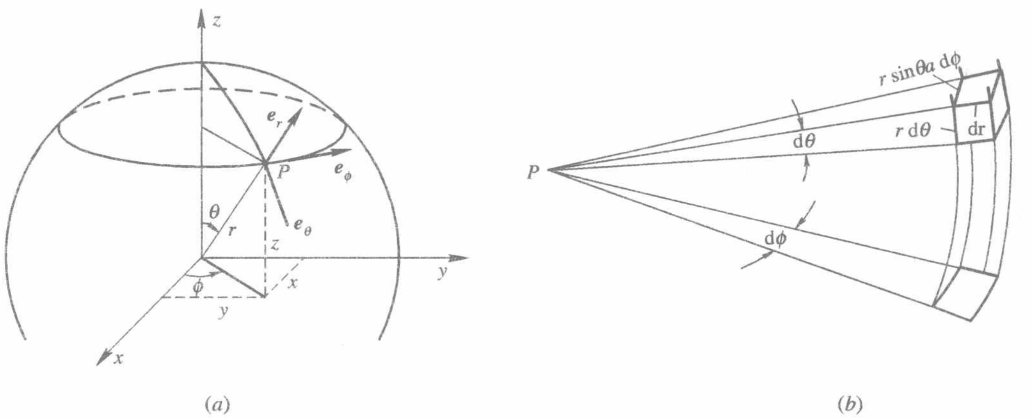

图 1-9 球面坐标系

它们分别称为矢径长度、高低角和方位角，它们的变化范围如下：

$$0 \leqslant r < \infty$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

P 点的三个坐标单位矢量是 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\phi$。$\boldsymbol{e}_r$ 的方向指向矢径延伸的方向；$\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向垂直于矢径并在矢径和 z 轴形成的平面内，指向 θ 角增大的方向；$\boldsymbol{e}_\phi$的方向垂直于矢径并在矢径和 z 轴形成的平面内，指向 ϕ 角增大的方向。三者都不是常矢量，但保持正交，并遵循右手螺旋法则，即

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\phi$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在球面坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi$$

球面坐标系中 P 点的位置矢量是 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，但坐标 $\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$都将影响 $\boldsymbol{r}$ 的方向。P 点的位

置沿 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\phi$ 方向的长度增量(长度元)分别是

$$\mathrm{d}l_r = \mathrm{d}r, \quad \mathrm{d}l_\theta = r\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}l_\phi = r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$$

故它们的拉梅系数(它们同各自坐标增量之比)分别为

$$h_1 = \frac{\mathrm{d}l_r}{\mathrm{d}r} = 1, \quad h_2 = \frac{\mathrm{d}l_\theta}{\mathrm{d}\theta} = r, \quad h_3 = \frac{\mathrm{d}l_\phi}{\mathrm{d}\phi} = r\sin\theta$$

在球面坐标系中与三个单位矢量相垂直的三个面积元以及体积元分别是

$$\mathrm{d}S_r = \mathrm{d}l_\theta\,\mathrm{d}l_\phi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}l_r\,\mathrm{d}l_\phi = r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}S_\phi = \mathrm{d}l_r\,\mathrm{d}l_\theta = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}l_r\,\mathrm{d}l_\theta\,\mathrm{d}l_\phi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

哈密尔顿微分算子 ∇ 的表示式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi \tag{1-41}$$

拉普拉斯微分算子 ∇^2 的表示式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{1-42}$$

在球面坐标系中标量场的梯度，矢量场的散度和旋度的表示式，可以根据上面介绍的关系自行导出，也可以从附录中查出。

例 1-14　在一对相距为 l 的点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，当距离 $r \gg l$ 时，其空间电位的表达式为

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

求其电场强度 $\boldsymbol{E}(r, \theta, \phi)$。

解：在球面坐标系中，哈密尔顿微分算子 ∇ 的表达式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

因为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta = -\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = 0$$

所以

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)$$

1.6　亥姆霍兹定理

在上面的分析中，对于标量场引入了梯度。梯度是一个矢量，它给出了标量场中某点