# 高等数学例题与习题集（二）

# 多元微积分

[俄] И.И. 利亚什科　A. K. 博亚尔丘克
Я.Г. 加伊　Г. П. 戈洛瓦奇　编著

高策理　苏　宁　译

清华大学出版社

[俄] И.И. 利亚什科　А. К. 博亚尔丘克
Я.Г. 加伊　Г. П. 戈洛瓦奇　编著

高策理　苏　宁　译

# 高等数学例题与习题集（二）

## 多元微积分

清华大学出版社
北京

## 内 容 简 介

《高等数学例题与习题集》是一套目前在俄罗斯具有广泛影响的高等数学辅导用书. 在我国，无论是高等数学教材的编写方面，还是高等数学的教学方面，都与俄罗斯的高等数学教育有着很深的渊源. 因此将这套书译成中文，介绍给国内读者.

本书为《高等数学例题与习题集》的第二卷，是由原书第 2 册和第 3 册合并而成，内容是关于多元微积分的例题与习题，具体包括级数、多元函数微分学、含参变量积分、重积分与曲线积分共 4 章内容. 每章开始给出必要的理论材料，然后是各类典型例题的演算，最后是为读者安排的练习题，书末给出练习题的答案.



北京市版权局著作权合同登记号　图字：01-2001-0654，01-2001-0655

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学例题与习题集(二)：多元微积分/[俄]利亚什科等编著；高策理，苏宁译. —北京：清华大学出版社，2003

ISBN 7-302-06485-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.①利… ②高… ③苏…　Ⅲ.高等数学－高等学校－习题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 022612 号

**出 版 者**：清华大学出版社　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　**邮　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　**客户服务**：010-62776969

**组稿编辑**：刘　颖
**文稿编辑**：王海燕
**版式设计**：刘　路
**印 刷 者**：北京四季青印刷厂
**发 行 者**：新华书店总店北京发行所
**开　本**：185×230　**印张**：30.75　**字数**：651 千字
**版　次**：2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
**书　号**：ISBN 7-302-06485-7/O·290
**印　数**：1～5000
**定　价**：39.00 元

# 译 者 序

数学，无论从其对其他学科的影响上看，还是从数学自身发展上看，它的重要性都是不言而喻的. 高等数学，作为大多数理工科大学生的必修课，在锻炼学生的逻辑思维，以及为后续专业课程的学习打好基础方面，其重要性更是不言而喻的. 如何学好高等数学，仁者见仁，智者见智，但数学习题的作用是大家公认的.

《高等数学例题与习题集》是由四位俄罗斯数学家所编写的一套高等数学辅导书，全书共 5 册，其中第 1 册包括分析引论，一元函数微分学，不定积分，定积分 4 章内容；第 2 册包括级数，多元函数微分学两部分内容；第 3 册包括含参变量积分，重积分与曲线积分两部分内容；第 4 册是关于复变函数的内容，包括数学分析基础，复数与复变函数，复平面上的初等函数，复平面上的积分，解析函数级数、孤立奇点，解析延拓，留数及其应用，解析函数几何理论的一些问题共 8 章内容；第 5 册是关于微分方程理论的内容，包括一阶微分方程，高阶微分方程，微分方程组，一阶偏微分方程，微分方程解的逼近方法，稳定性与相轨道，解线性微分方程的 Laplace 积分变换法共 7 章内容.

作者曾编写过高等数学习题集，本书的前 3 册是他们两卷本辅导书《数学分析例题与习题》的修改与补充. 本套书从 1997 年开始出版发行，历时两年于 1999 年完成. 并已被翻译成西班牙文出版发行.

本套书采用统一风格，每章的开始给出必要的理论材料，然后给出各种类型的例题，最后是为读者准备的习题，书末给出习题答案. 全书共演算例题 2823 道，其中第 1 册 805 道，第 2 册 497 道，第 3 册 369 道，第 4 册 363 道，第 5 册 789 道；收录习题 1998 道，其中第 1 册 923 道，第 2 册 328 道，第 3 册 238 道，第 4 册 193 道，第 5 册 316 道. 这些例题涵盖了各部分内容的典型习题和较难处理的习题，这样既有利于帮助读者尽快地掌握解决典型题目的方法，促进对基本概念和基本定理的理解，也可以通过一些较难题目的解法来提高知识的综合运用能力，用以强化和锻炼综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 本书参考了许多知名的俄文版习题集，其中包括久负盛名的吉米多维奇的《数学分析习题集》（人民教育出版社 1958 年翻译出版），沃尔科维斯基等的《复变函数论习题集》（上海科学技术出版社 1981 年翻译出版），菲利波夫等的《微分方程习题集》（上海科学技术出版社 1981 年翻译出版）. 例如，前 3 册中所演算的例题就包括了《数学分析习题集》中的绝大多数典型题和难题.

我国近代的高等教育，无论是在教材的编写方面，还是在教学方法方面，都与俄罗斯（前苏联）的高等教育有着很深的渊源. 因此，我们将此套辅导书翻译成中文，一方面给读

者提供一套辅导书，另一方面，也将俄罗斯当代的高等数学教学水准介绍给国内高校的学生和数学教师.

本套书并没有局限于高等数学教科书的内容，而是站在较高的角度来梳理高等数学中各部分内容之间以及它们与其他相关分支之间的关系，并且将一些相关分支的内容纳入到高等数学的背景下来讨论(反映在理论材料、例题演算和习题中). 例如，书中涉及了集合论、线性空间、矩阵、函数逼近论等方面的内容. 这样有利于读者从全局上把握高等数学的知识，以加深对这些知识的理解和认识.

本套书的读者对象主要为工科院校的学生以及理科或师范院校数学系的学生. 对于广大的高等院校中的数学教师来讲，它也是非常有用的参考书.

本套书已由清华大学出版社自俄罗斯引进中文版权，准备分 4 册出版发行(原书第 2 册和第 3 册合并为一册). 清华大学数学系组织了多名教授、副教授翻译. 第二册的翻译分工为：第 1 章、第 2 章由苏宁教授翻译，高策理副教授校对，第 3 章、第 4 章及练习题答案由高策理副教授翻译，苏宁教授校对。在翻译过程中，对原书中的一些印刷错误直接进行了修改，而没有加脚注说明.

数学科学系的萧树铁教授、谭泽光教授、白峰杉教授等对本书的翻译给予了很多支持与鼓励，在此向他们表示感谢. 北京大学俄语系的王辛夷老师、林百学老师在联系俄罗斯出版社及其他事情上给了译者很多帮助，在此表示感谢.

由于译者的水平所限，书中自有很多错误或者不妥之处，敬请读者批评指正.

译　者

2002 年岁末

# 前　言

您手头的《高等数学例题与习题集》第二卷《多元微积分》，对于俄罗斯读者来讲不是完全陌生的．本书的前三卷是两卷本《数学分析例题与习题》（作者相同）的修改与补充，这些作者在大学生中被称为"反吉米多维奇"学派．本书的第四卷和第五卷是首次出版，内容是关于复变函数与微分方程理论的．

本书参考了很多知名的习题集，其中有吉米多维奇的《数学分析习题集》，沃尔科维斯基等的《复变函数论习题集》，菲利波夫等的《微分方程习题集》．全部五卷保持同一种风格：每章开始给出必要的理论材料，然后演算各种类型的例题，最后给出为读者准备的习题，书末给出习题答案．

本书适用于工程师、应用数学专家、高等学校教师、大学生以及自学高等数学者．

# 目　录

# 第1章 级 数

## 1 数项级数 不变号级数收敛判别法

### 1.1 一般概念与定义

**定义 1** 令 $a_n$ 为线性空间 $\mathscr{L}$ 中的任意元素，$n\in\mathbb{N}$，$\mathscr{L}$ 中定义了极限，称表达式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1}$$

为元素 $a_n$ 构成的级数，称 $a_n$ 为级数的项. 特别当 $a_n\in\mathbb{R}$ 或者 $a_n\in\mathbb{C}$ 时，级数(1)称为数项级数.

**定义 2** 级数(1)的前 $n$ 项和称为部分和，并常常记为 $S_n$，即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

**定义 3** 如果存在有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,\quad S\in\mathscr{L},$$

则称级数(1)在 $\mathscr{L}$ 中收敛，元素 $S$ 称为级数的和. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ 或者不存在，则称级数(1)发散.

**定义 4** 级数

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k,\quad a_k\in\mathscr{L},$$

称为级数(1)的 $n$ 项后的余项.

级数(1)收敛或者发散由它的余项决定，因此研究级数的收敛性问题，常常用考察它的 $n$ 项后的余项来代替.

**定义 5** 令 $a_n\in\mathbb{R}$. 如果 $a_n\geqslant 0$，则称级数(1)是正项的；如果 $a_n>0$，则称级数(1)是严格正项的.

### 1.2 级数收敛的必要条件

为使 1.1 节中级数(1)在 $\mathscr{L}$ 中收敛，必须有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\theta,\quad \theta\in\mathscr{L},$$

其中 $\theta$ 是线性空间 $\mathscr{L}$ 中的零元素.

## 1.3 柯西准则

令 $\mathscr{L}$ 是 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$. 为使 1.1 节中级数(1)在 $\mathscr{L}$ 中收敛，必需且只需 $\forall \varepsilon>0$，$\exists n_0$，使得 $\forall n>n_0$ 和 $\forall p\in\mathrm{N}$ 满足下列不等式：

$$|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

## 1.4 广义调和级数

**定义**　数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

称为广义调和级数，$p=1$ 时称为调和级数. 该级数当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

## 1.5 比较判别法

**定理 1**　如果 1.1 节中的级数(1)和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

都是正项级数，且 $\forall n>n_0$，$a_n\leqslant b_n$，则由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛可导出 1.1 节中的级数(1)收敛，而由 1.1 节中的级数(1)发散可导出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

**定理 2**　如果级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都是严格正项的，且满足不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

则上面定理的结论仍成立.

**定理 3**　如果级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都是严格正项的，且满足不等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c,\quad 0<c<+\infty,$$

则两个级数同时收敛或者同时发散.

**定理 4**　如果当 $n\to\infty$ 时

$$a_n=O\left(\frac{1}{n^p}\right)^{①},$$

那么当 $p>1$ 时 1.1 节中的级数(1)收敛，$p\leqslant 1$ 时对应的级数发散.

---

① 译者注：$a_n=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 表示当 $n\to+\infty$ 时，$a_n$ 与 $\frac{1}{n^p}$ 为同阶无穷小.

## 1.6　达朗贝尔和柯西判别法

如果 1.1 节中的级数(1)是严格正项的，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L,$$

那么当 $L<1$ 时该级数收敛，$L>1$ 时该级数发散. 当 $L=+\infty$ 时该级数仍发散，而如果 $L=1$，则该级数的收敛性问题仍然不定(极限形式的达朗贝尔判别法).

如果 1.1 节中的级数(1)是严格正项的，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L,$$

那么关于该级数的收敛性，与达朗贝尔判别法同样的结论成立(最简单的极限形式的柯西判别法).

## 1.7　拉阿伯判别法

如果 1.1 节中的级数(1)是严格正项的，且

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

那么该级数当 $p>1$ 时收敛，当 $p<1$ 时发散. 当 $p=+\infty$ 时该级数仍收敛，而如果 $p=1$，则研究该级数收敛或发散的问题需要其他的判别法.

## 1.8　高斯判别法

如果 1.1 节中的级数(1)是严格正项的，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},\quad \lambda,\mu\ 为常数,$$

其中 $\epsilon>0$，$|\theta_n|<c$，那么级数当 $\lambda>1$ 时收敛，当 $\lambda<1$ 时发散. 如果 $\lambda=1$，则该级数当 $\mu>1$ 时收敛，当 $\mu\leqslant 1$ 时发散.

## 1.9　柯西-麦克劳林积分判别法

如果函数 $f(x)$ 当 $x>0$ 时非负且非增，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与广义积分

$$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

同时收敛或者同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求和：

**1**　$\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots.$

◀求证该级数的部分和序列$(S_n)$的收敛性，其中

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

为此,将 $S_n$ 变换成下列形式:

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

容易看到序列 $(S_n)$ 收敛,即给定的数项级数按照定义收敛. 它的和为

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

**2** 1) $q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$;

2) $q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots$, $|q|<1$.

◀ 令 $(u_n)$ 和 $(v_n)$ 分别为级数 2) 和 1) 的部分和序列,令 $u$ 和 $v$ 分别为它们的和. 根据欧拉公式 $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$,可以写出

$$u_n+iv_n=qe^{i\alpha}+q^2e^{2i\alpha}+\cdots+q^ne^{in\alpha}=\frac{qe^{i\alpha}-q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}.$$

注意条件 $|q|<1$,有 $|qe^{i\alpha}|<1$;由此导出

$$\lim_{n\to\infty}(q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha})=0.$$

由上述公式求出

$$u+iv=\lim_{n\to\infty}(u_n+iv_n)=\frac{qe^{i\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}=q\left(\frac{\cos\alpha-q}{1-2q\cos\alpha+q^2}+i\frac{\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}\right),$$

因此

$$u=q\frac{\cos\alpha-q}{1-2q\cos\alpha+q^2},\qquad v=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. \blacktriangleright$$

**3** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

◀ 直接求出

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+\cdots+\\&\quad(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

由此得到

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}. \blacktriangleright$$

**4** 研究级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

◀ 假设有 $x\neq k\pi$($k$ 为整数)使级数收敛,那么必须满足级数收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty}\sin nx=0,\quad x\neq k\pi. \tag{1}$$

由此得到$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)x=0$，或者说$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin nx\cos x+\cos nx\sin x)=0$. 考虑到(1)，我们发现

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0,\quad x\neq k\pi. \tag{2}$$

从(1)和(2)得到

$$\lim_{n\to\infty}(\cos^2 nx+\sin^2 nx)=0,$$

这与熟知的公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 矛盾. 矛盾来源于式(1). 因此，如果 $x\neq k\pi$，则级数发散. 而当 $x=k\pi$($k$ 为整数)时，级数显然收敛，且级数的和为零. ▶

**5**　证明若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则组合该级数的项不改变顺序得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也收敛，且其和相同，这里 $A_n=\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i$，$p_1=1$，$p_1<p_2<\cdots$.

◀由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可知，它的部分和序列的任意子序列都收敛到级数的和 $S$. 取下面的子列

$$a_1=S_{p_1},\ a_1+a_2+\cdots+a_{p_2-1}=S_{p_2},$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_{p_2-1}+a_{p_2}+\cdots+a_{p_3-1}=S_{p_3},\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_{p_{n+1}-1}=S_{p_{n+1}}.$$

则根据收敛条件有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{p_n}=S$. 但是第二个级数的部分和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 恰好等于 $S_{p_{n+1}}$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}(A_1+A_2+\cdots+A_n)$也等于 $S$，这就是要证明的.

反过来的结论是不正确的，由子列的收敛性不能导出序列本身的收敛性. 例如，令 $a_n=(-1)^{n+1}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 显然发散，尽管两两组合该级数的项得到的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-1)$收敛. ▶

**6**　证明若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，且组合该级数的项得到的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛，则原级数也收敛.

◀令$(p_k)$是自然数列的任意子列，$(S_n)$和$(S_{p_k})$分别为第一和第二个级数的部分和序列. 那么根据 $a_n>0$，可得

$$S_1\leqslant S_n\leqslant S_{p_1}\ \text{对于所有满足}\ 1\leqslant n\leqslant p_1\ \text{的}\ n\ \text{成立},$$
$$S_{p_1}\leqslant S_n\leqslant S_{p_2}\ \text{对于所有满足}\ p_1\leqslant n\leqslant p_2\ \text{的}\ n\ \text{成立},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{p_k}\leqslant S_n\leqslant S_{p_{k+1}}\ \text{对于所有满足}\ p_k\leqslant n\leqslant p_{k+1}\ \text{的}\ n\ \text{成立}.$$

在最后一个不等式中取极限 $k\to\infty$，并注意到第二个级数收敛，于是得到

$$\lim_{k\to\infty}S_{p_k}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{k\to\infty}S_{p_{k+1}}=S.$$ ▶

研究下列级数的收敛性：

**7** $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots.$

◀ 显然该级数的部分和序列是增加的. 求证它是无界的. 为此观察它的部分和数列 $(S_n)$ 的子列 $(S_{2^n})$, $n\in\mathbf{N}$ :

$$S_{2^1}=S_2=1+\frac{1}{3},S_{2^2}=S_4=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7},\cdots,S_{2^n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

借助估计

$$1+\frac{1}{3}>1,\frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}>\frac{4}{16}=\frac{1}{4},\cdots$$

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4},$$

我们得到

$$S_{2^n}=\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)+\cdots+$$

$$\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)>1+\frac{n-1}{4}.$$

由此得到子列 $(S_{2^n})$ 无界, 即 $(S_n)$ 无界. 因此, 该级数发散. ▶

**8** $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots.$

◀ 考察原级数项分组求和得到的级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{4\sqrt{5}}+\frac{1}{5\sqrt{6}}+\frac{1}{6\sqrt{7}}+\frac{1}{7\sqrt{8}}\right)+$$

$$\left(\frac{1}{8\sqrt{9}}+\cdots+\frac{1}{15\sqrt{16}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}\right)+\cdots, \qquad (1)$$

注意到

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}<\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{4\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{7\sqrt{8}}<\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{7\sqrt{7}}<\frac{4}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{(\sqrt{2})^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{(2^n)^{3/2}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^{3/2}}<\frac{1}{(\sqrt{2})^n}.$$

这样级数(1)的部分和有估计

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{2})^n}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

考虑到 $S_n$ 明显的单调性, 上式导出级数(1)收敛. 根据例题 6 的结论, 原级数收敛. ▶

**9**　$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots.$

◀借助估计

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$>\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\ln(n+1),$$

可知该级数发散.▶

**10**　证明如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $a_n\geqslant 0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛.

◀显然第二个级数的部分和序列$(C_n)$单调非减.此外,由 $a_n\geqslant 0$ 和第一个级数收敛得到不等式

$$C_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=S_n^2\leqslant c,c\ \text{为常数}.$$

因此,根据单调有界序列定理,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n$ 存在,根据 1.1 节的定义 3,即得第二个级数收敛.

注意,本结论的逆命题不成立.实际上,令 $a_n=\frac{1}{2n-1}$,则由 1.5 节定理 4,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散(参见例题 7).▶

**11**　证明:如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛,那么下列级数也收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}.$$

◀应用初等不等式 $|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$ 以及已知条件,得到

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)\leqslant\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\Big)=c.$$

由此可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛.借助于估计

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\leqslant 2\Big(c+\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\Big),$$

要证的第二个级数也收敛.第三个级数的收敛性来自第一个级数的收敛性,其中取 $b_n=1/n$ 并注意级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ 收敛.▶

**12**　证明:如果级数 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$,那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

◀根据极限的定义,$\forall\varepsilon>0,0<\varepsilon<|a|,\exists n_0$ 使得 $\forall n>n_0$ 且 $\forall p\in\mathbb{N}$,满足不等式

$a-\varepsilon<(m+n)a_{n+m}<a+\varepsilon,\ m=1,\cdots,p$,或者写成

$$\frac{a-\varepsilon}{m+n}<a_{m+n}<\frac{a+\varepsilon}{m+n}.$$

将 $m$ 由 1 到 $p$ 求和得到

$$(a-\varepsilon)\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n}<\sum_{m=1}^{p}a_{m+n}<(a+\varepsilon)\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n}.$$

由此可见,利用调和级数的发散性$\left(\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{p}1/(m+n)=+\infty\right)$,可知原级数的余项发散. 因此原级数本身也发散. ▶

注释:由例题 12 的条件得知,当 $n\to\infty$时,$a_n=\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$. 因此根据定理 4,该级数发散. 由此我们得到一个直接的证明.

**13** 证明:如果单调减正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,那么$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

◀按照柯西准则,由级数收敛,$\forall\varepsilon>0$,$\exists n_0$ 使得 $\forall n>n_0$,$p>0$,$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\frac{\varepsilon}{2}$成立. 而$(a_n)$是单调减正数序列,所以 $pa_{n+p}<\frac{\varepsilon}{2}$. 进一步选取 $p=n$ 和 $p=n+1$ 分别得到 $2na_{2n}<\varepsilon$ 和$(2n+1)a_{2n+1}<\varepsilon$,只要 $n>n_0$. 从而对于任意(奇数和偶数)$n>2n_0$,都有 $na_n<\varepsilon$. ▶

利用柯西准则证明下列级数的收敛性:

**14** $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\cdots+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\cdots.$

◀固定任意 $\varepsilon>0$,要找到 $n_0$,使对一切 $n>n_0$ 和任意 $p>0$ 都有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$,这里$(S_n)$是该级数的部分和序列. 我们有

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n|=&\left|\frac{\cos(n+1)x-\cos(n+2)x}{n+1}+\right.\\&\left.\frac{\cos(n+2)x-\cos(n+3)x}{n+2}+\cdots+\frac{\cos(n+p)x-\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|\\=&\left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)}-\frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)}-\cdots-\frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)}-\right.\\&\left.\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}+\frac{1}{n+p}<\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

由此可见,如果取 $n_0$ 超过 $2/\varepsilon$,则$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$. 因此,根据柯西准则得该级数收敛. ▶

**15** $\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos x^2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos x^n}{n^2}+\cdots.$

◀要找到 $n_0$,使对一切 $n>n_0$ 和任意 $p>0$ 都有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

于是，取 $n_0=1/\varepsilon$，由柯西准则得到该级数收敛. ▶

应用柯西准则证明下列级数的发散性：

**16**　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$

◀令 $\varepsilon=1/4$，取 $p=n$，则

$$|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\,\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}>\varepsilon.$$

于是，由柯西准则得该级数发散. ▶

**17**　$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots.$

◀因为

$$S_{6n}-S_{3n}=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n},$$

其中 $(S_{6n})$，$(S_{3n})$ 是级数部分和序列的子列，所以

$$S_{6n}-S_{3n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6}.$$

于是，由柯西准则得该级数发散. ▶

**18**　$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots.$

◀令 $\varepsilon=1/4$. 估计差

$$|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$$

$$>\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{4}.$$

于是，由柯西准则可知级数发散. ▶

利用各种判别法研究级数的收敛性：

**19**　$\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\cdots+\frac{(n!)^n}{2^{n^2}}+\cdots.$

◀因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0,$$