第一章　运动介质中的声场

气动声学是研究流体自身以及流体与固体边界相互作用发声机理的一门学科。它成功地运用了古典声学，尤其是运动介质声学相似的物理概念、基本方法和处理问题的技巧。本章将首先介绍运动介质声学的基本方程、声能量关系，然后着重讨论如何定量描述各种运动声源声场的基本特征。

§1.1　运动介质声学的基本方程

设声波在一粘性不起主要作用的流体中传播，那么，描述声波运动最基本的方程应是欧拉方程组，即

$$\begin{cases}\rho\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)=-\nabla p+f\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\rho q\\ \dfrac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla s=0\end{cases}\tag{1.1}$$

式中 ρ、$\boldsymbol{v}$、p、s 分别表示流体的密度、速度、压力及熵，而 f、q 分别表示外部作用于流体的力和质量源。

设流体满足正压条件，因此状态方程可表示为

$$\rho=\rho(p,s)$$

而

$$d\rho=\frac{1}{c^2}dp+\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p ds$$

所以，状态方程的微分形式是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla p\right)\tag{1.2}$$

式中声速

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s$$

对于定常流动，即无任何形式的非定常扰动情况下，方程(1.1)、(1.2)可化为

$$\begin{cases}\rho_0\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0=-\nabla p_0\\ \nabla\cdot\rho_0\boldsymbol{v}_0=0\\ \boldsymbol{v}_0\cdot\nabla s_0=0\\ \boldsymbol{v}_0\cdot\nabla p_0=c_0^2\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\rho_0\end{cases}\tag{1.3}$$

式中 ρ_0、$\boldsymbol{v}_0$、p_0、s_0 分别表示定常流场的密度、速度、压力和熵，c_0 为声速度。

通常，并不直接应用形如式(1.1) 那样的非线性方程来计算声场。实际应用的是方程(1.1)的线化形式。

假定流场的扰动量分别为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0,\quad p'=p-p_0,\quad \rho'=\rho-\rho_0\\&s'=s-s_0,\quad c^{2\prime}=c^2-c_0^2\end{aligned}\tag{1.4}$$

并且满足

$$|\boldsymbol{u}|/c\ll 1,\quad p'/p_0\ll 1,\quad \rho'/\rho_0\ll 1,\quad |\boldsymbol{s}'|/|s_0|\ll 1,\quad c^{2\prime}/c_0^2\ll 1$$

应用这些基本关系，方程(1.1)、(1.2)最后可化为

$$\begin{cases}\rho_0\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0\right)+\rho'\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0=-\nabla p'+f\\ \dfrac{\partial\rho'}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{u}+\rho'\boldsymbol{v}_0)=\rho_0 q\\ \dfrac{\partial s'}{\partial t}+\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla s'+\boldsymbol{u}\cdot\nabla s_0=0\\ c_0^2\left(\dfrac{\partial\rho'}{\partial t}+\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\rho'+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho_0\right)+c^{2\prime}\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\rho_0=\dfrac{\partial p'}{\partial t}+\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla p'+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p_0\end{cases}\tag{1.5}$$

这就是运动介质声学的基本方程。这个结果实质上与线化空气动力学的基本方程是完全一致的。该方程在各种进一步的简化条件下，已被应用来研究有流动的管道声波传播问题。

现讨论方程(1.5)常用的一些简化形式。

对于平行剪切平均流动(图 1.1)

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{i}U[r(y_2,y_3)]\\ \rho_0=\text{const}\\ p_0=\text{const}\\ s_0=\text{const}\end{cases}$$

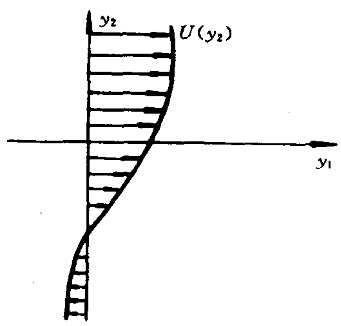

图 1.1　剪切平均流动图

则方程(1.5)可简化为

$$\begin{cases}\rho_0\left(\dfrac{D_0\boldsymbol{u}}{Dt}+\boldsymbol{i}\dfrac{dU}{dr}u_r g\right)=-\nabla p'+f\\ \dfrac{1}{\rho_0c_0^2}\dfrac{D_0p'}{Dt}+\nabla\cdot\boldsymbol{u}=q\\ \dfrac{D_0s}{Dt}=0\end{cases}\tag{1.6}$$

式中

$$\frac{D_0}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial y_1},\quad u_r=\boldsymbol{u}\cdot\frac{\nabla\boldsymbol{r}}{|\nabla\boldsymbol{r}|}$$

$$g(y_2,y_3)=|\nabla\boldsymbol{r}|,\quad r=\sqrt{y_2^2+y_3^2}$$

进一步合并，方程(1.6)变为

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c_0^2}\frac{D_0^2 p'}{Dt^2} + 2\rho_0 \frac{dU}{dr} g \frac{\partial u_r}{\partial y_1} = \nabla f - \rho_0 \frac{D_0 q}{Dt} \tag{1.7}$$

对于均匀流动，即

$$v_0 = U = \text{const}$$

上式可写为

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c_0^2}\frac{D^2}{Dt^2}p' = \nabla f - \rho_0 \frac{D_0 q}{Dt} \tag{1.8}$$

方程(1.7)、(1.8)是研究声波在剪切流或均匀流中传播的基本方程[1]。

当 $U=0$ 时，方程(1.8)是

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p' = \nabla f - \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} \tag{1.9}$$

这是古典声学的基本方程。

§ 1.2　运动介质中的声能量关系

对于古典声学，声波伴有的能量密度为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\rho_0 |\boldsymbol{u}|^2 + \frac{1}{2}\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho'^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho_0 |\boldsymbol{u}|^2 + \frac{1}{2}\frac{p'^2}{\rho_0 c_0^2} \end{aligned} \tag{1.10}$$

声波伴有的能量通量，即声强为

$$\boldsymbol{I} = p'\boldsymbol{u} = \rho' c_0^2 \boldsymbol{u} \tag{1.11}$$

以上两者之间，能量守恒定律成立，即

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{I} = 0 \tag{1.12}$$

方程(1.12)实际也意味着，无论给出何种形式的声能流密度定义，必须满足能量守恒定律。然而，对于运动介质声学，给出合乎物理逻辑的声能流密度或声强的定义至今仍是一个有待进一步探讨的问题[2,3]。但对于无旋、等熵流动，运用基本方程(1.5)可以证明满足能量守恒方程(1.12)并具有二阶精度的声能流密度以及声强的表达式为[1]

$$E = \frac{p'\rho'}{2\rho_0} + \left(\frac{\rho_0 u^2}{2} + \rho' \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{v}_0\right) \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{I} = \left(\frac{p'}{\rho_0} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_0\right)(\rho_0 \boldsymbol{u} + \rho' \boldsymbol{v}_0) \tag{1.14}$$

当 $\boldsymbol{v}_0=0$ 时，式(1.13)、(1.14)分别退化为古典声学的相应表达式(1.10)、(1.11)。

§ 1.3　运动声源产生的声场

为讨论问题方便，以下所讨论的各种声源均为点声源，且均为匀速直线运动。

一、单极子源

对于一以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 运动的单极子源，源的强度可写为

$$q(y,\tau) = q_0(\tau)\delta(y - v_0\tau)$$

因此，由方程(1.9)可知，描述该问题的波动方程应是

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial \tau}[q_0(\tau)\delta(\boldsymbol{y} - v_0\tau)] \tag{1.15}$$

引入速度势 ψ，则 $p' = \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau}$，因此

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = -\rho_0 q_0(\tau)\delta(\boldsymbol{y} - v_0\tau) \tag{1.16}$$

该方程对应的格林函数为

$$G = \frac{1}{4\pi R}\delta\left(\tau - t + \frac{R}{c_0}\right) \tag{1.17}$$

式中 $R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}(\tau)|$ 为声源点 $\boldsymbol{y}$ 到观察者之间的距离，$\boldsymbol{t}$ 为观察时间。

方程(1.16)相应的解为

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \frac{\rho_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{q_0(\tau)}{R}\delta\left(\tau - t + \frac{R}{c_0}\right)\delta(\boldsymbol{y} - v_0\tau)dyd\tau \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_0(\tau)}{|\boldsymbol{x} - v_0\tau|}\delta\left(\tau - t + \frac{|\boldsymbol{x} - v_0\tau|}{c_0}\right)d\tau\end{aligned} \tag{1.18}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta[g(\tau)]d\tau = \sum_i \frac{f(\tau_i)}{\left|\dfrac{dg(\tau_i)}{d\tau}\right|}$$

这里，τ_i 是由方程 $g(\tau_i) = 0$ 确定的根。

又

$$g = \tau - t + \frac{|\boldsymbol{x} - v_0\tau|}{c_0} \tag{1.19}$$

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{v_0^2\tau - v_0 \cdot \boldsymbol{x}}{c_0|\boldsymbol{x} - v_0\tau|} + 1 = 1 - Ma_r \tag{1.20}$$

所以

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \frac{\rho_0}{4\pi}\sum_i \frac{q_0(\tau_i)}{R|1 - Ma_r|} \tag{1.21}$$

式中

$$\begin{aligned}Ma_r &= v_0 \cdot \frac{\boldsymbol{x} - v_0\tau}{c_0|\boldsymbol{x} - v_0\tau|} \\ &= Ma_0\cos\theta = Ma_r\end{aligned} \tag{1.22}$$

式中 θ 为运动方向与观察者方向间的夹角，相应的 Ma_r 为运动马赫数在观察者方向的投影。

求解方程(1.19)可以得到辐射时间 τ，进而可以求得此时声源离开观察点的距离为

$$\begin{aligned}R^{\pm} &= c_0(t - \tau^{\pm}) \\ &= \frac{Ma_0 \cdot (\boldsymbol{x} - v_0t) \pm \sqrt{|\boldsymbol{x} - v_0t|^2 + (1 - Ma_0^2)r^2}}{1 - Ma_0^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{Ma_0\cdot(x-v_0t)\pm\sqrt{[Ma_0\cdot(x-v_0t)]^2+(1-Ma_0^2)|x-v_0t|^2}}{1-Ma_0} \tag{1.23}$$

式中 $r^2=x_2^2+x_3^2$[观察点的坐标是 $x=(x_1,x_2,x_3)$]。

显然,只有正实数的 R 才有物理意义。从以上关系式不难看出,对于亚音速运动,R 只有一个正的实根[式(1.23)取正号],如图 1.2 所示。

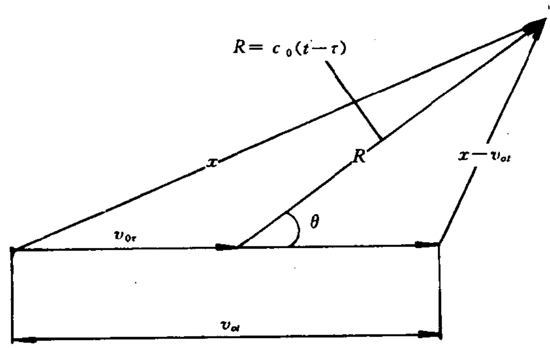

图 1.2　示意图

对于作超音速运动的声源,R 存在两个正实根的条件应为

$$[Ma_0\cdot(x-v_0t)]^2+(1-Ma_0^2)|x-v_0t|^2>0$$

或

$$\frac{\sqrt{Ma_0^2-1}}{Ma_0}\Bigg/\left|\frac{Ma_0}{Ma_0}\cdot\frac{(x-v_0t)}{|x-v_0t|}\right|<1 \tag{1.24}$$

由图 1.4 可以看出,马赫角

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{\sqrt{Ma_0^2-1}}{Ma_0}=\sin^{-1}\frac{1}{Ma_0}<\frac{\pi}{2}$$

观察者与马赫锥顶点在运动方向的夹角为

$$\delta=\cos^{-1}\frac{Ma_0}{Ma_0}\cdot\frac{(x-v_0t)}{|x-v_0t|}$$

因此,不等式(1.24)实际意味着 R 存在两个有效正实根或观察者同时接收到两次声源辐射的条件是观察者必须位于运动产生的马赫锥内。

这样,式(1.21)可写为

$$\psi^{\pm}(x,t)=\frac{\rho_0q_0(\tau^{\pm})}{4\pi R|1-Ma_r|} \tag{1.25}$$

相应的声压表示式为

$$p'^{\pm}(x,t)=\frac{\partial\psi^{\pm}(x,t)}{\partial t}$$

为了得到 $p'(x,t)$的具体表达式,由式(1.25)可知,首先需要求出$\frac{\partial R}{\partial t}$、$\frac{\partial Ma_r}{\partial t}$等项的形式。现分别就亚音速、超音速运动两种情况作如下讨论。

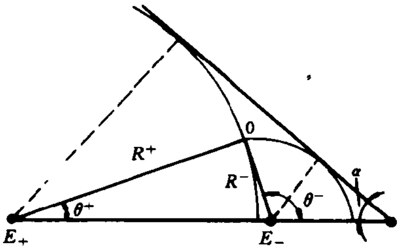

图 1.3 示意图

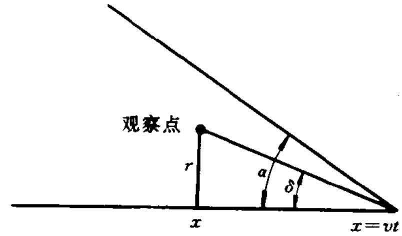

图 1.4 示意图

(1)亚音速运动

由式(1.23)知

$$R = \frac{Ma_0 \cdot (x - v_0 t) + R_1}{1 - Ma_0^2} \tag{1.26}$$

式中

$$R_1 = \sqrt{|x - v_0|^2 + (1 - Ma_0^2) r^2}$$

又

$$x_1 - v_0 \tau = R\cos\theta$$

所以

$$\begin{aligned} Ma_0(x_1 - v_0 t) &= Ma_0[x_1 - v_0\tau - v_0(t - \tau)] \\ &= Ma_0 R\cos\theta - Ma_0^2 R \\ &= Ma_0 R(\cos\theta - Ma_0) \end{aligned}$$

那么,由式(1.26)可知

$$R_1 = R(1 - Ma_0\cos\theta)$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0}\frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{1 - Ma_0^2}\left[Ma_0^2 + \frac{Ma_0 \cdot (x - v_0 t)}{R_1}\right] \\ &= -\frac{Ma_0}{1 - Ma_0^2}\left[Ma_0 + \frac{R(\cos\theta - Ma)}{R(1 - Ma\cos\theta)}\right] \\ &= -\frac{Ma_0\cos\theta}{1 - Ma_0\cos\theta} \end{aligned}$$

因此,亚音速运动声源产生的声压为

$$\begin{aligned} p'(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho_0 q_0(\tau)}{4\pi R|1 - Ma_r|}\right] \\ &= \frac{\rho_0 q'(\tau)}{4\pi R_1}\left(1 - \frac{1}{c_0}\frac{dR}{dt}\right) - \frac{\rho_0 q(\tau)}{4\pi R_1^2}\frac{dR_1}{dt} \\ &= \frac{\rho_0 q'(\tau)}{4\pi R(1 - Ma_0\cos\theta)^2} + \frac{\rho_0 v_0 q(\tau)(\cos\theta - Ma_0)}{4\pi R^2(1 - Ma_0\cos\theta)^3} \end{aligned} \tag{1.27}$$

当 $v_0 = 0$ 时

$$p'(x,t) = \frac{\rho_0 q'(\tau)}{4\pi R} \tag{1.28}$$

这是古典声学中的单极子源声场表达式。

(2)超音速运动

$$p'(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{q\left(t-\dfrac{R^{+}}{c_0}\right)}{4\pi R_1}+\frac{q\left(t-\dfrac{R^{-}}{c_0}\right)}{4\pi R_1}\right]$$

式中

$$R^{\pm}=\frac{Ma_0\cdot(v_0t-\boldsymbol{x})\pm R_1}{Ma_0-1} \tag{1.29}$$

因为

$$\begin{aligned}v_0t-x_1&=v_0(t-\tau)-(x_1-v_0\tau)\\&=Ma_0R-R\cos\theta=R(Ma_0-\cos\theta)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}R_1&=R^{+}(Ma_0\cos\theta^{+}-1)\\&=-R^{-}(Ma_0\cos\theta^{-}-1)\end{aligned} \tag{1.30}$$

式中 θ^{+}、θ^{-}分别表示第一辐射点 R^{+}和第二辐射点 R^{-}与运动方向的夹角。

最后,超音速运动声源的声场表达式为

$$\begin{aligned}p'(x,t)=&\frac{-\rho_0q'(t-R^{+}/c_0)}{4\pi R^{+}(Ma_0\cos\theta^{+}-1)^2}+\frac{\rho_0q'(t-R^{-}/c_0)}{4\pi R^{-}(Ma_0\cos\theta^{-}-1)^2}\\&-\frac{\rho_0v_0q(t-R^{+}/c_0)(Ma_0-\cos\theta^{+})}{4\pi(R^{+})^2(Ma_0\cos\theta^{+}-1)^3}\\&+\frac{\rho_0v_0q(t-R^{-}/c_0)(Ma_0-\cos\theta^{-})}{4\pi(R^{-})^2(Ma_0\cos\theta^{-}-1)^3}\end{aligned} \tag{1.31}$$

二、偶极子源

基本方程

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2p'}{\partial\tau^2}-\nabla^2p'=-\frac{\partial}{\partial x_i}[f_i(\tau)\delta(\boldsymbol{x}-v_0t)] \tag{1.32}$$

令 $p'=\mathrm{div}A$,则方程(1.32)变为

$$\nabla A_i-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2A_i}{\partial\tau^2}=f_i(\tau)\delta(\boldsymbol{x}-v_0\tau) \tag{1.33}$$

将式(1.33)与式(1.16)对比即得(亚音速运动)

$$A_i=\frac{f_i\left(t-\dfrac{R}{c_0}\right)}{4\pi R(1-Ma_0\cos\theta)}$$

对于纵偶极子,即偶极子方向与运动方向一致,则

$$\begin{aligned}p'(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{f_1(t-R/c)}{4\pi R(1-Ma_0\cos\theta)}\right]\\&=\frac{1}{4\pi R_1}f_1'\frac{\partial R}{c_0\partial x_1}+\frac{f_1}{4\pi R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial x_1}\end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_1}=\frac{x_1-v_0t}{R_1}=\frac{\cos\theta-Ma_0}{1-Ma_0\cos\theta}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_1}=\frac{1}{1-Ma_0^2}(Ma_0+\frac{\cos\theta-Ma_0}{1-Ma_0\cos\theta})=\frac{\cos\theta}{1-Ma_0\cos\theta}$$

所以

$$p'(\boldsymbol{x},t)=\frac{f_1'(\tau)\cos\theta}{4\pi Rc_0(1-Ma_0\cos\theta)^2}+\frac{f_1(\tau)(\cos\theta-Ma_0)}{4\pi R^2(1-Ma_0\cos\theta)^3} \tag{1.34}$$

当 $Ma_0=0$ 时

$$\begin{aligned}p'(\boldsymbol{x},t)&=\frac{f_1'(\tau)\cos\theta}{4\pi Rc_0}+\frac{f_1(\tau)\cos\theta}{4\pi R^2}\\&=\frac{\cos\theta}{4\pi R}[\frac{1}{c_0}f_1'(\tau)+\frac{1}{R}f_1(\tau)]\end{aligned} \tag{1.35}$$

式(1.35)是古典声学纵向偶极子源的声场表达式。

对于横偶极子源(偶极子方向与运动方向垂直),所产生的声压是

$$p'(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial}{\partial x_2}[\frac{f_2(t-\frac{R}{c_0})}{4\pi R(1-Ma_0\cos\theta)}]$$

因为

$$\frac{\partial R}{\partial x_2}=\frac{x_2}{R(1-Ma_0\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-Ma_0\cos\theta}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_2}=\frac{(1-Ma_0^2)x_2}{R_1}=\frac{(1-Ma_0^2)\sin\theta}{1-Ma_0\cos\theta}$$

所以

$$p'(\boldsymbol{x},t)=\frac{f_2'(\tau)\sin\theta}{4\pi Rc_0(1-Ma_0\cos\theta)^2}+\frac{f_2(\tau)(1-Ma_0^2)\sin\theta}{4\pi R^2(1-Ma_0\cos\theta)^3} \tag{1.36}$$

§1.4 运动声源的频率特性——多普勒效应

现以单极子源作为例子讨论,其他情况与之类似。

设声源强度 $q(\tau)=q_0\sin\omega_0\tau$。这里 ω_0 为声波圆频率。由式(1.25)可知,观察点处的相位为

$$\varphi=\omega_0(t-\frac{R^{\pm}}{c_0})$$

对于亚音速运动,观察者的接收频率是

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0-\omega_0\frac{dR}{c_0dt}\\&=\frac{\omega_0}{1-Ma_0\cos\theta}\end{aligned} \tag{1.37}$$

由上式可以看出,如果观察者位于声源之前,$\cos\theta$ 为正,此时频率将升高。若观察者位于声源之后,$\cos\theta$ 为负,此时频率将变小。这是典型的运动多普勒效应。此外,不难看出,观察者所接受的频率变化范围是

$$\frac{\omega_0}{1+Ma_0}<\omega<\frac{\omega_0}{1-Ma_0} \tag{1.38}$$

对于超音速运动

$$\varphi^{+}=\omega_0(t-\frac{R^{+}}{c_0})$$

$$\omega^{+}=\frac{d\varphi^{+}}{dt}=\omega_0(1-\frac{dR^{+}}{c_0dt})$$

由式(1.29)、(1.30)知

$$\frac{1}{c_0}\frac{dR^{+}}{dt}=\frac{1}{Ma_0^2-1}\left[Ma_0^2+\frac{(Ma_0-\cos\theta^{+})Ma_0}{Ma_0\cos\theta^{+}-1}\right]=\frac{Ma_0\cos\theta^{+}}{Ma_0\cos\theta^{+}-1}$$

所以

$$\omega^{+}=\frac{-\omega_0}{Ma_0\cos\theta^{+}-1}=\frac{\omega_0}{1-Ma_0\cos\theta^{+}} \tag{1.39}$$

而

$$\varphi^{-}=\omega_0(t-\frac{R^{-}}{c_0})$$

$$\omega^{-}=\omega_0(1-\frac{dR^{-}}{c_0dt})$$

由式(1.29)及式(1.30)得

$$\frac{dR^{-}}{c_0dt}=\frac{1}{Ma_0^2-1}\left[Ma_0^2+\frac{Ma_0(Ma_0-\cos\theta^{-})}{Ma_0\cos\theta^{-}-1}\right]=\frac{Ma_0\cos\theta^{-}}{Ma_0\cos\theta^{-}-1}$$

所以

$$\omega^{-}=\frac{-\omega_0}{Ma\cos\theta^{-}-1}=\frac{\omega_0}{1-Ma\cos\theta^{-}} \tag{1.40}$$

由此可以看出，对于超音速情况，观察者接受的频率范围由两个区间确定，即

$$-\infty<\omega<\frac{\omega_0}{Ma_0-1}$$

$$\frac{\omega_0}{1+Ma_0}<\omega<\infty$$

以上结果还表明，如果声源运动为超音速，观察者同时接收到的两声源到达的频率成份不同，两者互相干涉可产生很大起伏。

由以上结果可以证明[5]，无论对亚音速或超音速运动，运动声源辐射到远场的总声功率为

$$E=\frac{E_s}{(1-Ma_0{}^2)^2} \tag{1.41}$$

式中 E_s 是声源静止时的功率。如果声源是简谐声源且频率为 f，则

$$E_s=\frac{\pi(q_0f_0)^2}{2\rho_0c_0} \tag{1.42}$$

§1.5 运动加速度对声场的影响

从式(1.27)、(1.31)、(1.34)和(1.36)可以看出，对于匀速直线运动的声源，如果 $Q(t)$ 或 $f_i(t)$ 等于常数，则远场声压为零(忽略三次项)。然而，实际情况表明，即使声源的强度为常数，如螺旋桨定常推力产生的声场，所辐射的声压并不为零。这意味着运动加速度

对声场有极其重要的影响[4]。

一、任意运动的单极子声源

基本方程

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2}-\nabla^2 p'=\frac{\partial}{\partial \tau}[\rho_0 q_0(\tau)\delta[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0(\tau)]]$$

引入速度势 ψ，有 $p'=\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$，所以

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}-\nabla^2 \psi=\{\rho_0 q_0\delta[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0(\tau)]\}$$

求解上式得

$$\psi=\frac{\rho_0 q_0(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)} \tag{1.43}$$

式中

$$R=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0(\tau)|$$

$$p'(x,t)=\frac{\partial \psi}{\partial t}=\frac{\rho_0 q'_0(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\frac{\partial \tau}{\partial t}-\frac{\rho_0 q_0(\tau)}{4\pi R^2(1-Ma_r)^2}\frac{\partial}{\partial t}[R(1-Ma_r)] \tag{1.44}$$

现需用到下列几个关系式：

因为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}=1-\frac{1}{c_0}\frac{\partial R}{\partial t}=1+Ma_r\frac{\partial \tau}{\partial t}$$

所以

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}=\frac{1}{1-Ma_r} \tag{1.45}$$

又

$$\frac{\partial}{\partial t}[R(1-Ma_r)]=(1-Ma_r)\frac{\partial R}{\partial t}-R\frac{\partial Ma_r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0(\tau)|=-\frac{c_0 Ma_r}{1-Ma_r} \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Ma_r}{\partial t}&=\frac{1}{1-Ma_r}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{x_i-y_i}{R}Ma_i\right]\\&=\frac{x_i-y_i}{R(1-Ma_r)}\frac{\partial Ma_i}{\partial \tau}+Ma_i\frac{-R\frac{\partial y_i}{\partial \tau}-(x_i-y_i)\frac{\partial R}{\partial \tau}}{R^2(1-Ma_r)}\\&=\frac{x_i-y_i}{R(1-Ma_r)}\frac{\partial Ma_i}{\partial \tau}-\frac{c_0(Ma^2-Ma_r^2)}{R(1-Ma_r)}\end{aligned} \tag{1.47}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[R(1-Ma_r)]&=-c_0 Ma_r-\frac{x_i-y_i}{1-Ma_r}\frac{\partial Ma_i}{\partial \tau}+\frac{c_0(Ma^2-Ma_r^2)}{1-Ma_r}\\&=-\frac{x_i-y_i}{(1-Ma_r)}\frac{\partial Ma_i}{\partial t}+c_0\frac{Ma^2-Ma_r^2}{1-Ma_r}\end{aligned} \tag{1.48}$$

将以上这些关系式代入式(1.44)得

$$p'(x,t)=\frac{\rho_0 q_0(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)^2}+\frac{\rho_0 q(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)^3}\left[\frac{x_i-y_i}{R}\frac{\partial Ma_i}{\partial\tau}\right]$$
$$+\frac{c_0\rho_0 q_0(\tau)}{4\pi R^2(1-Ma_r)^3}(Ma_r-Ma^2)$$
$$=\frac{\rho_0}{4\pi R(1-Ma_r)^2}\left[\frac{\partial q_0}{\partial\tau}+\frac{q_0}{1-Ma_r}\left(\frac{x_i-y_i}{R}\frac{\partial Ma_i}{\partial\tau}\right)\right]$$
$$+\frac{c_0\rho_0 q_0(\tau)}{4\pi R^2(1-Ma_r)^3}(Ma_r-Ma^2) \tag{1.49}$$

忽略$(1/R^2)$项，得远场解为

$$p'(x,t)=\frac{\rho_0}{4\pi R(1-Ma_r)^2}\left[\frac{\partial q_0}{\partial\tau}+\frac{q_0}{1-Ma_r}\left(\frac{x_i-y_i}{R}\frac{\partial Ma_i}{\partial\tau}\right)\right] \tag{1.50}$$

近场项为

$$p'(x,t)=\frac{c_0\rho_0 q_0(\tau)}{4\pi R^2(1-Ma_r)^3}(Ma_r-Ma^2) \tag{1.51}$$

由式(1.50)可以看出，即使声源的强度不随时间变化，只要有运动加速度，远声压就不可能为零。

二、任意运动的偶极子源

(1)基本方程

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial\tau^2}-\nabla^2 p'=-\frac{\partial}{\partial x_i}\{f_i(\tau)\delta[x-y(\tau)]\}$$

类似可得

$$p'(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{f_i(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right] \tag{1.52}$$

$$=-\frac{1}{4\pi R(1-Ma_r)}\frac{\partial f_i}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}+\frac{f_i(\tau)}{4\pi R^2(1-Ma_r)^2}\frac{\partial}{\partial x_i}[R(1-Ma_r)]$$

现考虑一函数 $f(x,\tau)$。显然，根据复合函数求导法则有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x,\tau)]=\left[\frac{\partial}{\partial x_i}f(x,\tau)+\frac{\partial f}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right]$$

由此可得以下几个关系式：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x_i}=-\frac{x_i-y_i}{c_0 R(1-Ma_r)} \tag{1.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[R(1-Ma_r)]=\left[\frac{\partial}{\partial x_i}[R(1-Ma_r)]_\tau+\frac{\partial}{\partial\tau}[R(1-Ma_r)]\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right]$$
$$=\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}[R(1-Ma_r)]_\tau-\frac{x_i-y_i}{c_0 R(1-Ma_r)}\frac{\partial}{\partial\tau}[R(1-Ma_r)]\right\} \tag{1.54}$$

上式第一项可写为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[R(1-Ma_r)]_\tau$$

$$=(1-Ma_r)\frac{\partial R}{\partial x_i}-R\frac{\partial Ma_r}{\partial x_i}$$

$$=(1-Ma_r)\frac{x_i-y_i}{R}-R\left[\frac{x_j-y_j}{R}\frac{\partial Ma_j}{\partial x_i}+Ma_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j-y_j}{R}\right)\right]$$

又

$$\frac{\partial Ma_j}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j-y_j}{R}\right)=\frac{R\delta_{ij}-(x_j-y_j)\frac{x_i-y_i}{R}}{R^2}$$

式中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[R(1-Ma_r)]_\tau=(1-Ma_r)\frac{x_i-y_i}{R}-\left[Ma_j\delta_{ij}-Ma_j\frac{(x_j-y_j)}{R}\frac{(x_i-y_i)}{R}\right]$$

$$=(1-Ma_r)\frac{x_i-y_i}{R}-\left[Ma_i-\frac{x_i-y_i}{R}Ma_r\right]$$

$$=-Ma_i+\frac{x_i-y_i}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}[R(1-Ma_r)]=(1-Ma_r)\frac{\partial R}{\partial\tau}-R\frac{\partial Ma_r}{\partial\tau}$$

$$=-c_0Ma_r(1-Ma_r)-R\left[\frac{x_i-y_i}{R}\frac{\partial Ma_i}{\partial\tau}+Ma_i\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{x_i-y_i}{R}\right)\right]$$

$$=-c_0Ma_r(1-Ma_r)$$

$$-R\left[\frac{x_i-y_i}{R}\frac{\partial Ma_i}{\partial\tau}+c_0Ma_i\frac{(-RMa_i)+(x_i-y_i)\frac{(x_j-y_j)}{R}Ma_j}{R^2}\right]$$

$$=-c_0Ma_r(1-Ma_r)-R\left[\frac{x_i-y_i}{R}\frac{\partial Ma_i}{\partial\tau}+\frac{c_0(Ma_r^{\ 2}-Ma^2)}{R}\right]$$

$$=c_0(Ma^2-Ma_r)-(x_i-y_i)\frac{\partial Ma_i}{\partial\tau}$$

因此式(1.54)最后可写成

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[R(1-Ma_r)]$$

$$=-Ma_i+\frac{x_i-y_i}{R}-\frac{x_i-y_i}{c_0R(1-Ma_r)}\left[c_0(Ma^2-Ma_r)-(x_j-y_j)\frac{\partial Ma_j}{\partial\tau}\right]$$

$$=\frac{x_i-y_i}{R}\left(1-\frac{Ma^2-Ma_r}{1-Ma_r}\right)-Ma_i+\frac{x_i-y_i}{c_0}\left(\frac{1}{1-Ma_r}\frac{x_j-y_j}{R}\frac{\partial Ma_j}{\partial\tau}\right)$$

$$=\frac{x_i-y_i}{R}\left(\frac{1-Ma^2}{1-Ma_r}\right)-Ma_i+\frac{x_i-y_i}{c_0}\left(\frac{1}{1-Ma_r}\frac{x_j-y_j}{R}\frac{\partial Ma_j}{\partial\tau}\right)\tag{1.55}$$

将式(1.53)、式(1.55)代入式(1.52)得

$$p(x,t)=\frac{x_i-y_i}{4\pi c_0R^2(1-Ma_r)^2}\left[\frac{\partial f_i}{\partial\tau}+\frac{f_i}{1-Ma_r}\left(\frac{x_j-y_j}{R}\frac{\partial Ma_j}{\partial\tau}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4\pi R^2(1-Ma_r)^2}\left\{\frac{f_i(x_i-y_i)}{R}\left(\frac{1-Ma^2}{1-Ma_r}\right)-f_iMa_i\right\} \tag{1.56}$$

式(1.56)便是任意运动偶极子源产生的声场。

(2)远声场

上式保留第一项,即

$$p'(\boldsymbol{x},t)=\frac{x_i-y_i}{4\pi R^2(1-Ma_r)^2}\left[\frac{\partial f_i}{\partial\tau}+\frac{f_i}{1-Ma_r}\left(\frac{x_j-y_j}{R}\frac{\partial Ma_j}{\partial\tau}\right)\right] \tag{1.57}$$

(3)近声场

$$p'(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi R^2(1-Ma_r)^2}\left[\frac{f_i(x_i-y_i)}{R}\left(\frac{1-Ma^2}{1-Ma_r}\right)-f_iMa_i\right] \tag{1.58}$$

由式(1.56)同样可以看出,只要有运动加速度,稳态力也可产生远声场。

三、任意运动的四极子源

四极子噪声是由应力变化引起,描述四极子声场的一般方程是

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial\tau^2}-\nabla^2 p'=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\{T_{ij}(\tau)\delta[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}(\tau)]\} \tag{1.59}$$

令 $p'=\mathrm{div}\boldsymbol{A}$,则上式变为

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\tau^2}-\nabla^2 A=\frac{\partial}{\partial x_i}\{T_{ij}(\tau)\delta[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}(\tau)]\} \tag{1.60}$$

比较本节中的偶极子源求解结果,类似可得

$$A_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]$$

因此,任意运动的四极子源产生的声压为

$$\begin{aligned}p'&=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]\right\}\end{aligned} \tag{1.61}$$

根据复合函数的求导法则可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]&=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]_\tau+\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]_\tau-\frac{x_j-y_j}{c_0R(1-Ma_r)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]\end{aligned}$$

若忽略上式中的第一项,则可以得辐射到远场的声压为

$$p'(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{x_j-y_j}{c_0R(1-Ma_r)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]\right\}$$

重复上面的步骤可知,由运动四极子产生的远场声压为

$$p'(\boldsymbol{x},t)=\frac{x_i-y_i}{c_0R(1-Ma_r)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{x_j-y_j}{c_0R(1-Ma_r)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{T_{ij}(\tau)}{4\pi R(1-Ma_r)}\right]\right\} \tag{1.62}$$

进一步可将上式化为

$$p'(\boldsymbol{x},t)=\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{4\pi c_0^2R^3(1-Ma_r)^3}\left\{\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial\tau^2}+\frac{3}{1-Ma_r}\frac{\partial T_{ij}}{\partial\tau}\frac{\partial Ma_r}{\partial\tau}\right.$$

$$+\frac{T_{ij}}{1-Ma_r}\frac{\partial^2 Ma_r}{\partial\tau^2}+\frac{3T_{ij}}{(1-Ma_r)^2}(\frac{\partial Ma_r}{\partial\tau})^2\} \tag{1.63}$$

式中

$$\frac{\partial Ma_r}{\partial\tau}=\frac{x_i-y_i}{R}\frac{\partial Ma_i}{\partial\tau}$$

参考文献

1. Goldstein M E. Aeroacoustics, McGraw—Hill Book Company, 1976.
2. Morfey C L. Acoustic Energy in non—uniform Flows J. Sound Vib. 14, 1971. 159～169
3. Myers M K. Transport of Energy by Disturbances in Arbitrary Steady Flow. J. Fluid Mech. 226, 1991. 383～400
4. Lowson M V. The Sound Field for Singularities in Motion. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 231, 1187, 1955. 505～514
5. Ingard K U and Morse P M. Theoretical Acoustics. McGraw—Hill Book Company, 1968.

第二章　气动声学的基本方程

§2.1　引　　言

19 世纪中叶，英国科学家瑞利勋爵发表了集经典声学之大成的不朽名著《声学原理》[1]，该书总结了 19 世纪及前二三百年的大量声学研究成果，开创了现代声学研究的先河。然而，正当现代声学的各个研究分支突飞猛进之际，人们常常会为解释这些问题而感到困惑：夜阑人静之时，为何能听到树叶随风摇曳的沙沙声响？风吹打着电线为何会奏出悦耳的风鸣声？长笛为何会产生如此动听、美妙的音乐？……直到本世纪 50 年代之前，人们对理解这些问题仍显得一筹莫展，因为那时尚未弄清紊流、旋涡以及运动物体的发声机制。也许仅仅提出这些问题尚不足以引起人们研究流体发声机理的兴趣。可是，第二次世界大战结束后，当各国普遍重视发展民航工业的时候，降低航空发动机喷流噪声成了一个迫切需要解决的课题，然而，此时人们才猛然意识到过去对流体发声认识的全部积累还不足以处理这些具有巨大实际意义的问题。1949 年，从曼彻斯特到伦敦的一列火车上，一位年轻的英国科学家神思飞扬，在一只信封的背后急速地写满了密密麻麻的数学公式[2]。三年后，以这只信封背面内容为主题的研究工作发表在英国皇家学会会刊上[3]。直到今天，人们普遍把这项工作当作气动声学诞生的标志，以这位科学家莱特希尔(Lighthill)命名的方程成了研究气动声学的最基本的方程。

从 50 年代莱特希尔在气动声学方面所做的开创性工作到现在，作为一门独立的学科分支，气动声学无论是在理论上或是在实践方面都有了进一步的发展和应用。最初莱特希尔方程的求解是在自由空间假设下得到的，对于在固体边界不起主要作用的地方，如喷气噪声问题，莱特希尔的基本理论是适用的。然而，试验表明，在很多情况下，如湍流中静止物体的发声问题、运动物体的发声问题、固体边界的影响具有决定性的意义。所以，研究流体与固体边界相互作用对声音产生的影响有着重要的实际意义。1955 年，柯尔(Curle)[4]用基尔霍夫方法首先将莱特希尔理论推广到考虑静止固体边界的影响。结果表明，固体边界的作用相当于在整个固体边界上分布偶极子源，且每点偶极子源的强度等于固体表面该点作用在流体上的力的大小。因而，在这种情况下，声场是由四极子源和偶极子源叠加组成的。柯尔理论成功地解决了诸如湍流中静止小物体的风鸣声[5]、圆柱旋涡脱落诱发的噪声[6]等问题。然而，柯尔的理论并未涉及到运动固体边界与流体相互作用的发声问题，而这对于风扇/压气机转子、螺旋桨的噪声预测等实际应用问题具有极其重要的意义。为使问题简化，1965 年洛森(Lowson)[7]研究了自由空间里的一个运动奇点的声场特性。这个奇点可以是集中偶极子源、单极子源或四极子源。后来，洛森的结果被直接用来建立直升机转子[8]、压气机转子/静子干涉的噪声模型[9]。1969 年，福茨 威廉姆(Ffowcs Williams)和霍金斯(Hawkings)[10]应用广义函数法将柯尔[4]的结果扩展到考虑运动固体边界对声音

的影响，即物体在流体中运动的发声问题，得到一个较为普遍的结果——福茨 威廉姆-霍金斯方程(简称FW-H 方程)。从 FW-H 方程可以看出，运动物体与流体相互作用产生的声场是由四极子源、偶极子源以及由于位移所产生的单极子源的叠加组成的。尽管 FW－H 方程显示了重大的理论价值，但在很长一段时间内实际上并未得到广泛的应用。这是因为运动边界具有延迟时间的积分十分困难并且也不便于进行数值解，而作为它的远场解，所得到的结果并未显示出比过去的一些工作[9,11]更有优越性。后来法拉赛(Farassat)[12~15]将 FW-H 方程的积分形式进行十分巧妙的变换，分别得到了适用于亚音速、跨音速情况下的新的积分表达式，并提出了相应的求解方法。法拉赛的求解方法是一种时域方法，他的结果被成功地用于直升机转子、桨扇噪声的远场和近场预测。尤其是对于桨扇的近场解，这个方法显示了极大的优越性。可以说，这是近二十年来关于 FW-H 方程求解的一个最好结果。

无论是柯尔方程或是 FW-H 方程均假定声源传播的介质是静止的，这对于实际应用受到了一定的限制。譬如，轴流压气机产生的声波显然是在运动的介质中传播的，所以应当考虑运动介质对声波传播的影响。1974 年，戈尔茨坦[16]用格林函数方法研究了均匀运动介质下运动物体的发声问题，他所得到普遍结果被称为广义的莱特希尔方程。而柯尔方程、FW-H 方程以及一些其他重要结果[17~19]均是该方程的特殊情形。

本章将首先介绍推导和求解这些方程的数学基础——广义格林函数公式，然后给出莱特希尔方程，紧接着讨论固体边界对流体发声的影响及其 FW-H 方程，最后给出同时考虑运流速度、固体边界影响的广义莱特希尔方程。

§2.2 广义格林函数公式

作为预备知识，我们首先来讨论一类具有延迟时间、包含流速影响的波动方程的求解：

考虑方程

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{D^2 p}{D\tau^2} - \nabla^2 p = \gamma(y,\tau) \tag{2.1}$$

式中

$$\frac{D_0}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}$$

U 为流体介质运流速度。

解这个方程，首先应写出相应的格林函数

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c_0^2}\frac{D_0^2}{D\tau^2}G = -\delta(t-\tau)\delta(x,y) \tag{2.2}$$

引入几个关系式：

(1)高斯定理

$$\int_{S(\tau)} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS(y) = \int_{v(\tau)} \nabla\cdot\boldsymbol{A}dy \tag{2.3}$$

(2)体积分的物质导数