高等数学

Advanced Mathematics

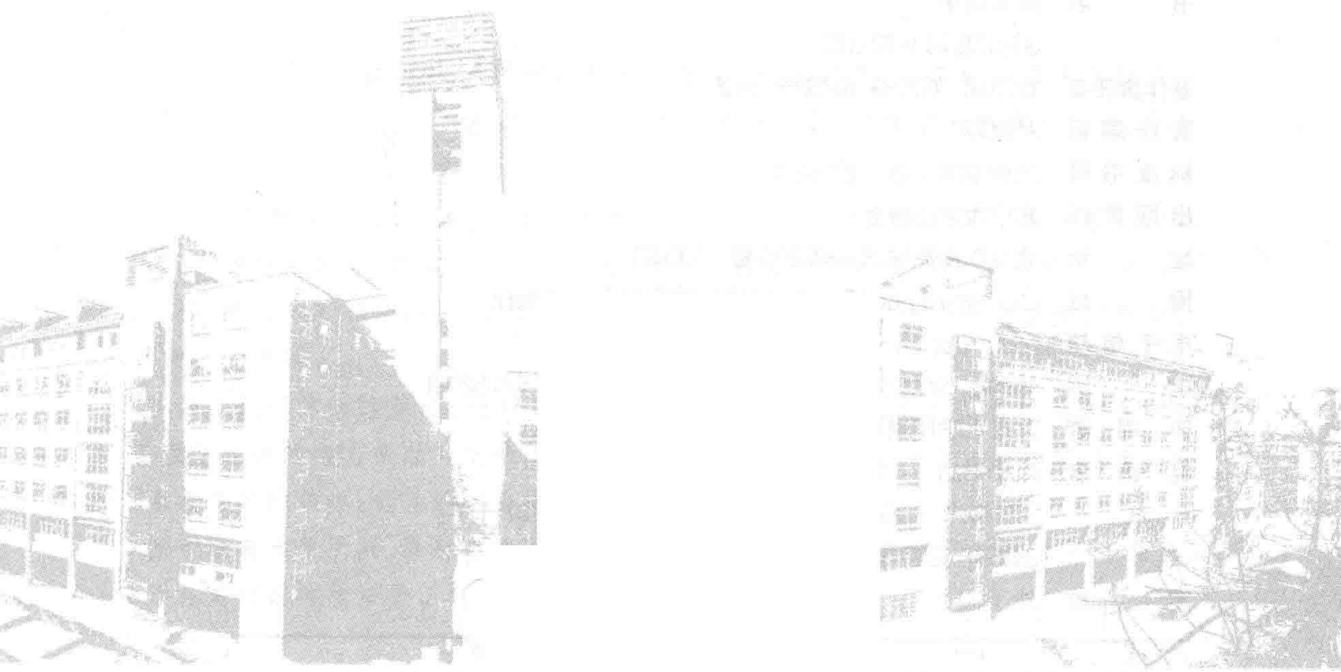
徐望斌　刘云芬　陈敬华　/编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等数学

Advanced Mathematics

徐望斌　刘云芬　陈敬华　/编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 徐望斌，刘云芬，陈敬华编著．—北京：北京大学出版社，2016.12

ISBN 978-7-301-27915-1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①徐… ②刘… ③陈… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 004820 号

书　　名	高等数学 GAODENG SHUXUE
著作责任者	徐望斌 刘云芬 陈敬华 编著
责任编辑	尹照原
标准书号	ISBN 978-7-301-27915-1
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号 100871
网　　址	http://www.pup.cn 新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	787 毫米 × 960 毫米 16 开本 13.75 印张 287 千字 2016 年 12 月第 1 版 2016 年 12 月第 1 次印刷
定　　价	28.00 元

前　　言

高等数学是我国高等院校非数学专业的重要基础课，对学生今后专业课程的学习和科学素养的提升起着奠基与支撑的作用.本教材参照教育部《工科高等数学课程教学基本要求》，按照“注重素质培养、加强实际应用”的指导方针，精心选材，合理安排知识结构，集中体现了三位编者长期讲授工科类高等数学课所积累的丰富教学经验，反映了当前工科数学教学理念和教学内容的改革特点.具体体现在以下几个方面：

1. 精心安排教材内容.本教材在内容的选取上，根据工科学生的实际要求及相关专业课程的特点，汲取了一些相关优秀教材的优点，对传统的教学内容在结构和内容上作了适当的调整，为学生后续课程的学习打下坚实的基础。

2. 注重数学素质的培养.本教材适当降低了对高等数学难度的要求，但更加注重学生对数学概念、数学思想、数学文化的领悟，注重学生的数学思维能力、自学能力和创新意识的培养.

3. 强调基础训练的培养.本教材在编写过程中，结合概念、定理和运算法则配置了丰富的例题.按节配有适量习题，每章也配有全章的练习题，书末附有答案与提示，便于读者参考。

本教材安排了约七十左右学时的内容，适合一个学期的课程。其主要内容分为六章：第一章函数与极限，第二章导数与微分，第三章微分中值定理与导数的应用，第四章不定积分，第五章定积分，第六章微分方程。书末附录中列出了许多不同类型的积分公式，方便读者查阅。

本书在进行本书的策划、统稿和最终定稿的过程中，得到了本书两位编著者刘云芬、陈敬华老师的大力帮助与支持，在此深表感谢！同时对湖北师范大学数学与统计学院以及教务处的领导、老师的大力支持表示衷心感谢！

囿于编者水平所限，教材之中难免存在疏漏与不妥之处，恳请广大读者不吝指正，并期于在重印或改版中予以修正。

徐望斌

2016 年 6 月

目　录

第一章 函数与极限

高等数学的经典部分是微积分.微积分的研究对象是函数，基本运算是极限.我们知道，函数是变量之间的相互依存关系，而极限是变量变化趋势的数学刻画.下面我们将中学数学学习过的函数与极限及其有关的知识进行回顾与拓展.

§1.1 函　数

1.1.1 区间与邻域

区间分为有限区间和无限区间两种.

有限区间有以下几种情形：设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则

开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

半开半闭区间 $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$；

闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

无限区间有以下几种情形：设 $a,b\in\mathbf{R}$，则

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}.$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\},$$

其中$(-\infty,+\infty)$表示的就是全体实数集 $\mathbf{R}$.

注　$-\infty$，$+\infty$分别读作负无穷大、正无穷大，它们不是数，仅仅是记号.

设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，则称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 x_0 的 δ **邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$
$$=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\},$$

其中点 x_0 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**(如图 1-1-1 所示).

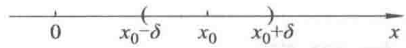


图 1-1-1

以点 a 为中心的任何开区间称为**点 a 的邻域**，记作 $U(a)$.

点 a 的**去心邻域**记作 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$；

点 a 的 δ **右邻域**记作 $U_+(a,\delta)=(a,a+\delta)$；

点 a 的 δ **左邻域**记作 $U_-(a,\delta)=(a-\delta,a)$.

1.1.2 函数的概念与性质

1. 函数的概念

17 世纪的德国数学家莱布尼茨最早使用函数一词来描述变量与变量之间的依赖关系，后经欧拉、柯西等一批数学家对函数概念不断修正、扩充逐步形成现代的函数定义.

一个实际问题：在等温条件下，一定质量的气体，其压强 p 与体积 V 两个变量之间的依赖关系为

$$p=\frac{C}{V},$$

其中 C 为常数. 这就是物理学中的波义耳-马略特定律.

定义 1 设 D,M 为两个非空实数集，如果按照某个确定的对应法则 f，使得对于集合 D 中的任意一个数 x，在集合 M 中都有唯一确定的数 y 与之对应，那么就称 f 为定义在集合 D 上的一个**函数**，记作

$$\begin{aligned} f:D&\to M,\\ x&\mapsto y. \end{aligned}\tag{1-1-1}$$

数集 D 称为函数 f 的**定义域**，记为 D_f；x 所对应的数 y，称为函数 f 在点 x 的**函数值**，常常记为 $f(x)$；函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{f(x)\,|\,x\in D\}.$$

(1-1-1)式中“$D\to M$”表示数集 D 到 M 对应关系；“$x\mapsto y$”表示此两数集中元素之间的对应关系. 习惯称此函数关系中的 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

几点说明：

(1) 函数定义中的值域随定义域和对应法则的确定而确定，于是确定函数有两个基本要素，即定义域和对应法则. 所以，函数也常表示为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

因此两个函数是否相同，就看它们的定义域和对应法则是否一样.

(2) 函数的表示法有公式法（解析法）、列表法、图像法等. 我们用得最多的是公式法，即

用数学运算式表示函数，此时函数的定义域是使该运算式有意义的自变量的取值范围，因而函数可简单表示为

$$y=f(x)\text{ 或 }f.$$

(3) 函数 f 实质上是 x 轴上的点集 D 到 y 轴上的点集 M 之间的映射，对于 $a\in D$，$f(a)$称为映射 f 下 a 的**像**，a 称为 $f(a)$的**原像**.

有时一个函数在其定义域的不同子集上要用不同的表达式来表示对应法则，称这种函数为**分段函数**. 下面给出一些今后常用的分段函数.

例 1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=[0,+\infty)$，如图 1-1-2 所示.

例 2 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$，如图 1-1-3 所示.

例 3 最大取整函数 $y=[x]$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如，$[-0.2]=-1$，$[0]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\mathrm{e}]=2$ 等. 函数 $y=[x]$的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{$整数$\}$. 一般地，$y=[x]=n$，$n\leqslant x<n+1$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，如图 1-1-4 所示.

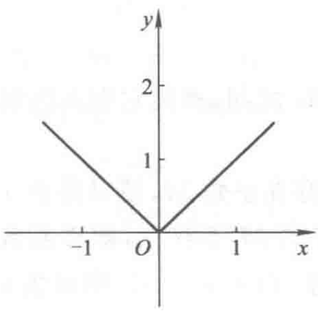


图 1-1-2

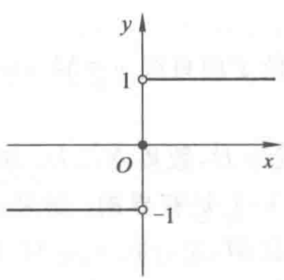


图 1-1-3

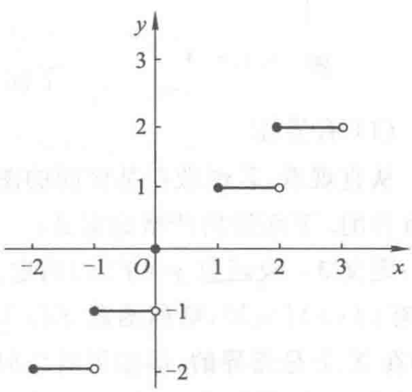


图 1-1-4

2. 反函数

函数 $y=f(x)$的自变量 x 与因变量 y 的关系往往是相对的，有时也要研究 x 随 y 变

化的状况，由此引出反函数的概念.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 若对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y，D 中有且仅有一个值 x，使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数. 我们称此函数为 f 的**反函数**，记为

$$f^{-1}:f(D)\to D,$$
$$y\mapsto x$$

或
$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D). \tag{1-1-2}$$

注 1 从定义 2 可知，只有一一对应的映射确定的函数 f 才有反函数. 我们称 f^{-1} 为映射 f 的逆映射，它把集合 $f(D)$ 映射到集合 D，即把 $f(D)$ 中的每一个值 $f(a)$ 对应到 D 中唯一的一个值 a. 此时称 a 为逆映射 f^{-1} 下 $f(a)$ 的像，而 $f(a)$ 则是 a 在逆映射 f^{-1} 下的原像.

从以上讨论可知，f 与 f^{-1} 互为反函数. 相对于反函数 f^{-1}，称函数 f 为**直接函数**.

注 2 函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$，可改为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in f(D). \tag{1-1-3}$$

例 4 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的反函数. 其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，如图 1-1-5 所示.

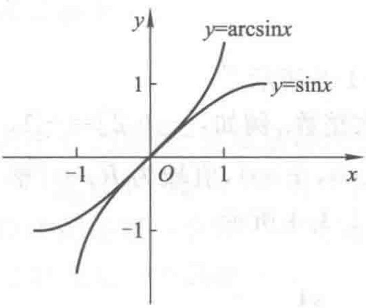


图 1-1-5

关于其他反三角函数详见附录 1.

3. 函数的性质

函数的性质主要有单调性、奇偶性、有界性和周期性等. 下面主要讲述有界性和周期性.

(1) 有界性

从直观看，若函数在某区间的图形位于两直线 $y=M_1$，$y=M_2$ 之间，则说它在该区间上是有界的. 下面给出严格的定义：

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使对任意 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是**有界的**. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是**无界的**，即如果对任何正数 M，总存在 $x_0\in M$，使得 $|f(x_0)|>M$，则函数 $y=f(x)$ 在 X 上是无界的.

如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上是无界的. 这是因为，对于任一 $M>1$，总有 x_0：$0<x_0<\dfrac{1}{M}<1$，使得

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}>M.$$

但此函数在(1,2)上却是有界的，这说明函数的有界性与自变量的范围有关.

(2) 周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对任一 $x\in D$，有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$的**周期**.

从定义可知周期函数的周期不唯一. 通常我们说的周期指的是最小正周期.

周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每个长度为 T 的区间上，函数的图形有相同的形状，例如余弦函数 $y=\sin x$ 的图像. 但有的函数却没有最小正周期，如 Dirichlet 函数

$$\mathrm{D}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^c.\end{cases}$$

可以看出它是一个周期函数，且任何正有理数都是其周期，当然就没有最小正周期.

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

在中学我们已学过以下几类函数：

常数函数：$y=c$；

幂函数：$y=x^\mu$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数)；

指数函数：$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)；

对数函数：$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$；特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$)；

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

我们把以上函数统称为**基本初等函数**.

2. 复合函数

我们经常遇到如下类型的函数：

$$y=\sqrt{1+x^2}.$$

它实际上是由两个函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1+x^2$ 构成的，即由它们复合起来的函数. 下面给出这种函数的严格定义：

定义 4 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$在 D 上有定义，且 $g(D)\subseteq D_f$，则由下式确定的函数：

$$y=f(g(x)),$$

我们称之为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 构成的**复合函数**,记作

$$y=f(g(x)),\quad x\in D,$$

它的定义域为 D,变量 u 称为**中间变量**.

两个函数的复合也可推广到多个函数复合的情形:

例如,$y=\sqrt{\cos x^2}$ 可看成由 $y=\sqrt{u}$,$u=\cos v$,$v=x^2$ 复合而成.

形如 $y=u(x)^{v(x)}=a^{v(x)\log_a u(x)}$($u(x)>0$,$a>0$ 且 $a\neq1$)的函数称为**幂指函数**,它可看成由 $y=a^w$ 与 $w=v(x)\log_a u(x)$ 复合而成.

例 5 设 $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}(x\neq-2)$,求 $f(f(f(x)))$.

解 令 $y=f(w)$,$w=f(u)$,$u=f(x)$,则 $f(f(f(x)))$ 是通过两个中间变量 w 和 u 复合而成的复合函数. 因为

$$w=f(u)=\frac{2u}{u+2}=\frac{2\dfrac{2x}{x+2}}{\dfrac{2x}{x+2}+2}=\frac{4x}{2x+2(x+2)}=\frac{x}{x+1},$$

$$y=f(w)=\frac{2w}{w+2}=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1},$$

所以 $f(f(f(x)))=\dfrac{x}{2x+1}\left(x\neq-2,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的并且能用一个式子表示的函数,我们称之为**初等函数**.

按照定义域的不同子集用不同表达式来表示对应关系的分段函数,有些也可以不分段而表示出来,分段只是为了更加明确函数关系而已. 例如,绝对值函数也可以表示成 $y=|x|=\sqrt{x^2}$. 这个函数也是初等函数.

1.1.4 函数应用举例

下面通过几个具体的问题,说明如何建立函数关系式.

例 6 某火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 20 千克时,按基本运费每千克 1 元计算;当超过 20 千克时,超重部分按每千克 2 元收费. 试确定行李费 y(单位:元)与重量 x(单位:千克)之间的函数关系式,并画出函数的图像.

解 当 $0<x\leqslant 20$ 时，$y=x$；

当 $x>20$ 时，$y=1\times 20+2(x-20)$.

所以函数关系式为

$$y=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 20, \\ 20+2(x-20), & x>20. \end{cases}$$

这是一个分段函数，其图像如图 1-1-6 所示.

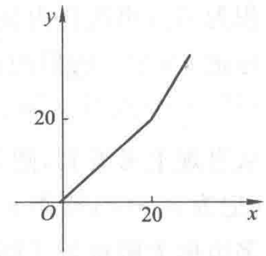


图 1-1-6

习 题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y=\ln(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$.

2. 下列函数是否相等，为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$.

3. 证明下列函数在定义域上的有界性：

(1) $y=1-\sin x+7\cos 3x$；　　(2) $y=\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$；

(3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；　　(4) $y=\begin{cases} 2^x, & -\infty<x\leqslant 0, \\ 2^{-x}, & 0<x<+\infty. \end{cases}$

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=x^2-2x$；　　(2) $y=2\sin 3x \left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin^2(1+5x)$；　　(2) $y=\arctan e^{-\sqrt{1+x^2}}$.

§ 1.2 数列的极限

1.2.1 数列极限的概念

我国魏晋时期数学家刘徽创立了“割圆术”，其叙述为：“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣.”具体做法如下：

设有一圆，首先作内接正六边形，记它的面积为 A_1；其次作内接正十二边形，记它的面

积为 A_2；再次作内接正二十四边形，记它的面积 A_3；如此下去，每次边数翻倍，一般地，记内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积为 A_n. 这样就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots.$$

从直观上可看到，随着 n 的增大，用 A_n 近似代替圆的面积，误差越来越小. 设想 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，在这个过程中，内接正多边形无限接近于圆，同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值，这个确定的数值就可看着圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面有次序的数（数列）$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

1. 数列的概念

如果按照某一法则，使得对任意一个正整数 n 都有一个确定的数 x_n 与之对应，则得到一列有次序的数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots.$$

这一列有次序的数就叫作一个**数列**，记为 $\{x_n\}$，其中第 n 项 x_n 叫作数列的**一般项**.

数列的例子很多，如：

$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}:2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{n+1}{n}\cdots,\quad$ 一般项：$\dfrac{n+1}{n}$；

$\{3^n\}:3,9,27,\cdots,3^n,\cdots,\quad$ 一般项：3^n；

$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}:\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots,\quad$ 一般项：$\dfrac{1}{2^n}$；

$\{(-1)^{n+1}\}:1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots,\quad$ 一般项：$(-1)^{n+1}$；

$\left\{\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n}\right\}:2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n},\cdots,\quad$ 一般项：$\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n}$.

可以看出数列 $\{x_n\}$ 是自变量为正整数 n 的函数，即 $x_n=f(n)$，它的定义域是全体正整数.

请读者在数轴上描点观察上述 5 个数列的变化趋势.

2. 数列的极限

定义 1 对于数列 $\{x_n\}$，如果存在某一确定的常数 a，当 n 无限增大时，数列的一般项 $\{x_n\}$ 无限地接近于常数 a，则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛于** a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 如果数列没有极限，则称数列是**发散的**.

在中学数学中，我们已知道数列极限的这个描述性定义. 我们用观察法可以判断上面给出数列中收敛的有 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$，$\left\{\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n}\right\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}=1.$$

而$\{3^n\}$,$\{(-1)^{n+1}\}$是发散的,并且发散的方式不同.但什么叫作“x_n 无限地接近于 a”呢?下面以数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$为例进行分析:

当 n 无限增大时,x_n 无限接近于 a

$\overset{1}{\Leftrightarrow}$当 n 无限增大时,x_n 和 a 在数轴上对应点的距离无限接近于 0

$\overset{2}{\Leftrightarrow}$当 n 无限增大时,$|x_n-a|$可以任意小,要多小就能有多小

$\overset{3}{\Leftrightarrow}$当 n 增大到一定程度以后,$|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数 ε

$\overset{4}{\Leftrightarrow}$对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}^+$,当 $n>N$ 时,有$|x_n-a|<\varepsilon$.

要承认 x_n 无限接近于 a,就要拿出一个接近的标准:很小很小的正数 ε.正数 ε 一经确定,我们就可找到 $N\in\mathbf{N}^+$,使得$\{x_n\}$中 x_N 项后边的所有项和 a 在数轴上对应点的距离都小于指定的距离正数 ε.

因为

$$|x_n-1|=\frac{1}{n},$$

若给定 $\varepsilon=\frac{1}{100}$,只要取 $N=100$,则当 $n>N$ 时,$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$;

若给定 $\varepsilon=\frac{1}{10000}$,只要取 $N=10000$,则当 $n>N$ 时,$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10000}$;

……

由此可见,不论读者给定的正数 ε 多么小,要使$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$,只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$即可.

定义 1′ 对于数列$\{x_n\}$,如果存在某一确定的常数 a,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立,则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的**极限**,或者称数列$\{x_n\}$**收敛**于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a\ (n\to\infty).$$

如果数列没有极限,就说数列是**发散的**.

关于“数列$\{x_n\}$的极限为 a”可直观描述如下:

对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在 N,当 $n>N$ 时,所有的点 x_n 都落在开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内,而只有有限个点(至多只有 N 个点)在这区间以外(如图 1-2-1 所示).

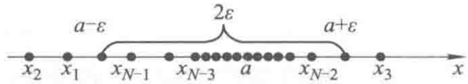


图 1-2-1

数列极限定义 1′的简要表述式（“ε-N”语言）：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \text{对于}\ \forall \varepsilon>0, \exists N\in \mathbf{N}^+, \text{当}\ n>N\ \text{时，有}\ |x_n-a|<\varepsilon,$$

其中符号“∀”表示“任意的”“所有的”或“每一个”；符号“∃”表示“存在”.

例 1 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$.

证 因为 $|x_n-a|=\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$，对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-1|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

所以，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，$n\geqslant N+1=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$，都有

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1.$$

例 2 设 $|q|<1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证 对于 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|x_n-0|=|q^n-0|=|q^n|<\varepsilon,$$

只要 $n>\log_{|q|}\varepsilon$，取 $N=[\log_{|q|}\varepsilon]$.

所以对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=[\log_{|q|}\varepsilon]$，当 $n>N$ 时，有

$$|q^n-0|=|q^n|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

从以上例子看到，证明数列极限的过程就是任给的 ε 找相应 N 的过程，只要找到适当的 N 即可，显然 N 不唯一.

1.2.2 收敛数列的性质

定理 1（唯一性） 收敛数列的极限是唯一的.

证 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，且 $a<b$. 取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$，按极限的定义，对于此 ε，存在充分大的正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有