变分法

Л. Э. 艾利斯哥尔兹著

高等教育出版社

变　分　法

Л. Э. 艾利斯哥尔兹著
李世晋譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国立科学技术理論書籍出版社出版的艾利斯哥尔兹(Л. Э. Эльсгольц)著的"变分法"(Вариационное исчисление) 1952年版譯出的,原書是"工程师物理数学从書"之一。

本書譯者是东北工学院李世晋同志。

变　　分　　法

Л. Э. 艾利斯哥尔兹著

李世晋譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

上海奎記印刷厂印刷　新华書店發行

統一書号13010·410 开本850×1168 1/32 印張4 11/16 字数111,000 印数1,001—2,000

1956年12月商務初版(共印12,(00)

1958年1月新1版 1958年7月上海第2次印刷 定价(7)¥0.48

目　次

序

由于变分法在力学和技術的各領域内有廣泛的应用，变分法基礎知識遂为多种專業的工程师們所必需。

本書的目的就是想使工程师們和高等工業学校的研究生們能够熟悉变分法的基本概念和方法，其中包括解变分問題时最为重要的直接法。

本書的每一節里都有相当数量的問題來做例解，其中一部分問題系从晚近出版的教学文献中选出。讀者們如想对变分法做進一步的鑽研，書末所列的文献可供参考。

著者在此应向 В.И.Левин 教授，Ю.Л.Рабинович 副教授和本叢書編輯 Л.А.Чудов 表示感謝，他們的很多宝貴意見，使本書原稿改進很大。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

引 論

在工程实踐上，除了需要确定某一函数 $z=f(x)$ 的極大值和極小值的問題以外，还常常有必要去求一类特殊的量——所謂泛函——的極大值和極小值。凡变量的值是由一个或几个函数的选取而确定者，这个变量就叫做泛函。

例如，連結所給兩点的曲綫弧的長 l 是一个泛函，因为这个量是由函数 $y=y(x)$［它的圖形（圖 1）通过这兩个所給点］的选取來确定的。

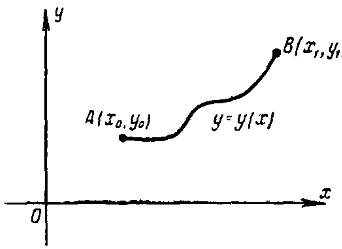

圖 1.

当曲綫的方程 $y=y(x)$ 已經給出时，l 这个量是可以算得出的；此时

$$l[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx。$$

曲面的面積 S 是一个泛函，因为 S 是由曲面的选取來确定的，也就是，由曲面方程 $z=z(x,y)$ 的函数 $z(x,y)$ 的选取來确定的。我們知道

$$S[z(x,y)]=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

式中的 D 表示曲面在平面 Oxy 上的投影。

勻質的曲綫或曲面关于点，关于軸或关于平面的慣性矩也是泛函，因为它們的值是由曲綫或曲面的选取來确定的，也就是，由曲綫或曲面方程中的函数的选取來确定的。具有等加速度的物体

在某一介質中运动时，其所受的阻力也是泛函，因为 p 这个量是由动体表面的形狀的选取來确定的，也就是，由动体表面方程中的函数的选取來确定的。在所有这些例子中，都有泛函所特具的这样的依从关系，就是：数对应于函数，这正好像，在給定函数 $y=f(x)$ 时有数 y 对应于数 x 一样。

变分法研究求泛函的極大值和極小值的方法。凡有关求泛函的極大值和極小值的問題都叫做变分問題。

变分法于 1696 年开始發展，由于**彼得堡**科学院院士 **Л. 尤拉**的奠基性的工作，使得它成为数学中一門独立而又別具研究方法的科目。有充分的理由可以認为他是变分法的創始人。

对于变分法的發展有鉅大影响的是下面三个問題：

最速降綫問題

1696 年**約翰、伯努利**公佈了一封信，在信里他吁請数学家注意一个所謂最快斜坡——最速降綫——的問題。問題是要确定一条曲綫，連結不在同一的鉛直綫上的所給二点 A 和 B，使它具有这样的性質：当質点沿着这条綫由 A 滑至 B 时所需时間为最少(圖 2)。

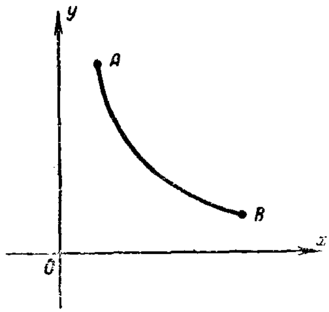

圖 2.

易見，最快斜坡决不是連結 A，B 两点的直綫段，尽管这条直綫在 A 和 B 間的距离是最短；因为沿直綫运动时，运动速度的增長是比較慢的。如果我們取一条由 A 起下降得較为陡峻的曲綫时，則虽然路徑是加長了，但在路徑相当大的一部分中，質点將要以更大的速度通过。最速降綫問題的解是由**伯努利**兄弟，**牛頓**，**罗比达**等人得出的。結果知道，最速降綫就是圓滚綫(見 30 頁)。

短程綫問題

求曲面 $\varphi(x,y,z)=0$（圖 3）上所給二点間長度最短的曲綫。这个最短曲綫叫做短程綫。这是一个典型的变分問題，就是所謂約束極値或条件極値問題。問題中要去求的是泛函

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

的極小值，其中 $y(x)$ 和 $z(x)$ 兩个函数应当適合 $\varphi(x,y,z)=0$ 这个条件。

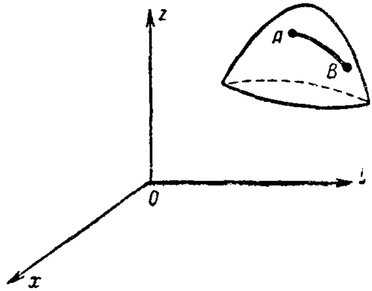

圖 3.

这个問題已經在 1697 年为**約翰、伯努利**所解决，但是这一类問題的一般解法直到后來才在 Л. **尤拉**和**拉格朗奇**的著作里面見到。

等周問題

求長为一定的封閉綫 l，使其所圍的面積 S 为極大。远在希臘古时，人們已經知道这个曲綫是一个圓周，在这个問題中要去求的是泛函 S 在其独具的附加条件下的極値。这个附加条件就是曲綫的長应为常数，也就是，泛函

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

保持为定值。这种类型的条件叫做等周条件。等周条件变分問題的一般解法是 Л. **尤拉**研究出來的。

下面就來敍述解决各类变分問題的方法。

第一章　在不动边界問題中的变分方法

§1. 变分及其特性

变分問題是研究泛函的極大值和極小值的問題，它的解法非常类似于函数的極大值和極小值的方法。因此，我們不妨在这里簡短地重提一下函数的極大值和極小值的理論，同时一併引述泛函方面的类似概念，并証明泛函方面的类似定理。

1. 如果对于变量 x 的某一变域中的每一 x 值，z 有一值与之对应，也就是，如果数 z 对应于数 x 的关系成立；那么，变量 z 叫做变量 x 的函数，記为 $z=f(x)$。

2. 所謂函数 $f(x)$ 的宗量 x 的增量 Δx 是指这个变量的二值間的差 $\Delta x=x-x_1$。如果 x 是自变量，則 x 的微分就是它的增量，即 $dx=\Delta x$。

3. 如果对于 x 的微小改变，有函数 $f(x)$ 的微小改变跟它相对应，就說函数 $f(x)$ 是連續的。

1. 如果对于某一类函数 $y(x)$ 中的每一个函数 $y(x)$，v 有一值与之对应，也就是，如果数 v 对应于函数 $y(x)$ 的关系成立；那么，变量 v 叫做依賴于函数 $y(x)$ 的泛函，記为 $v=v[y(x)]$。

2. 所謂泛函 $v[y(x)]$ 的宗量 $y(x)$ 的增量或变分 δy 是指兩个函数間的差 $\delta y=y(x)-y_1(x)$。此处假定，$y(x)$ 是在某一函数类中任意改变着的。

3. 如果对于 $y(x)$ 的微小改变，有泛函 $v[y(x)]$ 的微小改变跟它对应，就說泛函 $v[y(x)]$ 是連續的。

上面的定义有加以精審和說明的必要，因为現在產生这样一个問題，泛函的宗量 $y(x)$，要怎样改变才能算是很微小的呢？也就是要問，曲綫 $y=y(x)$ 和 $y=y_1(x)$ 要怎样才能算是相差很小或很接近呢？

$y(x)$ 和 $y_1(x)$ 在下面的情况下，可以算是很接近的：卽对于使函数 $y(x)$ 和 $y_1(x)$ 有定义的一切 x 值，$y(x)$ 和 $y_1(x)$ 之差的模要很小，也就是，如果曲綫的縱坐标間很接近，曲綫就算是接近的。但是在很多問題中，如果把曲綫的接近考慮成下面那样的情况，則要更为自然，就是：不僅是在縱坐标之間要接近，而且在对应点处的切綫的方向之間也要接近。也就是，对于算作相接近的曲綫來說，不僅要求差 $y(x)-y_1(x)$ 的模很小，而且同时还要求差 $y'(x)-y_1'(x)$ 的模也很小。

有时，我們必須要求能使下列每一个差：

$$y(x)-y_1(x),\quad y'(x)-y_1'(x),$$
$$y''(x)-y_1''(x),\cdots,\quad y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$$

的模都很小的那种函数 $y(x)$ 和 $y_1(x)$ 才算是互相接近的。因此，关于曲綫 $y=y(x)$ 和 $y=y_1(x)$ 的接近程度，我們必須引述下列定义：

当 $y=y(x)$ 和 $y=y_1(x)$ 之差的模很小时，曲綫 $y=y(x)$ 和 $y=y_1(x)$ 有零階的接近度。

当 $y(x)-y_1(x)$ 和 $y'(x)-y_1'(x)$ 兩个差的模都很小时，曲綫 $y=y(x)$ 和 $y=y_1(x)$ 有一階的接近度。

当

$$\begin{gathered}y(x)-y_1(x),\\ y'(x)-y_1'(x),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)\end{gathered}$$

諸差的模都很小时，曲綫 $y=y(x)$ 和 $y=y_1(x)$ 有 k 階的接近度。

在圖 4 里所画的二曲綫就是有零階接近度的，但沒有一階接近度，因为它們的縱坐标虽很接近，可是切綫的方向并不接近。在圖 5 里所画的二曲綫有一階接近度。由这些定义可知，如果二曲綫有 k 階接近度，那么它們更將具有任何較低階的接近度。

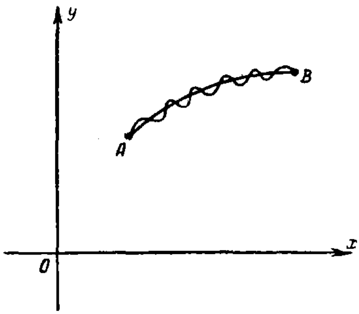

圖 4.

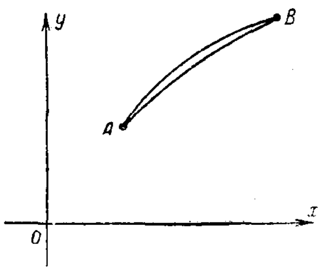

圖 5.

現在我們可以把泛函的連續性的概念弄得較为精确一些了。

$3'$. 如果对于一个任給的正数 ε，可以找到这样的 δ，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，能使 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。就說函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是連續的。

这里，x 当然只取使函数 $f(x)$ 有意义的那些值。

$3'$. 如果对于一个任給的正数 ε，可以找到这样的 δ，当

$$|y(x)-y_0(x)|<\delta,$$
$$|y'(x)-y_0'(x)|<\delta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\delta$$

时，能使 $|v[y(x)]-v[y_0(x)]|<\varepsilon$。就說泛函 $v[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 处是 k 階接近的連續泛函。

这里，函数 $y(x)$ 当然是由使泛函 $v[y(x)]$ 有意义的函数类中选取出來的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

4. 函数 $l(x)$ 在它滿足条件:

$$l(cx)=cl(x),$$

其中 c 是任意常数，以及

$$l(x_1+x_2)=l(x_1)+l(x_2)$$

时，称为綫性函数。含有一个自变量的綫性函数是

$$l(x)=kx$$

的形式，而 k 是常数。

4. 泛函 $L[y(x)]$ 在它滿足条件:

$$L[cy(x)]=c\,L[y(x)],$$

其中 c 是任意常数，以及

$$L[y_1(x)+y_2(x)]=$$
$$=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]$$

时，称为綫性泛函。

$$L[y(x)]=$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}(p(x)y+q(x)y')dx$$

是綫性泛函的例。

5. 如果函数的增量

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$$

可以表为下形

$$\Delta f=A(x)\Delta x+\beta(x,\Delta x)\cdot\Delta x,$$

此处 $A(x)$ 不依賴于 Δx，而当 $\Delta x\to 0$ 时 $\beta(x,\Delta x)\to 0$，則說函数是可微的，向增量中跟 Δx 有綫性关系的那一部分，即 $A(x)\Delta x$，叫做函数的微分，記为 df，用 Δx 除 Δf 并令 $\Delta x\to 0$ 取極限，就得 $A(x)=f'(x)$，因而

$$df=f'(x)\Delta x。$$

5. 如果泛函的增量

$$\Delta v=v[y(x)+\delta y]-v[y(x)]$$

可以表为下形

$$\Delta v=L[y(x),\delta y]+$$
$$+\beta(y(x),\delta y)\cdot\max|\delta y|,$$

此处的 $L[y(x),\delta y]$ 对于 δy 來說是綫性泛函，$\max|\delta y|$ 表 $|\delta y|$ 的最大值，且当 $\max|\delta y|\to 0$ 时 $\beta(y(x),\delta y)\to 0$，而在泛函的增量中对于 δy 來說是綫性的那一部分，即 $L[y(x),\delta y]$，叫做泛函的变分，記为 δv。

这样，泛函的变分就是泛函的增量的主部，并且这个主部对于 δy 來說是綫性的。

变分在泛函的研究中所起的作用，有如微分在函数的研究中一样。对于函数的微分和泛函的变分，也可以給出另外一个几乎完全相当的定义。

我們來考慮当 x 和 Δx 固定向参数 α 之值改变时的 $f(x+\alpha\Delta x)$ 的数值。当 $\alpha=1$ 时我們得到增加后的函数值 $f(x+\Delta x)$，而当 $\alpha=0$ 时，得到的是函数的初值 $f(x)$。不难驗証，$f(x+\alpha\Delta x)$ 对 α 的導函数在 $\alpha=0$ 时就等于函数 $f(x)$ 在点 x 处的微分。事实上，由复合函数的微分法則，我們有

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0}=f'(x+\alpha\Delta x)\Delta x\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=f'(x)\Delta x=df(x)。$$

对于多变量的函数

$$z=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

來說，也可用同样的办法來处理，即对 α 求 $f(x_1+\alpha\Delta x_1,x_2+\alpha\Delta x_2,\cdots,x_n+\alpha\Delta x_n)$ 的導函数，然后令 $\alpha=0$，而得到函数的微分。事实上，我們有

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x_1+\alpha\Delta x_1,\ x_2+\alpha\Delta x_2,\ \cdots,\ x_n+\alpha\Delta x_n)\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i=df。$$

对于像 $v[y(x)]$ 这样或形式較为复雜的泛函，也可以把变分定义为泛函 $v[y(x)+\alpha\delta y]$ 对 α 的導函数在 $\alpha=0$ 时之值。事实上，如果把泛函的变分了解为增量中的綫性主部，則它的增量具有形式：

$$\Delta v=v[y(x)+\alpha\delta y]-v[y(x)]=$$

$$=L(y,\alpha\delta y)+\beta(y,\alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y|。$$

$v[y+\alpha\delta y]$ 对 α 的導函数于 $\alpha=0$ 时之值等于

$$\lim_{\Delta\alpha\to0}\frac{\Delta v}{\Delta\alpha}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\Delta v}{\alpha}=\lim_{\alpha\to0}\frac{L(y,\alpha\delta y)+\beta[y(x),\alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to0}\frac{L(y,\alpha\delta y)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=$$
$$=L(y,\delta y),$$

这是因为由綫性关系有

$$L(y,\alpha\delta y)=\alpha L(y,\delta y),$$

而

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=\lim_{\alpha\to0}\beta[y(x),\alpha\delta y]\max|\delta y|=0,$$

則是因为：当 $\alpha\to0$ 时 $\beta[y(x),\alpha\delta y]\to0$ 的緣故。因之，如果作为泛函增量中綫性主部的那个变分存在的話，那么，另一种意义下的变分，即参数等于初值时的泛函对参数的導函数也必定存在，于是这两个定义就成为同一的了：

6. 函数 $f(x)$ 的微分等于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0}。$$

6. 泛函 $v[y(x)]$ 的变分等于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}v[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}。$$

定义 如果泛函 $v[y(x)]$ 在任何一条与 $y=y_0(x)$ 接近的曲綫上的值不大于 $v[y_0(x)]$，也就是，如果 $\Delta v=v[y(x)]-v[y_0(x)]\leqslant0$ 时，則說泛函 $v[y(x)]$ 在曲綫 $y=y_0(x)$ 上达到極大值。如果 $\Delta v\leqslant0$，而只在 $y=y_0(x)$ 时才有 $\Delta v=0$，則說泛函在曲綫 $y=y_0(x)$ 上达到嚴格的極大值。仿此，可以定义在其上达到極小值的曲綫 $y=y_0(x)$。此时，在接近于曲綫 $y=y_0(x)$ 的所有曲綫上都有 $\Delta v\geqslant0$。

7. **定理** 如果可微函数 $f(x)$ 在內点 $x=x_0$ 达到極大(小)值，則在这点处有

$$df=0。$$

7. **定理** 如果具有变分的泛函 $v[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 上达到極大(小)值，則在 $y=y_0(x)$ 上有

$$\delta v=0。$$

泛函部分定理的証明 当 $y_0(x)$和 δy 固定时，$v[y_0(x)+\alpha\delta y]=$ $=\varphi(\alpha)$是 α 的函数，由假定，当 $\alpha=0$ 时，这个函数达到極大(小)值，因而，導函数

$$\varphi'(0)=0^{①} \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}v[y_0(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}=0,$$

卽 $\delta v=0$。于是在泛函有極值的曲綫上，它的变分等于零。

泛函的極值的概念有嚴格闡明的必要。凡說到泛函的極大(小)值时[精确地說，应該是相对極大(小)值]，只是就互相接近的許多曲綫來考察一个最大(小)的泛函值而已。但前面曾說过，对于曲綫的接近度可以有各种的理解，因此，在極大(小)值的定义里面，还需指明是哪一階的接近度。

如果对于使差 $|y(x)-y_0(x)|$ 的模为非常小的一切曲綫而言，也就是，如果对于与 $y=y_0(x)$ 的接近度为零階的一切曲綫而言，泛函在曲綫 $y=y_0(x)$ 上达到極大(小)值，那么，就把这种極大(小)值叫做強極大(小)值。

如果只对于与 $y=y_0(x)$ 有一階接近度的曲綫 $y=y(x)$ 而言，也就是，如果只对于那些不僅在縱坐标間而且在切綫的方向間都接近的曲綫而言，泛函 $v[y(x)]$ 在曲綫 $y=y_0(x)$ 上始能达到其極大(小)值，那么就說它有弱極大(小)值。

顯然，如果在曲綫 $y=y_0(x)$ 上有強極大(小)值，那么不待說，在該曲綫上也会有弱極大(小)值，因为，如果曲綫与 $y=y_0(x)$ 有一階接近度，則它与 $y=y_0(x)$ 也有零階接近度。然而可能在曲綫 $y=y_0(x)$ 上有弱極大(小)值，而却沒有強極大(小)值的情况，也就是，与 $y=y_0(x)$ 既在縱坐标上又在切綫方向上都接近的那些曲綫 $y=y(x)$ 之中，可能沒有这种曲綫使得 $v[y(x)]<v[y_0(x)]$ (在極小值的情况，$v[y(x)]>v[y_0(x)]$)，而在那些与 $y=y_0(x)$ 只在縱

① 假定在 $\alpha=0$ 点的鄰域内，α 可以取任何值——正值負值均可。

坐标間接近而不一定在切綫方向上接近的曲綫 $y=y(x)$ 中，則可能找得出这样的曲綫使 $v[y(x)]<v[y_0(x)]$（在極小値的情況，$v[y(x)]>v[y_0(x)]$）。強極値和弱極値的区别在推導極値的基本必要条件时作用不大，但在第二章里研究極値的充分条件时，这种区别却十分重要。

还要注意一件事，就是当在曲綫 $y=y_0(x)$ 上有極値时，則不僅 $\frac{\partial}{\partial\alpha}v[y_0(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}=0$，同时还有 $\frac{\partial}{\partial\alpha}v[y(x,\alpha)]\Big|_{\alpha=0}=0$，此处 $y(x,\alpha)$ 是能确定泛函的任意一族容許曲綫，当 $\alpha=0$ 与 $\alpha=1$ 时，这个函数 $y(x,\alpha)$ 应該分别变成 $y_0(x)$ 与 $y_0(x)+\delta y$。事实上，$v[y(x,\alpha)]$ 是 α 的函数，因为給出 α 的値就确定了族 $y=y(x,\alpha)$ 中的曲綫，也就是，确定了泛函 $v[y(x,\alpha)]$ 的値。

由假定，在 $\alpha=0$ 时，这个函数有極値，因此，在 $\alpha=0$ 时① 这个函数的導函数等于零。

于是，$\frac{\partial}{\partial\alpha}\{v[y(x,\alpha)]\}\Big|_{\alpha=0}=0$，但是，一般說來，这个導函数不完全和泛函的变分一致。不过，像前面所說那样，在使泛函取極値的曲綫上，它將与 δv 同时等于零。

本節中的基本定义和定理 1，無需做何种变更，就可以用在依賴于多个未知函数的泛函

$$v[y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x)]$$

上面，也可以用在依賴于多变量的一个或多个函数的泛函

$$v[z(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)],$$

$$v[z_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ z_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),$$

$$\cdots,\ z_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)]$$

上面。例如，泛函 $v[z(x,y)]$ 的变分 δv 可以定义为增量

$$\Delta v=v[z(x,y)+\delta z]-v[z(x,y)]$$

---

① 需假定 α 可以取与 $\alpha=0$ 接近的任何値。

对 δz 而言的綫性主部；也可以定义为在参数取初值时泛函对参数的導函数

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}v[z(x,y)+\alpha\delta z]\Big|_{\alpha=0},$$

而且，如果在 $z=z(x,y)$ 时泛函 v 有極值，則此时变分 $\delta v=0$，这因为 $v[z(x,y)+\alpha\delta z]$是 α 的函数，而我們已假定它在 $\alpha=0$ 时有極值，因而，在 $\alpha=0$ 时这个函数对 α 的導函数等于零，即 $\frac{\partial}{\partial\alpha}v[z(x,y)+\alpha\delta z]\Big|_{\alpha=0}=0$ 或 $\delta v=0$。

§ 2. 尤拉方程

現在來探求最簡單的泛函

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))\,dx \tag{1}$$

的極值，其中容許曲綫（能确定泛函的曲綫）的边界点是固定的，且 $y(x_0)=y_0$ 和 $y(x_1)=y_1$（圖 6）。函数 $F(x,y,y')$ 將認为是三階可微的。

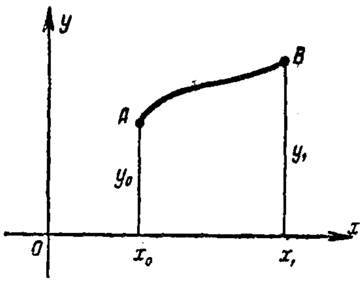

圖 6.

我們已經知道，極值的必要条件是泛函的变分等于零，但我們不妨对所論的最簡泛函來重复一下这个定理的証明。今假定極值是在一条二階可微的曲綫 $y=y(x)$ 上取得的（如果只要求容許曲綫的一階導函数存在，而泛函在該曲綫上有極值，就可用其它方法証明，这曲綫的二階導函数也存在）。

取任一条与 $y=y(x)$ 接近的容許曲綫 $y=\bar{y}(x)$，并把 $y=y(x)$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com