動態規劃

作業研究之二（理論及應用）

動 態 規 劃

作業研究之二（理論及應用）

目　　錄

動態規劃的理論與應用

Ⅰ 動態規劃的理論

1－1 引言

1－1－1 定義

一般最佳決策問題中，包括目標方程式及一些限制條件，僅就某一階段考慮最佳的決策；但是在現實環境中，有時候最佳決策是由一連串部份決策所構成的。一個整體系統的最佳決策包含好幾個階段（Stages）或層次的決策，解答這類問題的方法，叫做動態規劃（Dynamic Programming）。

動態規劃也是一種做決策的新興數學技術，其中的數學函數包括多種變數和多重階段。解決這種多重階段決策問題之步驟，祇在每一階段使一種變數最佳化，層層遞推解答下去，到最後一階段爲止。這種數學技術又叫做多重階段決策問題（Multi-stage Decision Process），所討論的都是連貫性的決策問題（Sequential Decision Problems）。

1－1－2 貝耳門氏（Richard Bellman）的最佳原則①

貝耳門氏首先發展了動態規劃的最佳原則。貝氏認爲最佳決策有以下的特性："任何的最初階段的狀態（state）和決策都應和其餘階段的狀態和決策共同構成最佳決策"。換句話說，如已知現階段的狀態，則不論過去各階段之狀態如何，今後最佳之決策，仍應和現階段的狀態共同構成。

基於這最佳原則，貝氏發展了回程運算法（Backward induction method），由問題整體系統的終點階段向後退回程運算到始點階段。

後來又由 Bhavanaui 和 Chen 發展了前向運算法。(Forward induction method)，由問題整體系統的始點階段向前運算到終點階段。

總而言之，不論是回程或是前向運算法，最佳決策必須由各階段的分層決策共同構成。

1－2 動態規劃的數學模式及解答的運算②

根據貝耳門的最佳原則所演化成，做決策的動態規劃數學模式（model）也如線型規劃的數學模式一樣；包括有限制條件的目標方程式，所不同的是動態規劃數學模式中的目標方程式不限於一次方程式，而且可以分成數重階段來求解。

具體說來動態規劃是用來解決一些含有時間或空間變動因素的經濟問題。譬如說：有時間先後相關性的投資問題，機器更新問題、庫存問題、和生產計劃等問題；有兩地距離長短性的運輸路綫、有地區性或部門性的資源分配問題。這些含有時空性問題所討論的不外是如何將有限的經濟資源適當地分配在一些不同而有時空性的經濟活動上，以求最佳收益。

1－2－1 數學模式

假設 n 代表不同的經濟活動項數。

x_i（$i=1, 2, \cdots, n$）代表該項經濟活動所分配的資源

$g_i(x_i)$ 代表 i 資源的收益函數

如各函數 g_i（x_i）彼此獨立互不相關，則目標方程式爲

$$Z = max \Sigma g_i (x_i)$$

否則為$Z = \max \prod g_i(x_i)$

決策變數x_i所受的限制條件為一次方程式，可分為兩種

$$\Sigma x_i = K \qquad 或者 \qquad \Sigma a_i x_i = K$$

$$x_i \geq 0$$

1－2－2　解答步驟

根據動態規劃的最佳原則，首先應將求最佳（最大或最小）的函數分成為數個函數（數個階段），逐步在每一階段上，使其中一個變數的函數達到最佳值。因為當某一問題自一階段運算到另一階段時，最初階段的最佳答案，將重現，和現階段的變數共同構成最佳答案，不論最初階段已知條件是什麼，都可求得一最佳答案；然後再根據所求得的答案和第二階段的已知條件，共同構成這階段的最佳答案；如此循序漸進，直到最後階段的最佳答案求出為止。這是解答動態規劃的一般通則，應用時，可按下列步驟求解。

(1)先將求最佳的數學函數（問題）分成數重階段。

(2)再按回程或前向運算法，由第一階段（或最後一階段）開始，直到最後一階段（或第一階段）為止，彼此連環遞推，求出各階段最佳值。

1－2－3　一般可分函數

當函數為可分函數時，將函數分成數重階段：

$*$表示函數間之關係，可為加號（＋），也可為乘號（×）等，完全看問題的本質而定。

目標方程式：$Z = \max_{x_1, x_2, \cdots, x_n} [f_1(x_1) * f_2(x_2) * \cdots\cdots * f_n(x_n)]$

先將上列函數分成數重階段求解

目標方程式：$Z=\max\limits_{x_2,x_3,\cdots x_n}[f_1(x_1)*\max[f_2(x_2)*\cdots\cdots$

$*f_n(x_n)]]=\max\limits_{x_1}[f_1(x_1)*\max\limits_{x_2}[f_2(x_2)*\max\limits_{x_3}[f_3(x_3)*\cdots\cdots*\max\limits_{x_n}[f_n(x_n)]]]]$

前向法：

設：$f_1^*(s_1)=\max\limits_{x_1}f_1(x_1,s_1)$

$$f_2^*((s_2)=\max_{x_2}[f_2(x_2,s_2)*f_1(x_1)]$$

$$=\max_{x_2}[f_2(x_2,s_2)*f_1(x_2,s_2)]$$

$$=\max_{x_2}[h_2(x_2,s_2)]$$

……………………………………………………

$$f_p^*(s_p)=\max_{x_p}[f_p(x_p,s_p)*f_{p-1}(x_{p-1})]$$

$$=\max_{x_p}[f(x_p,s_p)*f_{p-1}(x_p,s_p)]$$

$$=\max_{x_p}[h_p(x_p,s_p)]$$

回程法：

$$f_p^*(s_p)=\max[f_p(x_p,s_p)*f_{p-1}(x_p,s_p)]；$$

$$p=2,3,4,\cdots\cdots,n$$

$$f_1^*(s_1) = \max_{x_1} f_1(x_1, s_1)$$

有的情形下，分階段求解只能如下例解法。

目標方程式：$Z=\max[f_1(x_1)+f_2(x_2)f_3(x_3)]$

分階段如下：

$$Z=\max[f_1(x_1)+\max[f_2(x_2)\max f_3(x_3)]]$$

限制條件中應有x_1，x_2 和 x_3 變數，但不能分階段如下：

$$\max[f_3(x_3)\ \max[f_2(x_2)+\max f_1(x_1)]]$$

結論：在應用此法解答動態規劃時，首先應證實該目標方程式可能分成數階段。

1－2－4 動態規劃模式的解答運算

1-2-4·1 在限制條件爲$\Sigma x_i \leq k$ 情形下，

目標方程式：$Z=\max[g_i(x_1)*g_2(x_2)*\cdots*g_n(x_n)]$

限制條件：$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=k$

$$x_i \geq 0$$

轉換變數：

$$x_1 = v_1$$
$$x_2 + v_1 = v_2$$
$$x_3 + v_2 = v_3$$
$$\vdots$$
$$x_n + v_{n-1} = v_n = k$$

如此將函數分成n 個階段，每一階段僅有一個變數，這階段前面的變數重現在這階段變數的函數中。例如：

第一階段 $f_1^*(v_1) = \max_{0 \le x_1 \le v_1} [g_1(x_1)] = f_1(v_1)$

第二階段 $f_2^*(v_2) = \max_{0 \le x_2 \le v_2} [f_1(v_1) * g_2(x_2)]$

$= \max_{0 \le x_2 \le v_2} [f_1(v_2 - x_2) * g_2(x_2)]$

$= \max_{0 \le x_2 \le v_2} [h_2(x_2, v_2)]$

第三階段 $f_3^*(v_3) = \max_{0 \le x_3 \le v_3} [f_2^*(v_2) * g_3(x_3)]$

$= \max_{0 \le x_3 \le v_3} [f_2(v_3 - x_3) * g_3(x_3)]$

$= \max_{0 \le x_3 \le v_3} [h_3(x_3, v_3)]$

⋮

第 n 階段 $f_n^*(k) = \max_{0 \le x_n \le k} [f_{n-1}^*(v_{n-1}) * g_n(x_n)]$

$= \max_{0 \le x_n \le k} [f_{n-1}(k - x_n) * g_n(x_n)]$

$= \max_{0 \le x_n \le k} [h_n(k, x_n)]$

因爲 $v_n = k$，所以在第 n 階段中僅出現常數 k

1-2-4·2 在限制條件爲 $\Sigma a_i x_i \le k$ 情形下

目標方程式：$Z=\max\left[g_1(x_1)*g_2(x_2)*\cdots\cdots*g_n(x_n)\right]$

限制條件：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n=k$

$$x_i\geq 0$$

首先更換變數如下：

$$y_1=a_1x_1 \qquad \therefore \qquad x_1=\frac{y_1}{a_1}$$

$$y_2=a_2x_2 \qquad\qquad x_2=\frac{y_2}{a_2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_n=a_nx_n \qquad\qquad x_n=\frac{y_n}{a_n}$$

目標方程式：$Z=\max\left[g_1(\frac{y_1}{a_1})*g_2(\frac{y_2}{a_2})*\cdots\cdots*g_n(\frac{y_n}{a_n})\right]$

限制條件：$y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n=k$

$y_i\geqslant 0$

1－2－5　動態規劃中的重現關係（遞推關係）

一般說來，動態規劃須依遞推關係（重現關係）求解。求解時，首先將 n 次式的問題分成 n 個一次式的問題，但並不改變問題的本質，在求解答第 n 次式的問題時，第$(n-1)$次的最佳解答將重現在該解答公式中，同時在解答第（$n-1$）次式問題時，第（$n-2$）次的最佳解答也已重現過，如此層層遞推下去而得該問題整個系統的最佳解答。

下面用一具體例子來說明遞推關係（或重現關係）

例：文祥將數值 c 分成 n 個部份，並希望 n 個部份的相乘積最大化，試求最大的分割法。

設　c：固定已知數

$f_n(c)$：c 分割爲 n 個部份相乘積的最大值

n :爲正整數

目標方程式：$\max f_n(c) = x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots\cdots \times x_n$

限制條件：$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = c$

$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n \geq 0$

轉換變數

$x_1 = v_1$

$x_2 + v_1 = v_2 \qquad \therefore\ v_1 = v_2 - x_2$

$x_3 + v_2 = v_3 \qquad v_2 = v_3 - x_3$

$\vdots \qquad \vdots$

$x_n + v_{n-1} = v_n$

第一階段 （當 $n = 1$ ）

$$f_1^*(v_1) = \max_{x_1 = v_1} x_1 = v_1$$

第二階段 （當 $n = 2$ ）

$$f_2^*(v_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq v_2} [x_2 \times f_1^*(v_1)]$$

$$= \max_{0 \leq x_2 \leq v_2} [x_2 \times v_1]$$

$$= \max_{0 \leq x_2 \leq v_2} [x_2(v_2 - x_2)]$$

$$= \max_{0 \leq x_2 \leq v_2} (x_2 v_2 - x_2^2)$$

$$= \max_{0 \leq x_2 \leq v_2} [h_2(x_2, v_2)]$$

第一導式

$$\frac{dh_2(x_2, v_2)}{dx_2} = v_2 - 2x_2 = 0 \qquad \therefore x_2 = \frac{v_2}{2}$$

$$\therefore f_2^*(v_2) = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_2^2}{4} = \frac{v_2^2}{4} = \frac{v_2}{2} \times \frac{v_2}{2}$$

當 $n = 2$ 時，v 總和均分成兩部份 $\frac{v_2}{2}$

第三階段　（當 $n = 3$ ）

$$f_3^*(v_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq v_3} [x_3 \times f_2^*(v_2)]$$

$$= \max_{0 \leq x_3 \leq v_3} \left(\frac{v_2^2}{4} \times x_3\right)$$

$$= \max_{0 \leq x_3 \leq v_3} \left[\frac{x_3}{4}(v_3 - x_3)^2\right]$$

$$= \max_{0 \leq x_3 \leq v_3} [h_3(x_3, v_3)]$$

第一導式

$$\frac{dh_3(x_3, v_3)}{dx_3} = \left[\frac{1}{4}(v_3 - x_3)^2 + \frac{x_3}{2}(v_3 - x_3)(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[(v_3 - x_3)^2 + 2x_3(v_3 - x_3)(-1)]$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad (v_3 - x_3)(v_3 - x_3 - 2x_3) = 0$$

$$\therefore \quad v_3 = x_3 \text{ 或 } x_3 = \frac{v_3}{3}$$

$x_3 = v_3$（不切合本題，將 v 分成 $n = 3$ 部份）

所以將 $x_3 = \frac{v_3}{3}$ 代入 $f_3^*(v_3)$ 中

$$f_3^*(v_3) = \left[\frac{v_3}{12}\left(v_3 - \frac{v_3}{3}\right)^2\right] = \left[\frac{v_3}{12} \times \left(\frac{2v_3}{3}\right)^2\right]$$

$$= \frac{4v_3^3}{108} = \frac{v_3^3}{27} = \frac{v_3}{3} \times \frac{v_3}{3} \times \frac{v_3}{3}$$

當 $n = 3$，c 應平均分成三部份 $\frac{v_3}{3}$ 。

結論：如果要將一數 c 分成 n 部份，且使 n 部份的乘積最大，最佳分法是 n 部份皆相等。以上三階段重現公式可歸納如下：

$$f_n^*(v_n) = \max_{0 \le x_n \le v_n} \left[x_n \times f_{n-1}(v_{n-1})\right]$$

$$= \max_{0 \le x_n \le v_n} \left[x_n \times \left(\frac{v_n - x_n}{n-1}\right)^{n-1}\right]$$

Ⅱ、數學例題（應用動態規劃解答）

2－1 連續變數情形下

2－1－1 簡單的例子

目標方程式：$Z=\max(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$

限制條件：$x_1+x_2=2 \quad x_1, x_2 \geq 0$

轉換函數：$x_1=v_1$

$x_1+x_2=v_2=2, \therefore \sqrt{v_1}=\sqrt{v_2-x_2}$

第一階段：求最佳值

$f_n^*(v_1)=\max(\sqrt{x_1})=\sqrt{v_1}$

第二階段：$f_2^*(v_2)=\max[f_1^*(v_1)+f_2(x_2)]$

$\max[\sqrt{v_2-x_2}+\sqrt{x_2}]=\max h_2(v_2, x_2)$

第一導式 $\dfrac{dh_2(v_2, x_2)}{dx_2}=\dfrac{-1}{2\sqrt{v_2-x_2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}=0$

所以 $\dfrac{2\sqrt{v_2-x_2}-2\sqrt{x_2}}{4\sqrt{x_2}\sqrt{v_2-x_2}}=0$

因 $\sqrt{v_2-x_2}=\sqrt{x_2}$

$\therefore \quad v_2-x_2=x_2$

$v_2=2x_2 \qquad \therefore \quad x_2=\dfrac{v_2}{2}$

$f_2^*(v_2)=\sqrt{v_2-\dfrac{v_2}{2}}+\sqrt{\dfrac{v_2}{2}}=\sqrt{\dfrac{v_2}{2}}+\sqrt{\dfrac{v_2}{2}}$

已知：$v_2=2$

$\therefore \quad x_2=1, v_1=v_2-x_2=1, x_1=v_1=1$

$\therefore \quad z=2$，當 $x_1=1, x_2=1$

上例解答的分析：

在第二階段中，（如有 n 階段，在第 n 階段中也如此例），

有六個元素：

(1)　$v_{i-1}=v_i\ (i=2)$

(2)　$x_i=x_2$

(3)　$v_i=v_2$

(4)　$F(v_{i-1},\ x_i,\ v_i)=0$

本例中　$v_1=v_2-x_2$

(5)　$h_i(x_i,\ v_{i-1})$

本例中　$h_2(x_2, v_1)=\sqrt{v_1}+\sqrt{x_2}=h_2(v_2,\ x_2)$

$$=\sqrt{v_2-x_2}+\sqrt{x_2}$$

(6)　$f_i(v_i)=\sqrt{\frac{v_2}{2}}+\sqrt{\frac{v_2}{2}}=f_2(v_2)$　爲$v_2=2$

$$f_2(2)=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$$

以上是應用動態規劃多重階段求最佳值。下面再解說如何應用此法來求解。

(1)　v_{i-1}是在$i-1$階段中的已完成的最佳決策函數

$$x_{i-1}=d(v_{i-1})$$

在本例中是第$2-1=1$階段中的決策函數

$$x_1=v_1$$

最佳化函數是$f_1^*(v_1)=\sqrt{v_1}$

(2)　v_i是第i階段中最佳化的函數，在本例中是v_2前、後兩階段的最佳函數轉變關係如下：

將 v_{i-1}重現在v_i函數中，上例是

$$v_1=v_2-x_2$$

因此在該階段的函數中，除了該階段變數x_2外，尚包括前階段最佳變數x_1，不過此時x_1已由v_1函數表達（$x_1=v_1$，$f_1^*(v_1)=\sqrt{v_1}$），同時v_1又重現在v_2和x_2函數中