21世纪大学数学丛书

第二版

概率论与数理统计

PROBABILITY AND STATISTICS

朱翼隽 主编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

21 世纪大学数学丛书

概率论与数理统计

（第二版）

主　编　朱翼隽

编　者　朱翼隽　杨卫国　孙　梅

蔡国梁　赵跃生

江苏大学出版社

JIANGSU UNIVERSITY PRESS

镇　江

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/朱翼隽主编. —2 版. —镇江：江苏大学出版社，2015. 8
ISBN 978-7-5684-0017-6

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①概率论②数理统计 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 158171 号

概率论与数理统计(第二版)

Gailülun Yu Shuli Tongji

主　　编/朱翼隽
责任编辑/吴昌兴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press. ujs. edu. cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/丹阳市兴华印刷厂
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/787 mm×960 mm　1/16
印　　张/24.25
字　　数/480 千字
版　　次/2015 年 8 月第 2 版　2015 年 8 月第 5 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-5684-0017-6
定　　价/38.00 元

序

朱翼隽、杨卫国等教授编写的《概率论与数理统计》即将由江苏大学出版社正式出版，今表示衷心祝贺，并愿意向读者郑重推荐该书. 我与朱翼隽教授、杨卫国教授已经相知多年，对他们的情况比较了解. 两位教授都是著名的概率统计专家. 他们数十年来一直从事概率论与数理统计方面的教学与科研工作，在教学与科研中积累了大量的教案资料和丰富的教学经验，同时对工科院校概率统计的特点与要求有深刻的认识. 该书就是作者多年来从事该课程教学工作的经验总结. 具体来说，该书有以下特点：

(1) 该书特别注重概率论与数理统计学科的基本概念、基本原理和基本方法的论述.

对于基本概念的表述，从背景引申到严格定义以及示例解释都注重启发式，以便学生加深理解；对于基本定理和主要结果的介绍，从意义解释到严格证明以及方法应用皆有细致的分析和讨论. 这些都有助于学生获得扎实的基础知识，并培养学生提出问题和解决问题的能力. 同时，该书并不过分探讨数学理论的细节，而更注重概率统计基本思想、基本原理的论述，从而尽可能适应非数学专业学生的需要. 另外，该书也较好地做到了高等数学各门课程之间的衔接，在普通高等数学和线性代数的基础上，比较系统地、由浅入深地介绍了概率论与数理统计学科的基本知识.

(2) 该书特别注重概率论与数理统计这门学科基本理论与实际应用的结合.

该书附有丰富的例题和习题，其中大多来自工科类专业及经济管理方面的实际问题. 为了帮助学生理解随机现象的规律并提高统计推断的能力，该书在有关章节安排了较多的典型示例，其中有的是为了加深对基本概念的理解；有的是为了加强对典型方法和技巧的训练. 这些示例大部分都有应用背景和实际参考价值，某些问题也带有研究性质，结果比较新颖，其中的构思和处理方法很有启发性.

(3) 该书适用范围比较广.

读者只要具有高等数学和线性代数的基础知识,即可通过该书掌握概率论与数理统计的基本原理和基本方法,因此,该书可作为工程技术、管理科学、经济金融、生物医学等本科专业的教材,亦可供相关专业的教师、研究生及科技人员和统计工作者参考.

综上所述,根据 21 世纪教学内容和课程体系改革的要求,该书凝聚了作者多年来从事课程教学工作的经验,内容充实、结构合理、详略得当、典型实用,是一本很有特色、适应面广的好教材,特此推荐给广大读者.

中国工程概率统计学会常务副理事长
东南大学数学系教授、博导 李博成

2009 年 7 月

第二版前言

本书第一版自 2009 年出版以来，在理工类和管理类多个专业用作教材，已经经历了多次教学实践. 这次出版第二版正好赶上高校审核性评估和本科教学质量名校建设的强劲东风.

众所周知，作为本科教学质量内涵提升的关键：一是夯实基础，二是拓展视野. 本着这一宗旨，本书在第一版编写过程中已注意到：为了严守"本科概率论只建立在样本空间的基础上"这一循序渐进的共识，多数同类教材都不得不隐去随机变量可测性的本质. 为了弥补这一缺憾，我们在出版的教材中，借助于规定随机事件概率的公理化定义（见第 1 章 1.3.1），绕过概率空间的概念，做了巧妙、妥当的处理. 具体可见：在第 2 章 2.1.1 随机变量的定义 2.1 中强调了"$\forall x \in \mathbf{R}$，$\{\omega, X(\omega) \leqslant x\}$ 是一个随机事件"，因而，间接地给出了随机变量可测的本质，而在第 11 章作为概率论延拓的随机过程理论中，用三个定义，从三个侧面给出了随机过程的精确描述，为理论的进一步延拓留出了发展的接轨处.

第二版第 13 章习题中，与理论延拓相关的习题均打上了 * 号，以期达到与学科发展接轨，与国际接轨的目的.

在此，我们谨向关心本书和对第一版教材提出宝贵意见的师生及同仁表示衷心的感谢，并真诚希望广大读者对第二版不足之处提出批评和指正.

第一版前言

高校实现跨越式发展将“与时俱进”和“特色发展”的教改要求提到了我们面前.作为研究随机规律的学科分支——概率论与数理统计有极强的工科应用背景,掌握其基本知识和应用能力应是一个大学生(特别是理工科大学生)的基本素质.为适应当前科技和学科发展的需要,编者结合多年来的教学实践,拟编写一本有专业特色的,努力用现代化教学思想来统一处理的本科概率统计教材.

本书是田立新教授主编的“21世纪大学数学丛书”之一.我们在本书编写过程中渗透了两项教改思路:一是各章节中精选与专业背景密切结合的课堂例题;二是注重理论体系的清晰和完整,力求与现代化接轨,与研究生教学接轨,与学科发展接轨.作为以理工科为主的公共基础课程教材,本书着重叙述其数学机理和应用背景,既注重概念和理论的自然引进、逐步深入,又力求联系应用实际,结合当前强势学科的特色.在内容叙述上考虑了本科学生易于接受的形式,力求直观,提高可读性,其理论阐述的深度应使学生不至于望而却步,又能较准确地把握其知识结构,尽量做到内容拓展,篇幅不增,并考虑与研究生教学基础的衔接.考虑到全书的系统性及深度,书中部分标星号(*)的内容,在教学中,根据实际情况,作为拓宽学生知识面的需要,教师可选讲或不讲.

全书共13章.第1,11,12,13章由朱翼隽编写;第2,6章由赵跃生编写;第3,9,10章由孙梅编写;第4,7,8章由蔡国梁编写;第5章由杨卫国编写;周宗好博士负责附录和习题,并完成了全书图表和习题参考答案.全书由朱翼隽教授统稿.杨卫国教授和孙梅教授分别对初稿的概率和统计部分进行了审阅.

本书在编写过程中,参阅了众多同行的资料,在此表示衷心感谢.由于水平有限,书中不妥之处在所难免,欢迎专家、读者批评指正.

目 录

1 随机事件与概率

概率论是研究随机现象规律性的一个数学分支,是近代数学的重要组成部分.掌握概率论的基本知识及其应用能力应是一个大学生的基本素质.本章将阐明随机事件及其概率这两个概念,并介绍事件概率的基本计算方法.

1.1 随机事件与样本空间

1.1.1 随机现象及其统计规律性

自然界和社会上发生的现象大体上可以归结为两类:一类是所谓的确定性现象,它在一定的条件下必然发生.例如,向上抛的石子必然下落;在一个标准大气压下,温度达到 100 ℃时,纯水必沸腾;同性的电荷必相互排斥等.另一类是事先无法预言其结果的,即使在相同的条件下重复进行观察,其结果也未必相同.例如,受孕胎儿是男孩还是女孩;抛掷一枚均匀的、对称的硬币,结果是正面向上还是反面向上;夏季某河流可能出现的最高水位;某电话交换台单位时间内可能接到的呼唤次数等.这类现象在观察后才能知道它的结果,事先由于它出现哪个结果的不确定性而无法预言,称之为随机现象.随机现象既然无法预言其结果,它是不是就无规律可循呢?事实并非如此.人们通过长期观察或试验,发现所谓不可预言只是对一次或少数几次观察或试验而言,若在相同条件下进行大量的观察或试验时,这些随机现象就呈现出某种规律性,因而从总体上还是可以预言的。例如,根据各个国家各时期的人口统计资料,受孕胎儿中男孩和女孩的比例约各占一半;抛掷一枚质地均匀且对称的硬币相当多次以后,就会发现出现正面和反面次数的比例大约为 1∶1.这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,称之为随机现象的统计规律性.

概率论作为研究随机现象统计规律性的学科,它的理论和方法的应用是很广泛的,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门.例如使用概率统计方法可以进行气象预报、水文预报及地震预报;产品的抽样验收;在研制新产品时,为寻求最佳生产方案,可以进行试验设计和数据处理;在可靠性工程中,使用概率统计方法可以给出元件或系统的可靠性及平均寿命的估计;在自动控制中可以给

出数学模型以便通过计算机来控制工业生产；在通信工程中可以提高信号的抗干扰性和分辨率等.

1.1.2 随机试验与随机事件

为了叙述方便，把对一定条件下的自然现象和社会现象的观察或进行的试验，都称为试验，也就是说这里把试验的含义推广，它既指各种各样的科学试验，也把对某事物的某一特征进行的一次观察，称为进行一次试验.

随机试验具有以下特点：

(1) 它可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，而究竟出现哪个结果，试验前并不能准确地预言；

(3) 试验中一切可能的结果在试验前是已知的，而且每次试验中必有一个结果出现，也仅有一个结果出现.

例 1.1 抛掷一枚硬币，观察其出现正面或反面的次数.

例 1.2 掷一粒骰子，观察出现的点数.

例 1.3 在一批灯泡里，任意取一只，测试它的寿命.

例 1.4 对成批铸件中的任意一个的某部位尺寸进行一次测量.

例 1.5 记录上午 8 点某公共汽车站等车的人数.

把随机试验中可能发生但不一定发生的事情，称为随机事件，简称为事件，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，而把试验中每一个可能结果称为基本事件. 基本事件是不能分解成其他事件组合的最简单的随机事件. 例如，掷一粒骰子的试验中，其出现的点数“1 点”、“2 点”、…、“6 点”都是基本事件.“奇数点”也是随机事件，但它不是基本事件，它由“1 点”、“3 点”、“5 点”这三个基本事件组成，只要这三个基本事件中的一个发生，“奇数点”这个事件就发生.

每次试验中一定发生的事情称为必然事件，记作 Ω；而必然不发生的事情，称为不可能事件，记作 $\varnothing$. 例如在上面提到的掷骰子试验中，“点数小于 7”是必然事件，必然事件与不可能事件都属确定性现象，为了今后研究方便，把它们看做随机事件的两个极端情况.

1.1.3 样本空间

随机试验的所有可能结果或全体基本事件的集合称为样本空间，也记作 Ω，而把 Ω 中的每一个基本事件记作 ω，称为样本点，这样试验中的任一随机事件都是其样本空间 Ω 中的某些样本点所组成的集合，因而它是 Ω 的子集. 于是，从集合论的角度来看，可以定义随机事件如下：

定义 1.1 设 D 为样本空间的一个子集，称"试验结果属于 D"为一个随机事件，简称为事件，为了简单，就用 D 表示这个事件.

例 1.6 若把例 1.1 中抛掷硬币的两种可能结果——正面或反面分别记为 ω_1，ω_2，则其样本空间由两个样本点组成，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$. 若将"出现正面"这一事件记为 A，则

$$A=\{\omega_1\}$$

是 Ω 的子集.

例 1.7 若某电话交换台，单位时间内可能接到的呼唤次数是 0，1，2，…，用 ω_i 表示接到 i 次呼唤的事件，则样本空间 Ω 由可列无限多个样本点组成，即 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_i,\cdots\}$. 若把"单位时间接到呼唤不超过 20 次"这一事件记为 B，则

$$B=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{20}\}$$

是 Ω 的子集.

例 1.8 若某河流夏季的最高水位是在 3 m 到 5 m 之间，则样本空间为 3 到 5 内的一切实数所成的集合，即 $\Omega=\{X|3\leqslant X\leqslant 5\}$. 若把"夏季最高水位在 3.5 m 与4 m 之间"这一事件记为 C，则

$$C=\{X|3.5\leqslant X\leqslant 4\}$$

是 Ω 的子集.

1.1.4 事件的关系与运算

在实际问题中，同一随机试验中出现的几个事件往往不是孤立的，而是彼此之间有联系的. 例如，检验圆柱形产品，要求它的长度与直径都合格时，产品才算合格. 这时就要考虑"产品合格"，"产品不合格"，"长度合格"，"长度不合格"，"直径合格"，"直径不合格"，"长度合格而直径不合格"等事件. 显然这些事件之间是有联系的. 研究在同样条件下发生的几个事件以及它们之间的关系，使我们能够通过对一些较简单事件的了解，去研究与之有关的较复杂的事件.

下面介绍事件之间的几个主要关系以及作用在事件上的运算.

1) 事件的包含与相等

如果事件 A 出现必然导致事件 B 出现，则称事件 B 包含事件 A 或称 A 是 B 的子事件，记作

$$A\subset B(\text{或 } B\supset A).$$

例如，"直径不合格"必然导致"产品不合格"，所以"直径不合格"是"产品不合格"的子事件，为了方便，规定对于任一事件 A，有 $\varnothing\subset A$，而 $A\subset\Omega$.

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，即 $B\subset A$ 和 $A\subset B$ 同时成