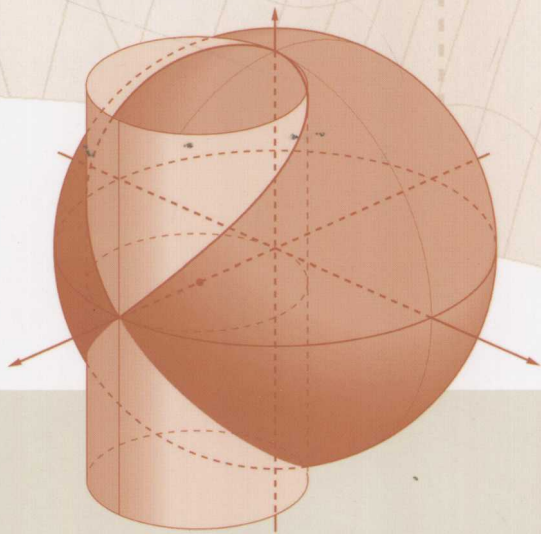


高 等 学 校 教 材

A 高等数学 Advanced Mathematics

主编 郭进峰 李玮玲 沈菁华
主审 国起



 高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

课程编号

本书为《高等数学》课程教材，适用于工科类各专业。

本书为《高等数学》课程教材，适用于工科类各专业。

本书为《高等数学》课程教材，适用于工科类各专业。

高等数学

本书为《高等数学》课程教材，适用于工科类各专业。

本书为《高等数学》课程教材，适用于工科类各专业。

Gaodeng Shuxue

课程编号 (CIP) 目次

主编 郭进峰 李玮玲 沈菁华
编者 邢 溯 陈 洋 余 泓 赵 岩
主审 国 起

本书为《高等数学》课程教材，适用于工科类各专业。

本书为《高等数学》课程教材，适用于工科类各专业。

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第100004号

出版发行

出版发行

社址

400-810-0000

http://www.hep.com.cn

http://www.hep.com.cn

http://www.hep.com.cn

http://www.hep.com.cn

2013年8月第1次印刷

2013年8月第1次印刷

50.00元

出版发行

社址

100130

印 刷

787mm

18

350千

010-28281118



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

本书为《高等数学》课程教材，适用于工科类各专业。

内容提要

本书内容包括预备知识、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、多元函数微分学、二重积分、无穷级数等章节。

全书突出基本概念的实际背景和理论知识的实际应用,强调逻辑思维方法,淡化解题技巧,并在预备知识中充分考虑与中学数学内容的衔接。

除每节后配置习题外,每章后还配置总习题,以巩固本章的学习成果。

本书既可作为课时少于 130 学时的高等数学课程的教材,也可作为工程技术和经济管理人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 郭进峰, 李玮玲, 沈菁华主编. -- 北京: 高等教育出版社, 2012. 8

ISBN 978 - 7 - 04 - 035720 - 2

I. ①高… II. ①郭… ②李… ③沈… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 160904 号

策划编辑 张彦云

责任编辑 张彦云

封面设计 于文燕

版式设计 杜微言

插图绘制 尹文军

责任校对 胡晓琪

责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100120

印 刷 高教社(天津)印务有限公司

开 本 787mm × 960mm 1/16

印 张 18

字 数 320 千字

购书热线 010 - 58581118

咨询电话 400 - 810 - 0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landracom.com>

<http://www.landracom.com.cn>

版 次 2012 年 8 月第 1 版

印 次 2012 年 8 月第 1 次印刷

定 价 26.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 35720 - 00

前 言

本书是编者在分析了高等数学教学改革趋势,同时吸收国内外教材改革经验的基础上,针对目前本科少学时高等数学课程的教学需要编写而成的。在保证科学性的前提下,本书充分考虑高等教育大众化的趋势,简化了高等数学中较为抽象的概念,其目的是使高等数学教材能够适应培养 21 世纪应用型与创新型人才的需要。

本书以“够用”为原则,对高等数学的教学内容与课程体系的改革提出了一些思路和方法,力图回答诸如“导数是什么”、“导数有什么用”等在教学过程中学生经常提出的问题,并为解决(或部分解决)高等数学教学改革中遇到的诸多难题,如经典内容与现代知识的矛盾、内容多而学时有限的矛盾等,提出了自己的设想。

此外,我们还充分考虑到与中学教材衔接中可能出现的问题,在预备知识部分介绍了极坐标等概念,供教师在教学中选用;并在书中配置了较多的习题,便于学生训练和提高。

全书内容包括预备知识、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、多元函数微分学、二重积分、无穷级数等,叙述深入浅出、重点突出、难点分散。本书可作为课时少于 130 学时的高等数学课程的教材,也可供工程技术和经济管理人员参考,同时对高等学校数学教师的教学工作也有一定的参考价值。

本书编者长期在教学第一线,具有丰富的教学经验,参加本书编写的有(排名不分先后)郭进峰、陈洋、李玮玲、沈菁华、赵岩、邢溯、余泓等教师,书中的插图均由邢溯老师绘制。

在本书的编写过程中,国起教授提出了许多极具参考价值的建议。此外,本书的编写还得到了多位教授、学者的帮助以及高等教育出版社的大力支持,特在此一并致谢。

由于编写人员水平所限,书中必有不少不足之处,敬请各位专家、同行和读者批评指正。

编者

2012 年 4 月

目 录

221		长阳第又	第6章
221		用章的中等既八章代第家	第10章
221		第中既同超家否代第家	第8章
221		三既区总	
821		野式代第常	章四第
预备知识 1			
121	第一节 集合与映射		1
521	第二节 函数		3
130	第三节 极坐标		15
231	习题		17
231		四既区总	
第一章 极限与连续 19			
121		半代第既面示送	章正第
121	第一节 函数的极限		19
121	第二节 无穷小与无穷大		27
221	第三节 极限的计算		31
221	第四节 无穷小的比较		41
202	第五节 闭区间上连续函数的性质		45
202	总习题一		47
212		面平既已代第全	第6章
第二章 一元函数微分学 51			
212		第第已第既第既面示二	第8章
222	第一节 函数的导数		51
222	第二节 函数的微分		63
122	第三节 导数与微分的运算法则		69
122	第四节 中值定理		81
122	第五节 导数在求未定式极限上的应用		86
022	第六节 导数在研究函数的性态上的应用		90
122	第七节 导数在经济学上的应用		97
122	总习题二		102
第三章 一元函数积分学 106			
122		既既已合第本基的既既既天	第1章
122	第一节 定积分的概念		106
222	第二节 定积分的性质		113
222	第三节 微积分基本公式		118
222	第四节 不定积分		124
222	第五节 换元积分法与分部积分法		129

第六节 反常积分	135
第七节 定积分在几何学中的应用	139
第八节 定积分在实际问题中的应用	149
总习题三	154
第四章 常微分方程	158
第一节 微分方程的基本概念	158
第二节 一阶微分方程	161
第三节 一阶微分方程的应用	167
第四节 可降阶的高阶微分方程	170
第五节 二阶常系数线性微分方程	173
总习题四	179
第五章 多元函数微分学	181
第一节 空间直角坐标系及向量	181
第二节 空间曲面、曲线及其方程	192
第三节 二元函数	199
第四节 偏导数	202
第五节 多元复合函数与隐函数求导	206
第六节 全微分与切平面	212
第七节 方向导数与梯度	215
第八节 二元函数的极值与最值	218
总习题五	222
第六章 二重积分	224
第一节 二重积分的概念与性质	224
第二节 二重积分的计算	230
第三节 二重积分的应用	243
总习题六	251
第七章 无穷级数	254
第一节 无穷级数的基本概念与性质	254
第二节 常数项级数收敛性的判别法	259
第三节 幂级数	265
第四节 函数展开成幂级数	272
总习题七	278

预 备 知 识

第一节 集合与映射

一、集合

1. 集合的概念

具有某种特定性质的事物的总体称为集合. 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

集合常用大写字母表示, 记作集合 A, M 等. 而集合中的元素用小写字母表示, 如 a, b, c, m 等. 若元素 a 是集合 A 中的元素, 则记作 $a \in A$ (读作 a 属于 A), 否则记作 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A).

若集合 A 中的元素只有有限个, 则称该集合为有限集合, 否则称为无限集合.

集合通常可表示为:

若集合 A 中只有 n 个元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 则其可表示为

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

若集合 A 中有无限个元素, 则其可表示为

$$A = \{x | x \text{ 所具有的性质}\}.$$

例如, 所有满足 $x^2 + y^2 = 1$ 的实数构成的平面上的点集 M 可表示为

$$M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}.$$

通常我们用特定的记号表示常用的数集:

自然数集合: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$,

整数集合: $\mathbf{Z} = \{k | k = \pm n, n \in \mathbf{N}\}$,

正整数集合: $\mathbf{Z}^+ = \{k | k > 0, k \in \mathbf{Z}\}$,

实数集合: $\mathbf{R}$,

有理数集合: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}^+, \text{且 } p, q \text{ 互质} \right\}$, 其中 $\mathbf{Z}^+$ 表示 $\mathbf{Z}$ 中去掉

零后的集合.

2. 集合的关系与运算

设 A, B 为两个集合, 则若 A 中的所有元素均是 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ (读作 A 包含于 B , 或 B 包含 A), 如, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}, \mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

若 A 是 B 的子集, B 也是 A 的子集, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

若集合 C 中的每一个元素, 不是属于 A , 就是属于 B , 即

$$C = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

则称集合 C 是集合 A, B 的并集, 记作 $C = A \cup B$.

若集合 C 中的每一个元素, 既属于 A , 又属于 B , 即

$$C = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

则称集合 C 是集合 A, B 的交集, 记作 $C = A \cap B$.

若集合 C 中每一个元素都属于 A , 但不属于 B , 即

$$C = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\},$$

则称集合 C 是集合 A, B 的差集, 记作 $C = A - B$.

所考察对象的全体构成的集合叫全集, 通常记作 I , 全集 I 与集合 A 的差集称为集合 A 的补集, 记作 $A^c = I - A$.

(A 不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$. 如

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

集合的并、交、补运算满足:

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

对偶律 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

3. 区间与邻域

区间和邻域是常用的一类数集. 设 a, b 是实数, 且 $a < b$:

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$,

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$,

左开右闭区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$,

左闭右开区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$.

对以上四个区间, 闭的包含区间端点, 开的不包含区间端点. $b - a$ 称为区间长度, 区间长度有限的区间, 称为有限区间, 否则称为无限区间, 如

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, \quad (-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, \quad (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

设 a, δ 为实数, 且 $\delta > 0$, 则称数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\} = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

是以 a 为中心, δ 为半径的邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 简称为 a 的 δ 邻域; 称

$$U^\circ(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

是 a 的去心 δ 邻域, 类似地有 a 的左邻域 $(a - \delta, a)$ 和 a 的右邻域 $(a, a + \delta)$. 若

不强调邻域的半径,称为 a 的邻域,记作 $U(a)$.

二、映射

定义 1 设 X, Y 是两个非空集合,如果存在法则 T ,使得 X 中的每个元素 x ,按法则 T 在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应,那么称 T 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$T: X \rightarrow Y.$$

元素 y 称为元素 x 在映射 T 下的像,记作 $y = T(x)$,而元素 x 称为元素 y 的原像,集合 X 称为映射 T 的定义域,记作 D_T , X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 T 的像,记作 $T(X)$. 当 Y 是数集时, $T(X)$ 称为集合 X 在映射 T 下的值域.

设 T 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $T(X) = Y$,即 Y 中任一元素均为 X 中某元素的像,则称 T 为 X 到 Y 的满射;若对任意的 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 必有 $T(x_1) \neq T(x_2)$, 则称 T 为单射;若 T 既是满射又是单射,则称 T 为 X 到 Y 的一一映射,也称为一一对应.

定义 2 设映射 T 为 X 到 Y 的一一映射,则对每个 $y \in Y$,有唯一的 $x \in X$,满足 $T(x) = y$,于是我们得到从 Y 到 X 的映射 $T^{-1}: Y \rightarrow X$,称为映射 T 的逆映射.

定义 3 设有映射 $T_1: X \rightarrow Y_1, T_2: Y_1 \rightarrow Z$, 其中 $Y_1 \subset Y_2$, 则由 T_1, T_2 确定了从 X 到 Z 的一个映射,称为 T_1, T_2 的复合映射,记作 $T_1 \circ T_2$, 即

$$\begin{aligned} T_1 \circ T_2: X &\rightarrow Z, \\ x &\rightarrow T_2[T_1(x)]. \end{aligned}$$

第二节 函 数

一、函数的概念

在自然界或科学研究过程中保持不变的量叫常量,变化的量叫变量.但是,由于客观世界是运动的,在不断地变化发展,因而考察一个量是变量还是常量应从变化中去观察.变量是绝对的,常量是相对的.如水的密度,在固定温度下是常量,但它随着温度的变化而变化.

函数表示了变量之间的一种相依关系,这种关系给出了一种对应法则,根据这种法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个值时,另一个就有确定的值与之对应,这就是函数的实质.如圆的面积 A 与半径 r 的对应关系为 $A = \pi r^2$,函数的严格定义为:

定义 4 设数集 $D \subset \mathbb{R}$, 则 D 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射 f 称为 D 上的函数,记作 $y =$

$f(x)$, 其中 $x \in D$ 称为自变量, $y \in f(D)$ 称为因变量.

这里的 D 称为函数 f 的定义域, 若 $x_0 \in D$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 其与 x_0 对应的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $y_0=f(x_0)$. 当 x 取遍整个定义域 D 时, 对应的函数值的全体组成的数集 $W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数的对应法则有时也用其他字母来表示, 如 g, F, φ 等, 这时相应的函数关系就写为 $y=g(x), y=F(x), y=\varphi(x)$ 等.

在实际问题中, 函数的定义域必须根据问题的实际背景来确定, 如圆的面积 A 与半径 r 的函数关系式为 $A=\pi r^2$, 其定义域为 $(0, +\infty)$. 而在数学中, 如不指明一个函数的实际意义, 而抽象地用一个式子 $y=f(x)$ 表示两个变量的函数关系, 这时我们约定函数的定义域就是使 $y=f(x)$ 有意义的所有实数 x 构成的数集.

例 1 边长为 x 的立方体的体积为 $V=x^3$, 其定义域为 $(0, +\infty)$.

例 2 问: 函数 $f(x)=\frac{x}{x}$ 与函数 $g(x)=1$ 是否为同一函数?

解 要回答这个问题, 我们必须理解函数的定义. 在定义中, 需给定一个定义域和一个对应关系, 而 $f(x)$ 的定义域 $D_f=\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$, $g(x)$ 的定义域 $D_g=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$, 尽管它们在 $x \neq 0$ 时对应关系相同, 但由于它们的定义域不同, 因而它们不是同一个函数.

两个函数是否为同一函数要看两个方面的问题:

- (1) 定义域是否相同;
- (2) 表达式(函数关系)是否相同.

只有在定义域与表达式都相同的情况下, 两个函数才是相同的函数.

例 3 函数 $y=2$ 称为常数函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $W=\{2\}$, 其图像如图 0-1.

例 4 函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 值域 $W=\{-1, 0, 1\}$. 其图像如图 0-2.

对任意实数 x , 有 $x = \operatorname{sgn}(x) |x|$.

例 5 设 x 为任一实数, y 取不超过 x 的最大整数, 简称最大整数, 记作 $y=[x]$, 称其为取整函数, 其定义域 $D=\mathbf{R}$, 值域 $W=\mathbf{Z}$. 其图像(如图 0-3)为阶梯曲线.

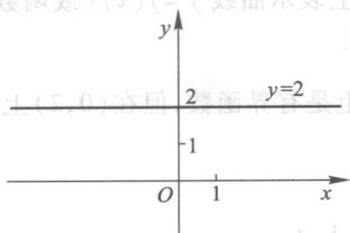


图 0-1

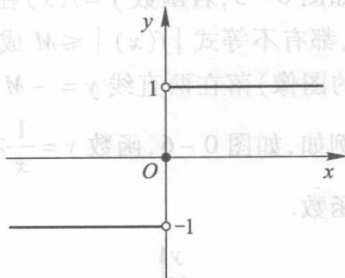


图 0-2

由例题 4 可知,有时一个函数要用几个式子来表示,这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数.

例 6 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$ 是分段函数,这里尽管有两个表达式,但它只表示一个函数.其图像如图 0-4.

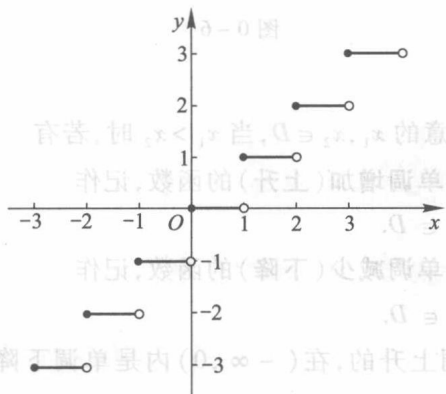


图 0-3

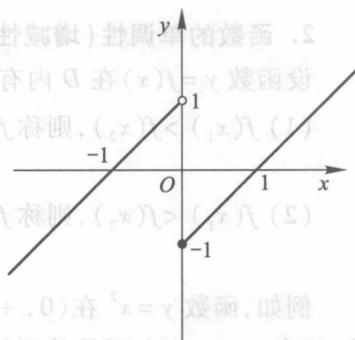


图 0-4

二、函数的几何特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 内有定义,如果存在正数 M ,使得对任意的 $x \in D$,都有 $|f(x)| \leq M$,或存在 m_1, m_2 ,使得对任意的 $x \in D$,有

$$m_1 \leq f(x) \leq m_2,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 D 内有界或称 $y=f(x)$ 在 D 内为有界函数;反之,称 $y=f(x)$ 在 D 内无界或称 $y=f(x)$ 在 D 内为无界函数.

如图 0-5, 若函数 $y=f(x)$ 在 D 内有界, 即存在一个正数 M , 使得对任意的 $x \in D$, 都有不等式 $|f(x)| \leq M$ 成立, 这在几何上表示曲线 $y=f(x)$ (或函数 $y=f(x)$ 的图像) 落在两直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例如, 如图 0-6, 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 上是有界函数, 但在 $(0, 2)$ 上却是无界函数.

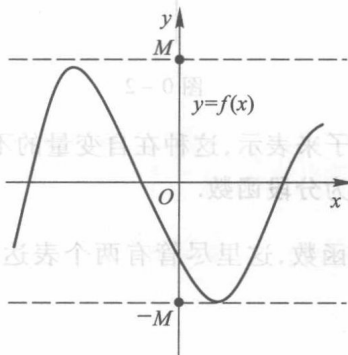


图 0-5

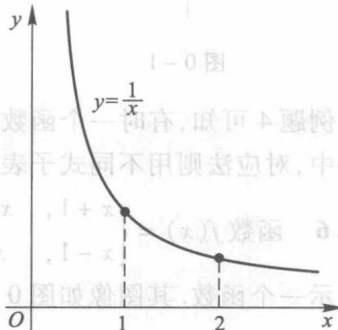


图 0-6

2. 函数的单调性(增减性)

设函数 $y=f(x)$ 在 D 内有定义, 且对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 > x_2$ 时, 若有

(1) $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 内是单调增加(上升)的函数, 记作

$$f(x) \nearrow, \quad x \in D.$$

(2) $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 内是单调减少(下降)的函数, 记作

$$f(x) \searrow, \quad x \in D.$$

例如, 函数 $y=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调上升的, 在 $(-\infty, 0)$ 内是单调下降的, 而在 $(-1, 1)$ 内不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$), 如果对任意的 $x \in D$ 有

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 内是奇(偶)函数.

奇函数的图像关于坐标原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称(如图 0-7).

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 T , 使得对于任意的 $x \in D, x \pm T \in D$, 且

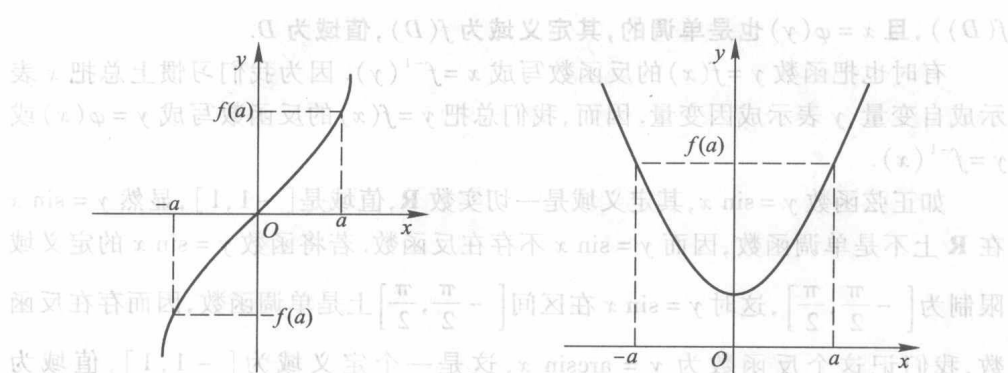


图 0-7

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.通常我们说周期函数的周期是指其最小正周期.

若 T 为 $f(x)$ 的周期,则有

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x);$$

$$f(x-T) = f((x-T)+T) = f(x),$$

从而得

$$f(x+kT) = f(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

周期函数的图像,只要把它在一个周期上的图像向左右“平移”就可得到.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,值域 $W=\{y|y=f(x), x \in D\}$,若 $y=f(x)$ 是其定义域 D 到其值域 W 的一一映射,则称其逆映射

$$f^{-1}: W \rightarrow D$$

为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=\varphi(y)$.这个函数的定义域为 W ,值域为 D ,相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

值得注意的是,并不是任何一个函数都存在反函数,如函数 $y=x^2 (x \in (-1,1))$ 就不存在反函数.但如果我们将函数 $y=f(x)$ 限制在它的单调区间 I 上,这样得到的函数就存在反函数,如将函数 $y=x^2 (x \in (-1,1))$ 的定义域限制在区间 $I_1=(-1,0)$ (或 $I_2=(0,1)$)上,我们就得到其反函数 $x=-\sqrt{y} (x=-\sqrt{y})$,一般地,我们有如下定理:

定理 1 若 $y=f(x) (x \in D)$ 是单调函数,则存在反函数 $x=\varphi(y) (y \in$

$f(D)$), 且 $x = \varphi(y)$ 也是单调的, 其定义域为 $f(D)$, 值域为 D .

有时也把函数 $y = f(x)$ 的反函数写成 $x = f^{-1}(y)$. 因为我们习惯上总把 x 表示成自变量, y 表示成因变量. 因而, 我们总把 $y = f(x)$ 的反函数写成 $y = \varphi(x)$ 或 $y = f^{-1}(x)$.

如正弦函数 $y = \sin x$, 其定义域是一切实数 $\mathbf{R}$, 值域是 $[-1, 1]$, 显然 $y = \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数, 因而 $y = \sin x$ 不存在反函数. 若将函数 $y = \sin x$ 的定义域限制为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 这时 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数, 因而存在反函数, 我们记这个反函数为 $y = \arcsin x$, 这是一个定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的函数.

事实上, $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数, 它们的关系如下:

- (1) $f(x)$ 的定义域是 $f^{-1}(x)$ 的值域, $f(x)$ 的值域是 $f^{-1}(x)$ 的定义域;
- (2) $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称;
- (3) $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$.

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 值域为 W , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W_1 , 若 $W_1 \subset D_1$, 则对 D 上的任意一个值 x , 由函数 $u = \varphi(x)$ 得到 $W_1 (\subset D_1)$ 中的一个值 u , 再通过函数 $y = f(u)$ 得到 W 中的一个值 y , 也就是说对任意的 D 上的值 x , 通过函数 $u = \varphi(x)$ 与 $y = f(u)$ 可确定 W 上的一个值, 从而由函数 $u = \varphi(x)$ 、 $y = f(u)$ 确定了一个函数, 这个函数称为函数 $u = \varphi(x)$ 与 $y = f(u)$ 构成的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 并称变量 u 为中间变量, 函数 $u = \varphi(x)$ 为中间函数.

关于复合函数要注意以下几点:

- (1) 并不是任意的两个函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 都能复合成一个函数.

例如, 函数 $y = \arcsin u$ 与函数 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个函数, 因为对任意的 x , 函数值 $u = 2 + x^2$ 都大于等于 2, 而函数 $y = \arcsin u$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 因而 $y = \arcsin(2 + x^2)$ 没有意义.

- (2) 函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域不一定是函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域.

例如, 函数 $y = \arcsin u$ 与函数 $u = x^2$ 的复合函数 $y = \arcsin x^2$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 而不是函数 $u = x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$.

四、基本初等函数

所谓的基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角

函数这五类函数。

1. 幂函数

幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数) 的定义域应根据 μ 的具体取值来确定, 常用的幂函数如表 0-1。

表 0-1

曲线名称	表达式	μ 取值	定义域	值域
抛物线	$y = x^2$	$\mu = 2$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$
立方抛物线	$y = x^3$	$\mu = 3$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
抛物线	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$\mu = \frac{1}{2}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$
双曲线	$y = x^{-1}$	$\mu = -1$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
半立方抛物线	$y = x^{\frac{3}{2}}$	$\mu = \frac{3}{2}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$

常用幂函数的图像如图 0-8。

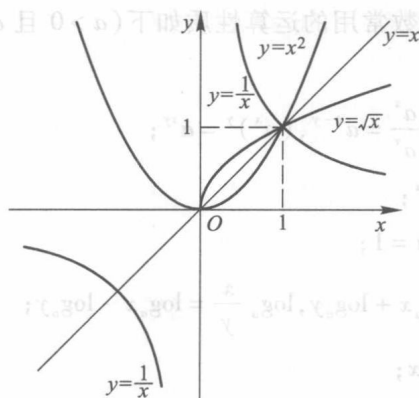


图 0-8

2. 指数函数与对数函数

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 与对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 互为反函数 (如表 0-2)。

表 0-2

函数名称	表达式	对 a 的限制	定义域	值域
指数函数	$y = a^x$	$a > 0$ 且 $a \neq 1$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
对数函数	$y = \log_a x$	$a > 0$ 且 $a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$

当 $a > 1$ 时指数函数与对数函数均为单调增加的函数; 当 $0 < a < 1$ 时, 它们均为单调减少的函数. 特别地, 当取 $a = e$ 时, 上面两个函数分别记为 $y = e^x$, $y = \log_e x = \ln x$, 这是两个常见函数.

指数函数与对数函数的图像如图 0-9.

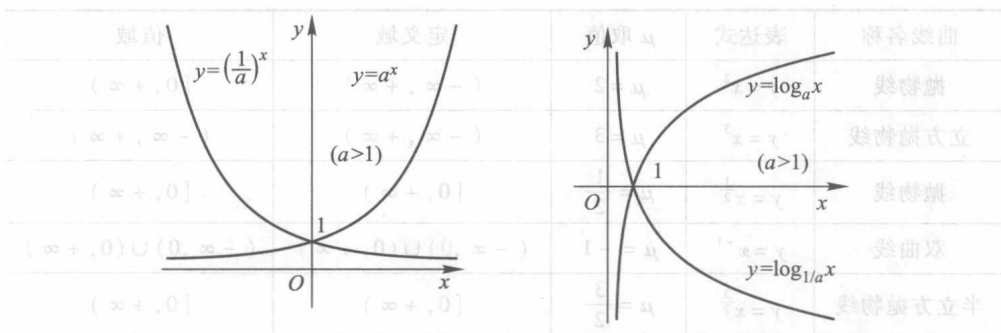


图 0-9

对数函数与指数函数常用的运算性质如下 ($a > 0$ 且 $a \neq 1$):

- (1) $a^0 = 1$;
- (2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$;
- (3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;
- (4) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$;
- (5) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- (6) $\log_a x^\lambda = \lambda \log_a x$;
- (7) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$;
- (8) $a^{\log_a x} = x$; $e^{\ln x} = x$.

3. 三角函数与反三角函数

常用三角函数和反三角函数如表 0-3.

表 0-3

函数名称	表达式	定义域	值域
正弦函数	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$
余弦函数	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$

续表

函数名称	表达式	定义域	值域
正切函数	$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$	$(-\infty, +\infty)$
余切函数	$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$	$(-\infty, +\infty)$
正割函数	$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
余割函数	$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$	$x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
反正弦函数	$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
反余弦函数	$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
反正切函数	$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
反余切函数	$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$

三角函数与反三角函数的图像如图 0-10.

