

高等数学引论

第一卷 第二分册

华 罗 庚

科学出版社

51.612
235
1-2

高等数学引论

第一卷 第二分册

华 罗 庚

科学出版社

1963

內 容 簡 介

本书是不久前出版的“高等数学引論”第一卷第一分册的繼續。本书除介紹多个变元的函数,带变数的貫,級数及积分,曲綫及曲面的微分性質,重积分,綫积分,面积分,場論, Fourier 級数,常微分方程組外,还介紹了这些理論的应用。

本书可作为高等学校教本或教学参考用书。如按本书授課,可酌情对內容作适当增減。

高等数学引论

第一卷 第二分册

罗庚 著

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963 年 11 月第 一 版

书号: 2883

1963 年 11 月第一次印刷

字数: 448,000

精裝: 1—6,500

开本: 787×1092 1/16

(京) 平裝: 1—1,500

印张: 21 1/2 插頁: 3

定价: 精裝本: 3.30 元
平裝本: 2.60 元

33000

| | |
|-----------------------------|----|
| 第十一章 积分学的应用 | 1 |
| § 1. 曲线的长度..... | 1 |
| § 2. 面积..... | 5 |
| § 3. 利用横断面算体积法..... | 7 |
| § 4. 旋转面的侧面积..... | 10 |
| § 5. 柱面的侧面积..... | 12 |
| § 6. 求重心..... | 13 |
| § 7. 转动惯量(或平方矩)..... | 16 |
| § 8. 流体压力..... | 18 |
| § 9. 功..... | 19 |
| 第十二章 多个变元的函数 | 21 |
| § 1. 变数..... | 21 |
| § 2. n 维空间..... | 22 |
| § 3. 邻域..... | 23 |
| § 4. 域..... | 25 |
| § 5. 极限与连续..... | 26 |
| § 6. 域内的连续函数..... | 29 |
| § 7. 偏微商与全微分..... | 29 |
| § 8. 齐次函数..... | 32 |
| § 9. 切平面..... | 33 |
| § 10. 沿一定方向的微商..... | 35 |
| § 11. 高阶偏微商..... | 36 |
| § 12. 隐函数..... | 39 |
| § 13. Taylor 展开..... | 41 |
| § 14. 极大与极小..... | 42 |
| § 15. 隐函数求极值法..... | 47 |
| § 16. 坐标变换..... | 49 |
| § 17. 三维空间的几个坐标系..... | 51 |
| 第十三章 带变数的级数及积分 | 55 |
| § 1. 一致收敛级数..... | 55 |
| § 2. 级数的微分积分..... | 57 |
| § 3. 围收敛..... | 59 |
| § 4. 级数的一致收敛性..... | 62 |
| § 5. 一致收敛的一些判别条件..... | 66 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| § 6. 一致收敛的 Abel 及 Dirichlet 判别法 | 67 |
| § 7. Abel 定理及 Tauber 定理 | 69 |
| § 8. 求隐函数的逐渐逼近法 | 70 |
| § 9. 无穷乘积 | 73 |
| § 10. 无穷乘积的收敛条件 | 74 |
| § 11. 无穷乘积的对数 | 75 |
| § 12. 无穷乘积的一致收敛 | 78 |
| § 13. 带参数的积分 | 81 |
| § 14. 积分号下求微分 | 85 |
| § 15. 积分号下求积分 | 87 |
| § 16. 上下限依于参变数的积分 | 93 |
| § 17. 重贯 | 94 |
| § 18. 二重级数 | 94 |
| § 19. 级数的乘积 | 101 |
| § 20. 多变数的幂级数 | 103 |
| § 21. 利用级数解隐函数 | 104 |
| § 22. 常微分方程的解的存在性与唯一性 | 108 |
| § 23. 积分方程解的存在性与唯一性 | 110 |
| § 24. 微分方程组的解的存在性与唯一性 | 112 |
| § 25. 压缩映射原理 | 114 |
| § 26. 利用幂级数解微分方程 | 115 |
| § 27. 微分方程组 | 116 |
| § 28. 偏微分方程 | 117 |
| 第十四章 曲线的微分性质 | 121 |
| § 1. 矢量的微商 | 121 |
| § 2. 平面上的运动 | 123 |
| § 3. 平面曲线的曲率 | 124 |
| § 4. 曲线的本性方程 | 126 |
| § 5. 曲率圆与渐屈线 | 129 |
| § 6. 一般的一阶微分方程 | 131 |
| § 7. 包络线 | 134 |
| § 8. 追踪问题 | 136 |
| § 9. 空间曲线的基本元素 | 139 |
| § 10. 原坐标表示法 | 141 |
| § 11. 螺旋线 | 143 |
| § 12. 空间曲线的唯一性定理 | 144 |
| § 13. 曲率圆与曲率球 | 147 |
| § 14. 曲面族与空间曲线族的包络 | 148 |
| 第十五章 重积分 | 151 |

| | |
|--|-----|
| § 1. 重积分的定义 | 151 |
| § 2. 可求面积的域 | 154 |
| § 3. 重积分換坐标 | 156 |
| § 4. 重积分的基本性質 | 159 |
| § 5. 三重积分 | 161 |
| § 6. 矩 | 164 |
| § 7. 曲面的面积 | 167 |
| § 8. 物質对一点的引力 | 170 |
| 补充 | 174 |
| § 9. 求面积 | 174 |
| § 10. 求容积 | 176 |
| § 11. 求表面积 | 183 |
| 第十六章 綫积分, 面积分 | 190 |
| § 1. 曲綫积分的定义(第一型) | 190 |
| § 2. 曲綫积分(第二型) | 192 |
| § 3. 曲綫积分求面积 | 196 |
| § 4. Green 公式与 Остроградский 公式 | 198 |
| § 5. Stokes 公式 | 200 |
| § 6. 与途径无关的曲綫积分 | 204 |
| § 7. 多連通域 | 206 |
| § 8. 空間与路径无关的曲綫积分 | 208 |
| § 9. 流体的稳定流动 | 209 |
| 第十七章 純量場与矢量場 | 212 |
| § 1. 定义 | 212 |
| § 2. 三种算子的性質 | 213 |
| § 3. 三种算子的选用 | 214 |
| § 4. 梯度的几何意义 | 215 |
| § 5. Остроградский-Gauss 公式、Stokes 公式的矢量表达形式 | 217 |
| § 6. Nabla 算子 | 220 |
| § 7. 曲綫坐标及換变数 | 222 |
| § 8. 平面場 | 226 |
| 补充 | 231 |
| § 9. 在流体力学上的应用 | 231 |
| § 10. 声的传播 | 236 |
| § 11. 热的传导 | 237 |
| 第十八章 曲面的微分性質 | 240 |
| § 1. 代数工具 | 240 |
| § 2. Gauss 第一微分型 | 242 |
| § 3. Gauss 第二微分型 | 245 |

| | |
|-----------------------------------|------------|
| § 4. 曲面上曲綫的曲率 | 246 |
| § 5. 点的分类 | 247 |
| § 6. 曲率綫 | 248 |
| § 7. Euler 公式 | 250 |
| § 8. Olinde Rodrigues 公式 | 251 |
| § 9. Dupin 定理 | 252 |
| § 10. Gauss 曲率的几何意义 | 254 |
| § 11. 曲率中值的几何意义 | 255 |
| § 12. 活动标架 | 256 |
| § 13. 曲面的可展性 | 258 |
| § 14. 曲面族与偏微分方程 | 258 |
| 补充 用张量分析来处理曲面論 | 262 |
| § 15. 第一基本型 | 262 |
| § 16. 张量 | 263 |
| § 17. 基本方程之一——Gauss 方程 | 266 |
| § 18. 基本方程之一——Weingarten 方程 | 268 |
| § 19. Gauss 与 Codazzi 方程 | 268 |
| § 20. 曲率张量 | 269 |
| 第十九章 Fourier 級数 | 271 |
| § 1. 三角函数的正交性 | 271 |
| § 2. 几个三角級数的和 | 272 |
| § 3. Dirichlet 积分 | 274 |
| § 4. 平方中值誤差及 Bessel 不等式 | 275 |
| § 5. 收敛判別条件 | 277 |
| § 6. 在区間 $(0, \pi)$ 上的展开式 | 281 |
| § 7. Gibbs 現象 | 284 |
| § 8. 均值求和 | 286 |
| § 9. Parseval 等式 | 288 |
| § 10. Fourier 級数可以逐項求积分 | 289 |
| § 11. Fourier 系数的性質 | 291 |
| § 12. Fourier 級数的其他形式 | 293 |
| § 13. 实用調和分析——有限調和分析 | 293 |
| § 14. Fourier 积分 | 299 |
| § 15. Fourier 变換 | 300 |
| § 16. Poisson 公式 | 301 |
| § 17. Fourier 变換的复数形式 | 303 |
| § 18. 其他变換 | 304 |
| 第二十章 常微分方程組 | 306 |
| § 1. 化任意的微分方程組为一阶微分方程組 | 306 |

| | |
|-------------------------------------|------------|
| § 2. 常微分方程組 | 307 |
| § 3. 質点的运动方程 | 310 |
| § 4. 人造卫星的軌道方程 | 313 |
| § 5. 軌道討論——第一、第二宇宙速度..... | 316 |
| § 6. 第三宇宙速度 | 318 |
| § 7. 質点組——多体問題 | 319 |
| § 8. Lagrange 綫性方程 | 321 |
| § 9. 綫性方程的一般解 | 326 |
| § 10. 一般一級偏微分方程的解法——Charpit 法 | 327 |
| § 11. 上节方法的特例..... | 329 |
| 索引一 | 332 |
| 索引二 | 336 |

第十一章 积分学的应用

§ 1. 曲线的长度

弧长的定义. 假定 A, B 是給定的曲线上的两点, 以这两点为端点作这曲线的内接折线, 当这折线的边数无限增加, 而且每边的长度都趋向于 0 时, 这折线的周界长趋向的极限 (如果这极限存在的话) 叫做这曲线在 A, B 两点之间的弧长.

假定所給的曲线的参变数表示是

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (C)$$

当 $t = \alpha$ 及 β 时所給出的点就是 A 点与 B 点. 假定 $\alpha < \beta$, 当 t 由 α 变到 β 时, (x, y) 就沿着曲线 (C) 由点 A 变到点 B . 又假定 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都有連續的微商, 在弧上取一系列点

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{v-1}, M_v, \dots, M_{n-1}, M_n = B$$

各对应于

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{v-1}, t_v, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

把 M_v 的坐标記作

$$x_v = \varphi(t_v), \quad y_v = \psi(t_v),$$

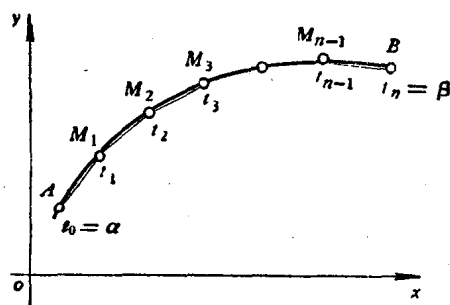


图 1

則 M_{v-1} 与 M_v 之間的距离等于

$$\sqrt{(x_v - x_{v-1})^2 + (y_v - y_{v-1})^2}.$$

因此折线的总长度等于

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^n \sqrt{(x_v - x_{v-1})^2 + (y_v - y_{v-1})^2} \\ &= \sum_{v=1}^n \sqrt{[\varphi(t_v) - \varphi(t_{v-1})]^2 + [\psi(t_v) - \psi(t_{v-1})]^2}. \end{aligned}$$

依定义, A, B 間的弧长 s 等于

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \sqrt{(\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1}))^2 + (\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1}))^2}.$$

由 Lagrange 公式, 我們有

$$\begin{aligned} \varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1}) &= (t_\nu - t_{\nu-1})\varphi'(\tau'_\nu), \\ \psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1}) &= (t_\nu - t_{\nu-1})\psi'(\tau''_\nu), \end{aligned}$$

这儿 τ'_ν, τ''_ν 都是 $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ 之間的值. 所以

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1}))^2 + (\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1}))^2} \\ &= (t_\nu - t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau''_\nu)}. \end{aligned}$$

命

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau''_\nu)} = \sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau'_\nu)} + \eta_\nu,$$

則得

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \{\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau'_\nu)} + \eta_\nu\} (t_\nu - t_{\nu-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau'_\nu)} (t_\nu - t_{\nu-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu (t_\nu - t_{\nu-1}). \end{aligned}$$

前者等于

$$\int_a^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

再証后者的极限等于 0. 由不等式

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}| \leq |b - b_1|$$

(这不等式的証明是:

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} = \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} (b - b_1)$$

可知

$$|\eta_\nu| < |\psi'(\tau''_\nu) - \psi'(\tau'_\nu)|.$$

根据 $\psi'(t)$ 的一致連續性, 給了任意 $\varepsilon > 0$, 可找到一个 δ , 使当 $|t'' - t'| < \delta$ 时

$$|\psi'(t'') - \psi'(t')| < \varepsilon.$$

即当 $\max |t_\nu - t_{\nu-1}| < \delta$ 时,

$$\left| \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu (t_\nu - t_{\nu-1}) \right| < \varepsilon(\beta - \alpha).$$

因得所証.

A, B 两点間的弧长可由公式

$$s = \int_a^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

表出来.

如果 τ 是一变点, 則

$$s(\tau) = \int_a^\tau \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

对积分的上限求微商得

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)},$$

再由

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \psi'(t) = \frac{dy}{dt}$$

得出

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

所以求弧长的公式可以写成为

$$s = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

这里 (A) , (B) 各表依照积分变量对应于曲线上点 A , 点 B 这积分所应当取的上下限.

特别是, 如果曲线由

$$y = f(x)$$

表示, 并且 A, B 各对应于 $x = a, x = b$, 则弧长公式变为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

又如果是极坐标形式

$$r = f(\theta),$$

由直角坐标 x, y 与极坐标的关系

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

可得(这就可以看成为以 θ 为参变数的方程)

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

及

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

所以

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}.$$

如果 A 与 B 各对应于角 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 的点, 则极坐标所表出的弧长是

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

ds 的极坐标表达式也可以由图 2 得到. 当弧 MM' 非常小时, 可以用 M, M' 间的弦代替这段弧. 这弦恰好是直角三角形 MNM' 的弦, 而其他边各与 $r d\theta, dr$ 近似相等.

注意, 曲线的长度是有方向的, 如果我们假定了正向是由 A 到 B , 则由 B 到 A 的度量就是以上的长度加一负号, 在用参变数表示法时, 也请注意这点, 要看准由 α 变到 β 是否就是 A 到 B 的方向.

例 1. 求 $(0, 0)$ 与 (a, a^2) 之间抛物线 $y = x^2$ 的弧长 s .

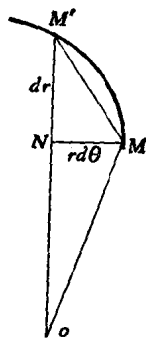


图 2

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2a} \sqrt{1 + t^2} dt \\
 &= \frac{1}{4} [2a\sqrt{1 + 4a^2} + \log(2a + \sqrt{1 + 4a^2})].
 \end{aligned}$$

例 2. 求对数螺线

$$r = Ce^{a\theta} \quad (C > 0)$$

在 $\theta = \alpha$ 与 $\theta = \beta$ 之间的弧长, 这儿 C 为常数.

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = C \sqrt{1 + a^2} \int_{\alpha}^{\beta} e^{a\theta} d\theta \\
 &= \frac{C\sqrt{1 + a^2}}{a} (e^{a\beta} - e^{a\alpha}).
 \end{aligned}$$

例 3. 设有一个半径是 a 的圆在一条直线上滚动, 这圆上一个固定点 M 的轨迹称为旋轮线, 求 M 与直线相交的两点之间的弧长.

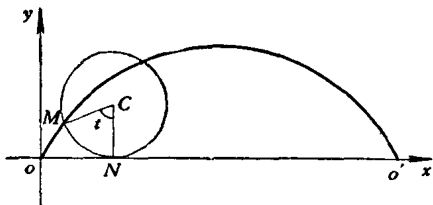


图 3

命固定直线为 x 轴, M 与直线两邻接的交点是 o 与 o' , 圆心是 C , $\angle MCN = t$, 则可知旋轮线有如下的参数表示:

$$\begin{aligned}
 x &= a(t - \sin t), \\
 y &= a(1 - \cos t),
 \end{aligned}$$

故弧 $\widehat{oo'}$ 的长度为

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
 &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a.
 \end{aligned}$$

习题 1. 求星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 的周长.

习题 2. 求圆的渐伸线

$$x = a(t \sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

当 $t = 0$ 至 $t = \theta$ 时的弧长.

习题 3. 求心脏线 $r = a \cos \theta + a$ 的周长.

习题 4. 一条有重量的链子, 两端悬起, 链子的方程可以写为

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

求当 $x = 0$ 至 $x = b$ 之间的弧长.

§ 2. 面 积

我們已經証明过在曲綫

$$y = f(x)$$

与 x 軸, $x = a$, $x = b$ 之間的面積等于

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

我們現在研究參变数表示下的情况, 仍假定

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

此处的 φ 与 ψ 有連續微商. 如果当 t 由 t_0 变到 t_1 时, x 是增函数, 則在此曲綫与 x 軸之間, 又对应 t_0, t_1 的縱坐标之間的面積等于

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt.$$

如果我們有一條閉的曲綫 C , 它是一个单圈形式的曲綫, 即任一平行于 x 軸或 y 軸的直綫至多和它交于兩点. 假定 C 上的点可以由參变数表示, 并且当 t 由 t_0 变到 t_1 , P 依一定方向走完一圈. 我們假定 P 取这样的走向, 使当 P 按这方向沿 C 运动时, 由 C 所围成的面積的点总在 P 的左边. 我們現在来研究这个曲綫 C 中所包的面積.

假定这曲綫在 $x = a, x = b$ 之間, 且这两直綫与 C 有公共点, 曲綫的上一部分的方程为 $y = f_1(x)$, 下一部分为 $y = f_2(x)$.

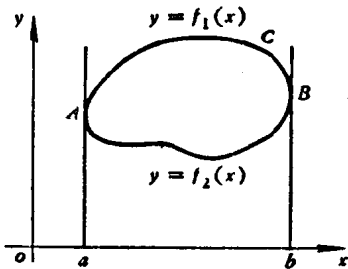


图 4

不妨假定当 t 由 t_0 变为 t' 时, 曲綫由 A 沿 $y = f_2(x)$ 到 B . 由 t' 变为 t_1 时, 曲綫由 B 沿 $y = f_1(x)$ 到 A . 如此則得所求的面積是

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx &= - \int_{t'}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t'} \psi(t) \varphi'(t) dt = - \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt. \end{aligned}$$

同样可以証明, 这面積也等于

$$\int_{t_0}^{t_1} x \frac{dy}{dt} dt$$

及

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

例 1. 求橢圓

$$x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1+t^2}$$

所包的面積.

当 t 由 $-\infty$ 变至 ∞ 时, 图线走了一圈, 故面积为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} dt \\ &= ab \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = ab \operatorname{tg}^{-1} t \Big|_{-\infty}^{\infty} = ab\pi. \end{aligned}$$

即椭圆面积等于长半轴和短半轴的乘积的 π 倍, 特别当 $a = b$ 时, 便得到圆的面积.

例 2. 求 $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$ 所包的面积.

$$\begin{aligned} \text{所求的面积} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos^3 t \cdot 3b \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot b \sin^3 t] dt \\ &= \frac{3}{2} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{16} ab \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8} \pi ab. \end{aligned}$$

例 3. 求曲线

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

的围线部分的面积.

我们已知参变数表示法:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

当 t 由 0 到 ∞ 时, 沿这围线走了一圈, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{9a^2 t^2 dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{3a^2}{2(1+t^3)} \Big|_0^{\infty} = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

于是面积等于 $\frac{3}{2} a^2$.

现在考虑极坐标的情况. 由

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

及

$$dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta, \quad dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta$$

可知

$$\frac{1}{2} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

因此面积公式的极坐标表示法是

$$\frac{1}{2} \int r^2 d\theta.$$

如果要求角 $\theta = \alpha$ 与 $\theta = \beta$ 之间的 $r = r(\theta)$ 的扇形面积, 就是

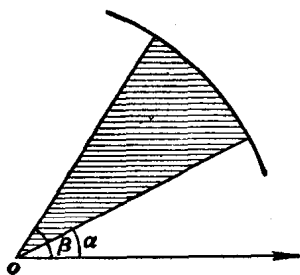


图 5

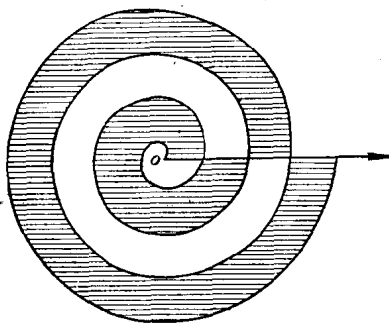


图 6

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

例 4. 求 Archimede 螺线 $r = a\theta$ 一环的面积.

所求的面积为

$$\frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{a^2 \theta^3}{6} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

例 5. 求蜗线

$$r = a \cos \theta + b, \quad (b \geq a)$$

所围成的面积.

所求的面积为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} a^2 + b^2 \right) \theta + \frac{1}{4} a^2 \sin 2\theta + 2ab \sin \theta \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} (a^2 + 2b^2). \end{aligned}$$

例 6. 求双纽线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 所围成的面积.

总面积是右边一块的面积的两倍, 故所求的面积为

$$2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 2a^2.$$

习题. 求旋轮线的一支:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

与 x 轴所围成的面积.

§ 3. 利用横断面算体积法

用 V 代表一个立体的体积, 我们取一条直线作为坐标轴, 其上取一点作为原点. 在离原点 x 处作这轴的一个垂直平面, 如果知道所求立体在这垂直平面上所截得的面积等于 $A(x)$, 则可由定积分来计算这立体的体积.

再假定这立体在 $x = a$ 与 $x = b$ 二点所作的垂直平面之間，我們在 a, b 間作若干断面把立体分为若干个单元。考虑这样的一个单元，它界于两断面 x 与 $x + \Delta x$ 之間。

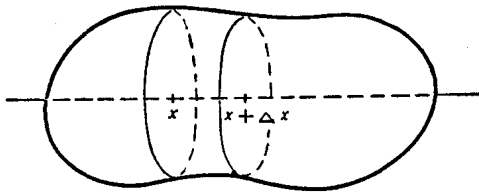


图 7

以 Δx 作高，以 x 的断面作底做出的正柱体的体积等于

$$A(x)\Delta x.$$

于是我們得到所要求的体积 V 的近似表达式：

$$\Sigma A(x)\Delta x.$$

当断面无限增加， Δx 的最大值趋向于 0 时，取极限，得一定积分，此即体积。因而得出以下的結論：

如果已知一个給定的立体的垂直于一定方向所有的横断面的面积，取这些横断面的垂直方向作为 x 軸的方向，則这立体的体积由公式

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

表达，其中 $A(x)$ 是横坐标为 x 的横断面的面积， a, b 为这立体的两端断面的横坐标。

如果我們的立体是一个旋轉体，即先給定一条曲綫 $y = f(x)$ ，繞 x 軸旋轉所得出的体，我們的横断面就是以 y 为半径的圓，所以

$$A(x) = \pi y^2,$$

而体积就等于

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

例 1. 求底半径为 r ，高为 h 的圓錐体的体积 V 。

命錐体的軸为 x 軸，錐体的頂为原点，以垂直于 x 軸的平面去截这个圓錐体，得一个圓，半径为

$$y = \frac{r}{h} x.$$

因此圓錐体的体积为

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

即高乘底面积的 $1/3$ 。

例 2. 設橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 繞 x 軸旋轉，求此迴轉橢圓体的体积 V ：

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

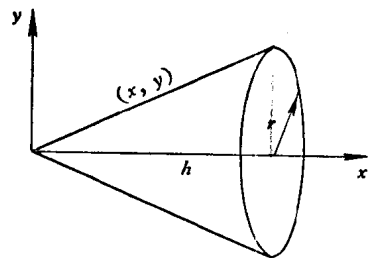


图 8

例 3. 求抛物体 $2az = x^2 + y^2$ 与球 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ 的公共部分的体积.

以垂直于 z 轴的平面来截这两个立体, 当用 $z = a$ 这张平面去截时, 截下来的面积相等, 称为截面.

当用平面 $z = \alpha (\alpha < a)$ 去截它们的公共部分时, 得半径为 $\sqrt{2a\alpha}$ 的圆. 但当 $\alpha > a$ 时, 就得到半径为 $\sqrt{3a^2 - \alpha^2}$ 的圆. 因此体积等于

$$2\pi a \int_0^a z dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2) dz = \frac{\pi a^3}{3} (6\sqrt{3} - 5).$$

例 4. 以通过圆柱体底的直径的平面去截这圆柱体, 由它切下来的几何形体, 称为圆柱弓形体. 试求以与底面成角 α 的平面去截底的半径为 a 的圆柱体时, 所得的圆柱弓形体的体积.

取截面通过的直径所在的直线为 x 轴和底面的圆心为原点. 以垂直于 x 轴的平面去截时, 得到一个三角形, 其面积为

$$\frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

因此弓形体积等于

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} a^2 h,$$

此处 h 是圆柱弓形体的高.

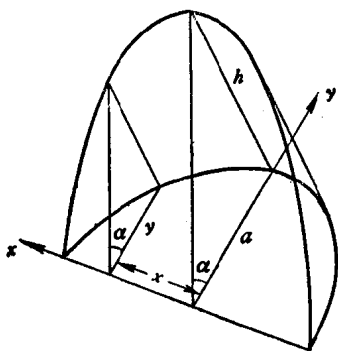


图 9

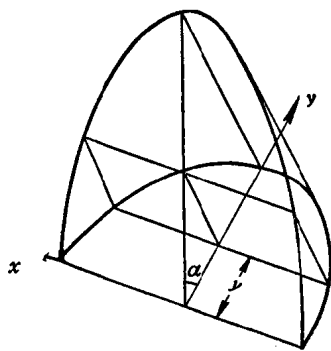


图 10

若以垂直于 y 轴的平面去截时, 得到的是矩形, 其面积等于

$$2xy \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot y \sqrt{a^2 - y^2}.$$

所以圆柱弓形体的体积等于

$$2 \operatorname{tg} \alpha \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} a^2 h.$$

习题 1. 试求对应于 $x = 0$ 及 $x = b$ 的一段悬链线

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

绕 x 轴旋转所得的体积.