高等数学引论

第一卷　第二分册

华罗庚

科学出版社

高等数学引论

第一卷 第二分册

华 罗 庚

科 学 出 版 社

1963

內 容 簡 介

本书是不久前出版的"高等数学引論"第一卷第一分册的継續. 本书除介紹多个变元的函数,带变数的積,級数及积分,曲綫及曲面的微分性质,重积分,綫积分,面积分,場論, Fourier 級数,常微分方程組外,还介紹了这些理論的应用.

本书可作为高等学校教本或教学参考用书. 如按本书授課,可酌情对內容作适当增減.

高等数学引论

第一卷 第二分册

华罗庚 著

*

科学出版社 出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963 年 11 月第 一 版　　书号:2883

1963 年 11 月第一次印刷　　字数:448,000

(京) 精装:1—6,500　　开本:787×1092 1/16

平装:1—1,500　　印张:21 1/2 插頁:3

定价: 精装本: 3.30 元

平装本: 2.60 元

目　录

第十一章　积分学的应用

§1. 曲綫的长度

弧长的定义. 假定 A, B 是給定的曲綫上的两点，以这两点为端点作这曲綫的內接折綫，当这折綫的边数无限增加，而且每边的长度都趋向于 0 时，这折綫的周界长趋向的极限（如果这极限存在的話）叫做这曲綫在 A, B 两点之間的弧长.

假定所給的曲綫的参变数表示是

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{C}$$

当 $t = \alpha$ 及 β 时所給出的点就是 A 点与 B 点. 假定 $\alpha < \beta$，当 t 由 α 变到 β 时，(x, y) 就沿着曲綫 (C) 由点 A 变到点 B. 又假定 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都有連續的微商，在弧上取一列点

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$$

各对应于

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

把 M_ν 的坐标記作

$$x_\nu = \varphi(t_\nu), \quad y_\nu = \psi(t_\nu),$$

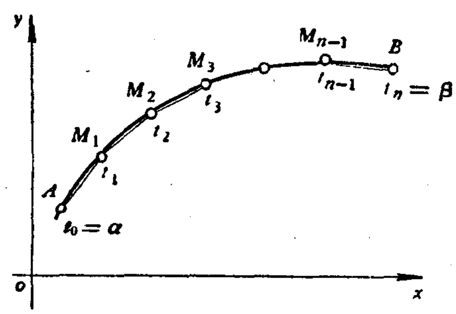

图　1

则 $M_{\nu-1}$ 与 M_ν 之間的距离等于

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2}.$$

因此折綫的总长度等于

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})]^2 + [\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1})]^2}.$$

依定义，A，B 間的弧长 s 等于

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}))^2+(\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}))^2}.$$

由 Lagrange 公式，我們有

$$\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1})=(t_\nu-t_{\nu-1})\varphi'(\tau_\nu'),$$
$$\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1})=(t_\nu-t_{\nu-1})\psi'(\tau_\nu''),$$

这儿 τ_ν'，τ_ν'' 都是 $(t_{\nu-1},\ t_\nu)$ 之間的值. 所以

$$\sqrt{(\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}))^2+(\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}))^2}$$
$$=(t_\nu-t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau_\nu')+\psi'^2(\tau_\nu'')}.$$

命

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_\nu')+\psi'^2(\tau_\nu'')}=\sqrt{\varphi'^2(\tau_\nu')+\psi'^2(\tau_\nu')}+\eta_\nu,$$

則得

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\{\sqrt{\varphi'^2(\tau_\nu')+\psi'^2(\tau_\nu')}+\eta_\nu\}(t_\nu-t_{\nu-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau_\nu')+\psi'^2(\tau_\nu')}(t_\nu-t_{\nu-1})+\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu-t_{\nu-1}).$$

前者等于

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

再証后者的极限等于 0. 由不等式

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}|\leqslant|b-b_1|$$

(这不等式的証明是：

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}=\frac{b+b_1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}(b-b_1))$$

可知

$$|\eta_\nu|<|\psi'(\tau_\nu'')-\psi'(\tau_\nu')|.$$

根据 $\psi'(t)$ 的一致連續性，給了任意 $\varepsilon>0$，可找到一个 δ，使当 $|t''-t'|<\delta$ 时

$$|\psi'(t'')-\psi'(t')|<\varepsilon.$$

卽当 $\max|t_\nu-t_{\nu-1}|<\delta$ 时，

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu-t_{\nu-1})\right|<\varepsilon(\beta-\alpha).$$

因得所証.

A，B 两点間的弧长可由公式

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

表出来.

如果 τ 是一变点，則

$$s(\tau)=\int_\alpha^\tau\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

对积分的上限求微商得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)},$$

再由

$$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt},\quad \psi'(t)=\frac{dy}{dt}$$

得出

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,\quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

所以求弧长的公式可以写成为

$$s=\int_{(A)}^{(B)}ds=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

这里 (A), (B) 各表依照积分变量对应于曲綫上点 A,点 B 这积分所应当取的上下限.

特别是,如果曲綫由

$$y=f(x)$$

表示,并且 A, B 各对应于 $x=a$, $x=b$, 則弧长公式变为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

又如果是极坐标形式

$$r=f(\theta),$$

由直角坐标 x, y 与极坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

可得(这就可以看成为以 θ 为参变数的方程)

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta,$$
$$dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta,$$

及

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2\,d\theta^2,$$

所以

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}.$$

如果 A 与 B 各对应于角 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 的点,則极坐标所表出的弧长是

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

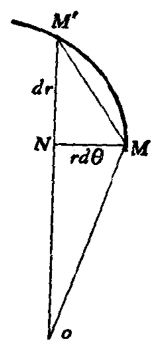

图 2

ds 的极坐标表达式也可以由图 2 得到. 当弧 MM' 非常小时,可以用 M, M' 間的弦代替这段弧. 这弦恰好是直角三角形 MNM' 的弦,而其他边各与 $rd\theta$, dr 近似相等.

注意,曲綫的长度是有方向的,如果我們假定了正向是由 A 到 B, 則由 B 到 A 的度量就是以上的长度加一負号,在用参变数表示法时,也請注意这点,要看准由 α 变到 β 是否就是 A 到 B 的方向.

例 1. 求 $(0, 0)$ 与 (a, a^2) 之間抛物綫 $y=x^2$ 的弧长 s.

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[2a\sqrt{1+4a^2}+\log\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)\right].$$

例 2. 求对数螺綫

$$r=Ce^{a\theta}\ (C>0)$$

在 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之間的弧长，这儿 C 为常数.

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=C\sqrt{1+a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}d\theta$$

$$=\frac{C\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\beta}-e^{a\alpha}\right).$$

例 3. 設有一个半径是 a 的圆在一条直綫上滚动，这圆上一个固定点 M 的軌迹称为旋輪綫，求 M 与直綫相交的两点之間的弧长.

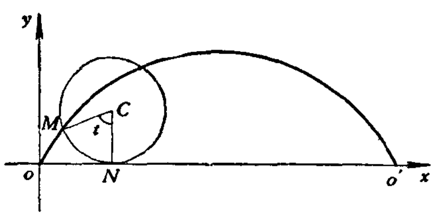

图 3

命固定直綫为 x 軸，M 与直綫两邻接的交点是 o 与 o'，圆心是 C，$\angle MCN=t$，則可知旋輪綫有如下的参数表示：

$$x=a(t-\sin t),$$
$$y=a(1-\cos t),$$

故弧 $\overset{\frown}{oo'}$ 的长度为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a.$$

習題 1. 求星形綫 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 的周长.

習題 2. 求圆的漸伸綫

$$x=a(t\sin t+\cos t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$$

当 $t=0$ 至 $t=\theta$ 时的弧长.

習題 3. 求心脏綫 $r=a\cos\theta+a$ 的周长.

習題 4. 一条有重量的鏈子，两端悬起，鏈的方程可以写为

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

求当 $x=0$ 至 $x=b$ 之間的弧长.

§2. 面　　积

我們已經証明过在曲綫

$$y = f(x)$$

与 x 軸，$x = a$，$x = b$ 之間的面积等于

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

我們現在研究参变数表示下的情况，仍假定

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

此处的 φ 与 ψ 有連續微商. 如果当 t 由 t_0 变到 t_1 时，x 是增函数，则在此曲綫与 x 軸之間，又对应 t_0，t_1 的纵坐标之間的面积等于

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt.$$

如果我們有一条閉的曲綫 C，它是一个单圈形式的曲綫，即任一平行于 x 軸或 y 軸的直綫至多和它交于两点. 假定 C 上的点可以由参变数表示，并且当 t 由 t_0 变到 t_1，P 依一定方向走完一圈. 我們假定 P 取这样的走向，使当 P 按这方向沿 C 运动时，由 C 所围成的面积的点总在 P 的左边. 我們現在来研究这个曲綫 C 中所包的面积.

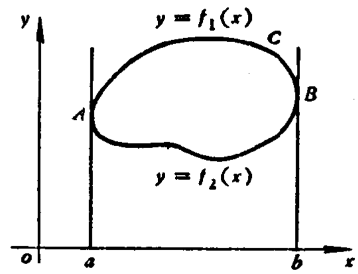

图　4

假定这曲綫在 $x = a$，$x = b$ 之間，且这两直綫与 C 有公共点，曲綫的上一部分的方程为 $y = f_1(x)$，下一部分为 $y = f_2(x)$.

不妨假定当 t 由 t_0 变为 t' 时，曲綫由 A 沿 $y = f_2(x)$ 到 B. 由 t' 变为 t_1 时，曲綫由 B 沿 $y = f_1(x)$ 到 A. 如此則得所求的面积是

$$\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = -\int_{t'}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t'} \psi(t) \varphi'(t) dt = -\int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt.$$

同样可以証明，这面积也等于

$$\int_{t_0}^{t_1} x \frac{dy}{dt} dt$$

及

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

例 1. 求椭圆

$$x = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1 + t^2}$$

所包的面积.

当 t 由 $-\infty$ 变至 ∞ 时，图綫走了一圈，故面积为

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=ab\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=ab\,\mathrm{tg}^{-1}t\Big|_{-\infty}^{\infty}=ab\pi.$$

即椭圓面积等于长半軸和短半軸的乘积的 π 倍，特别当 $a=b$ 时，便得到圓的面积.

例 2. 求 $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ 所包的面积.

$$\text{所求的面积}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t+3a\cos^2 t\sin t\cdot b\sin^3 t]dt$$

$$=\frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{16}ab\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi ab.$$

例 3. 求曲綫

$$x^3+y^3=3axy$$

的围綫部分的面积.

我們已知参变数表示法：

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

当 t 由 0 到 ∞ 时，沿这围綫走了一圈，所以

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{9a^2t^2dt}{(1+t^3)^2}=-\frac{3a^2}{2(1+t^3)}\Big|_0^{\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

于是面积等于 $\frac{3}{2}a^2$.

現在考虑极坐标的情况. 由

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

及

$$dx=dr\cos\theta-r\sin\theta\,d\theta,\quad dy=dr\sin\theta+r\cos\theta\,d\theta$$

可知

$$\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}r^2d\theta.$$

因此面积公式的极坐标表示法是

$$\frac{1}{2}\int r^2d\theta.$$

如果要求角 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之間的 $r=r(\theta)$ 的扇形面积，就是

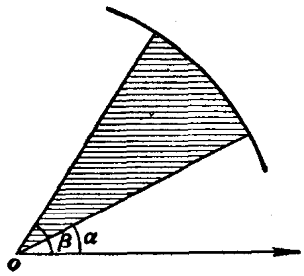

图 5

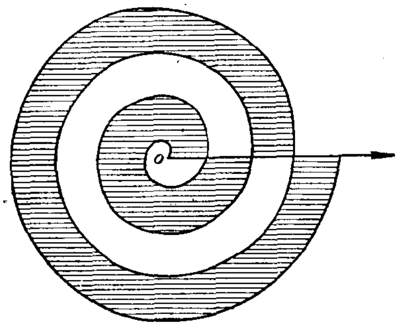

图 6

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta.$$

例 4. 求 Achimede 螺綫 $r = a\theta$ 一环的面积.

所求的面积为

$$\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta = \frac{a^2\theta^3}{6}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

例 5. 求蝸綫

$$r = a\cos\theta + b, \quad (b \geqslant a)$$

所围成的面积.

所求的面积为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta + b)^2d\theta\\ &\quad= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\theta + \frac{1}{4}a^2\sin 2\theta + 2ab\sin\theta\right]\Big|_0^{2\pi}\\ &\quad= \frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2).\end{aligned}$$

例 6. 求双紐綫 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 所围成的面积.

总面积是右边一块的面积的两倍,故所求的面积为

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta\,d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta = 2a^2.$$

習題. 求旋輪綫的一支:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

与 x 軸所围成的面积.

§ 3. 利用横断面算体积法

用 V 代表一个立体的体积,我們取一条直綫作为坐标軸,其上取一点作为原点. 在离原点 x 处作这軸的一个垂直平面,如果知道所求立体在这垂直平面上所截得的面积等于 $A(x)$,则可由定积分来計算这立体的体积.

再假定这立体在 $x=a$ 与 $x=b$ 二点所作的垂直平面之間，我們在 a, b 間作若干断面把立体分为若干个单元. 考虑这样的一个单元，它界于两断面 x 与 $x+\Delta x$ 之間. 以 Δx 作高，以 x 的断面作底做出的正柱体的体积等于

$$A(x)\Delta x.$$

于是我們得到所要求的体积 V 的近似表达式:

$$\Sigma A(x)\Delta x.$$

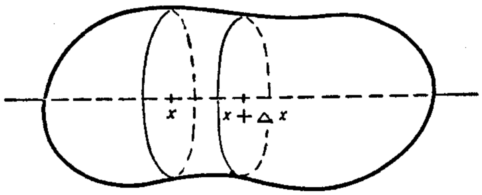

图 7

当断面无限增加，Δx 的最大值趋向于 0 时，取极限，得一定积分，此卽体积. 因而得出以下的結論:

如果已知一个給定的立体的垂直于一定方向所有的横断面的面积，取这些横断面的垂直方向作为 x 軸的方向，則这立体的体积由公式

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

表达，其中 $A(x)$ 是横坐标为 x 的横断面的面积，a, b 为这立体的两端断面的横坐标.

如果我們的立体是一个旋轉体，卽先給定一条曲綫 $y=f(x)$，繞 x 軸旋轉所得出的体，我們的横断面就是以 y 为半径的圓，所以

$$A(x)=\pi y^2,$$

而体积就等于

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

例 1. 求底半径为 r，高为 h 的圓錐体的体积 V.

命錐体的軸为 x 軸，錐体的頂为原点，以垂直于 x 軸的平面去截这个圓錐体，得一个圓，半径为

$$y=\frac{r}{h}x.$$

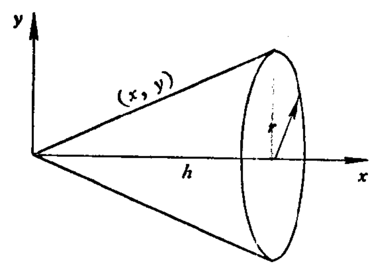

图 8

因此圓錐体的体积为

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

卽高乘底面积的 1/3.

例 2. 設椭圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞 x 軸旋轉，求此迴轉椭圓体的体积 V:

$$V=\pi\int_{-a}^a y^2\,dx=\pi\int_{-a}^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 3. 求抛物体 $2az=x^2+y^2$ 与球 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 的公共部分的体积.

以垂直于 z 軸的平面来截这两个立体.当用 $z=a$ 这张平面去截时,截下来的面积相等,称为截口.

当用平面 $z=\alpha(\alpha<a)$ 去截它們的公共部分时,得半径为 $\sqrt{2a\alpha}$ 的圓. 但当 $\alpha>a$ 时,就得到半径为 $\sqrt{3a^2-\alpha^2}$ 的圓. 因此体积等于

$$2\pi a\int_0^a z\,dz+\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(3a^2-z^2)dz=\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5).$$

例 4. 以通过圓柱体底的直径的平面去截这圓柱体，由它切下来的几何形体，称为圓柱弓形体. 試求以与底面成角 α 的平面去截底的半径为 a 的圓柱体时，所得的圓柱弓形体的体积.

取截面通过的直径所在的直綫为 x 軸和底面的圓心为原点. 以垂直于 x 軸的平面去截时,得一个三角形,其面积为

$$\frac{1}{2}y^2\operatorname{tg}\alpha,$$

因此弓形体积等于

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}a^2h,$$

此处 h 是圓柱弓形体的高.

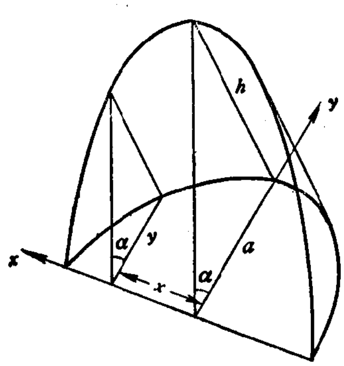

图 9

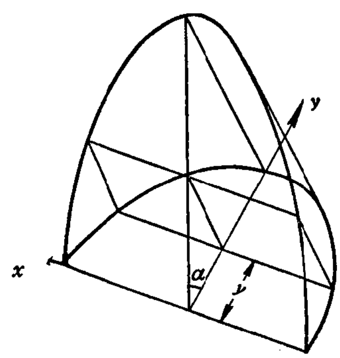

图 10

若以垂直于 y 軸的平面去截时,得到的是矩形,其面积等于

$$2xy\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\alpha\cdot y\sqrt{a^2-y^2}.$$

所以圓柱弓形体的体积等于

$$2\operatorname{tg}\alpha\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}dy=\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}a^2h.$$

習題 1. 試求对应于 $x=0$ 及 $x=b$ 的一段悬鏈綫

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

繞 x 軸旋轉所得的体积.