概率计量逻辑及其应用

周红军　著

科学出版社

概率计量逻辑及其应用

周红军　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书系统介绍概率计量逻辑的基本理论及其应用，主要是作者十余年来研究工作的系统总结，同时也兼顾国际上有关此领域中的主要研究成果. 全书共十章，具体内容包括逻辑公式的概率真度理论、逻辑公式的 Choquet 积分真度理论、概率计量逻辑推理系统、逻辑理论的相容度及程度化推理方法、极大相容逻辑理论的结构及其拓扑刻画、R_0-代数中的三值 Stone 拓扑表示定理、逻辑代数上的态理论、逻辑代数上的内部态理论与剩余格上的广义态理论等.

本书可作为非经典数理逻辑、不确定性推理等基础数学和人工智能专业的研究生教材，也可供数学与计算机等相关专业的高年级本科生、教师与科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率计量逻辑及其应用/周红军著. —北京：科学出版社，2015.6

ISBN 978-7-03-044528-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①概率逻辑 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 121995 号

责任编辑：李静科 赵彦超／责任校对：张凤琴

责任印制：徐晓晨／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2015 年 6 月第一次印刷 印张：24

字数：479 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

数理逻辑是一门推理艺术[1], 它提供了一种如何从已知前提推出所需结论的途径与方法, 这种逻辑推理是从两个角度来具体展开的, 一个是语构的角度, 另一个是语义的角度, 并最终通过完备性定理将这两个层次的推理和谐地统一起来[2–5]. 不管哪种层次的推理, 已知前提所使用的概念和提供的信息都是绝对精确的, 不存在任何的模棱两可, 从而所推得的结论也是完全精确的、可靠的. 这种精确的、严格的逻辑推理是人工智能学科及相关研究中所普遍采用的方法[6–8], 并在诸如逻辑程序设计[9]、定理自动证明[10–13]、非单调逻辑 [14] 乃至知识推理[15,16] 等多个领域中都得到了大量的应用, 形成了现代计算机的理论基础[17]. 然而我们所处的现实世界并不像数学王国中的理想世界那样严格, 我们所能掌握的概念和信息往往是模糊的、不确定的. 若忽略这些概念和信息的不确定性而简单地认为它们是绝对精确的, 将推出令人无法接受的谬论, 如秃头悖论[3].

为避免产生上述或其他类似的谬论, 通常所采取的方法就是扩大命题的真值域, 这是多值逻辑和模糊逻辑的基本做法. 值得注意的是, 模糊逻辑是在美国加利福尼亚大学伯克利分校的控制论专家、模糊集合创始人 Zadeh 教授提出模糊集[18] 之后才形成的. 它 (本书指狭义模糊逻辑) 其实是一种真值域为 $[0,1]$ 的多值逻辑系统, 而多值逻辑系统早在 20 世纪 20 年代就已被波兰逻辑学家 Łukasiewicz 所提出[19]. 时至今日, 多值逻辑, 特别是模糊逻辑已发展得相当成熟, 参阅本书 1.2 节或文献 [20], [21]. 模糊逻辑将命题的真值域扩大为单位区间 $[0,1]$, 从而命题有了除 0 和 1 之外的真值, 这确实能反映出命题的不确定性, 但模糊逻辑所使用的基本概念, 如定理、重言式、可驳公式、矛盾式、可证等价、逻辑等价以及理论的相容性等仍是分明的、非此即彼式的. 从这一层意义上讲, 模糊逻辑仍属于二值逻辑的范畴, 这也是模糊逻辑一直遭到质疑和批评的原因之一[22–26]. 捷克逻辑学家 Pavelka 在将基本逻辑概念程度化方面做出了出色的工作[27], 他把基本概念甚至推理过程全盘程度化的思想引入到了 Łukasiewicz 命题逻辑中建立了完整的理论框架, 并证明了诸多深刻而漂亮的结果. 捷克另外三位逻辑学家 Novák、Perfilieva 和 Močkoř 在文献 [28] 中对这一工作做了系统总结, 但这一理论框架似乎显得过于宽泛和抽象而无法找到其实际的应用背景.

概率论是处理随机现象的一个常用且行之有效的工具. 那么能否将概率的思想引入到逻辑中, 以使逻辑推理更好地符合人脑的思维模式和推理方法呢? 这一思想早在 1926 年在英国剑桥大学的 Ramsey 教授的著名工作 *Truth and Probability*[29] 中

就已被提出, 只是没有得到系统的理论研究. 直到 1984 年, 美国理海大学的 Hailperin 教授才首次正式把概率的思想引入到二值命题逻辑中来反映逻辑公式为真的程度, 并形成了概率逻辑 (Probability Logic)[30]. 1986 年, 美国斯坦福大学的 Nilsson 教授也独立地发表了这一思想[31], 随后又撰文做了补充说明[32]. 概率逻辑已被成功应用到了人工智能领域, 请参阅 IBM Almaden 研究中心的 Halpern 教授等、美国伊利诺伊大学的 Frisch 教授等、意大利萨勒诺大学的 Gerla 教授, 以及美国斯坦福大学的 Adam 教授的系统工作[33-37]. 概率逻辑中最核心的概念就是公式的概率. 一个公式的概率是由它的状态描述 (state-description) 上的概率分布所唯一决定的. 一个公式的状态描述上的概率分布是可以任意给定的, 只要各状态描述的概率之和为 1 即可. 当给定不同的概率分布时就得到了该公式的不同概率, 这固然很好地反映了概念和信息的不确定性, 但一个公式的状态描述总是有限个的, 并且不同公式的状态描述也未必相同. 可见概率逻辑中的概率分布总是定义在有限集合上的, 不同有限集合上的概率分布自然也未必一致, 所以概率逻辑中公式的概率只是针对具体公式而言的, 不同公式的概率也因此没有了可比性.

概率逻辑中的基本理论也是针对具体的有效推理展开的, 这种有效推理也只涉及有限多个公式, 而二值命题逻辑中的公式却是无限多的, 所以从概率逻辑理论的整体性上看, 其似乎只具有局部性而缺乏整体性. 此外, 概率逻辑是基于二值命题逻辑展开讨论的, 即只是在二值命题逻辑中定义了公式的概率, 并未在多值命题逻辑或模糊逻辑中定义所谓的公式的概率. Halpern 教授尝试在一阶谓词逻辑中引入了谓词公式的概率[38], 但这仍是基于二值逻辑的框架建立的, 并未涉及多值或 $[0,1]$-值逻辑中的公式.

捷克逻辑学家 Hájek 以及西班牙逻辑学家 Esteva 与 Godo 在模糊 Łukasiewicz 命题逻辑中通过引入一个新的模态词 P, 从形式上定义了 Boole 公式 (即由原子公式仅通过 $\neg$, $\vee$ 和 $\wedge$ 等逻辑连接词连接而成的公式) 的概率, 并把 $P(\varphi)$ 在 Kripke 型语义理论中解释为 Boole 公式 φ 的概率[39,40], 证明了所得逻辑系统 (实为二值命题逻辑与模糊 Łukasiewicz 命题逻辑相结合的模态逻辑) 的 Kripke 型完备性. 随后, 文献 [41] 对这一工作做了推广, 允许模态词 P 定义在 n-值 Łukasiewicz 命题逻辑的公式上, 也得到了相应的 Kripke 型完备性. 可见文献 [39]—[41] 只是从形式上定义了有限值 Łukasiewicz 命题逻辑中公式的概率, 这并未与概率逻辑联系起来, 尽管文献 [42] 把这些工作冠名为模糊概率逻辑 (Fuzzy Probability Logic).

另外, 我国学者王国俊教授利用均匀概率测度空间的无穷可数乘积分别在二值命题逻辑和 n-值 Łukasiewicz 命题逻辑中从整体上引入了公式的真度概念[43,44]; 随后又在 $[0,1]$-值 Łukasiewicz 命题逻辑中利用 McNaughton 函数的 Lebesgue 积分引入了公式的积分真度[45,46]. 从 (积分) 真度的定义方式上可以看出它们确实反映了公式为真的程度, 随后便引发了一系列相关研究[47-51]. 文献 [52],[53] 对这方面的

研究成果作了初步总结, 并建立了计量逻辑. 在计量逻辑中, 诸如定理、重言式、可证等价与逻辑等价等基本逻辑概念都被程度化了, 其目的就是在数理逻辑与数值计算理论间架起沟通的桥梁, 这种程度化的思想也是文献 [27], [28], [54]—[56] 中方法的继续与发挥, 但又不同于文献 [27], [28] 中的方法, 这是因为一个公式的真度完全由其自身的逻辑结构决定而不是像文献 [27], [28] 中那样可以给其任意地赋予一个隶属度. 例如, 任一原子公式的真度都为 $\frac{1}{2}$ 而不是其他值. 计量逻辑一方面具有了整体性的优点, 但另一方面又有缺少随机性的不足. 事实上, 正如前面所说, 在计量逻辑中每个公式都被赋予了一个真度, 但在该真度意义下, 每个原子公式都有相同的真度 $\frac{1}{2}$, 并且可以验证在二值情形任意两个不同原子公式的合取的真度恰等于这两个原子公式的真度的乘积. 用概率的观点来考察, 即每个原子公式为真的概率为 $\frac{1}{2}$, 并且原子公式都是独立的 (这里把每个原子公式视为赋值空间上的随机变量, 进而每个复合逻辑公式都是该概率空间上的随机变量函数). 这种把原子公式为真的概率等同看待并且要求各随机变量 (即原子公式) 都独立的观点, 与现实生活中各简单命题成立的概率不尽相同也未必独立的事实相悖.

事实上, 各简单命题是否为真以及在多大程度上为真是不确定的、随机的、不独立的, 所以赋予不同原子公式不同的概率可以使由此产生的公式更具有实用性. 基于这样的考虑, 文献 [57] 利用单位开区间 $(0,1)$ 上的随机数列在二值命题逻辑中提出了公式的随机真度概念, 从而在二值情形弥补了公式的真度理论缺乏随机性的不足, 这可以说是一个非常大的进步, 但它仍要求原子公式是彼此独立的, 即任意两个不同原子公式的合取的随机真度等于它们随机真度的乘积, 进而任意两个不含相同原子公式的复合公式的合取的随机真度也恰等于它们随机真度的乘积. 这种随机真度独立的根源在于每个随机数列都唯一地生成了整个赋值空间上的一个乘积概率测度, 这种生成方式就决定了随机真度的独立性[58]. 正如前面所说, 现实生活中大量实际命题都不是独立的, 对于这一问题, 文献 [37] 也专门设置章节进行了讨论. 其实, 在概率逻辑中原子公式一般也不是独立的. 那么能否同时取概率逻辑和计量逻辑的优点而又能弥补它们各自的不足从而使它们达到融合和统一呢?

以上述问题为基本切入点, 作者经过十余年的研究取得了如下 6 方面的研究成果: ① 概率计量逻辑. 通过在标准完备的多值命题逻辑中的全体赋值集上引入通常乘积拓扑, 利用真值函数关于该空间上的 Borel 型概率测度的 Lebesgue 积分定义了公式的概率真度概念. 该方法既克服了计量逻辑中的真度理论与随机真度理论分别要求赋值集上的概率测度必须均匀和独立的局限, 又弥补了概率逻辑只讲局部而缺乏整体性的不足. 结果表明计量逻辑中的真度、随机真度概念以及概率逻辑中的公式的概率概念都是所引入的概率真度的特例, 从而实现了计量逻辑和概

率逻辑的融合与统一, 系统地建立了较为宽泛的概率计量逻辑理论. 主要成果发表在*Information Sciences*, 2009, 179(3): 226, 247;《中国科学: 信息科学》, 2011, 41(11): 1328–1342; *Science China: Information Sciences*, 2011, 54(9): 1843–1854;《软件学报》, 2012, 23(9): 2235–2247;《电子学报》, 2011, 39(12): 2895–2899, 以及《模式识别与人工智能》, 2013, 26(6): 521–528 上. ② Łukasiewicz 命题逻辑中公式的 Choquet 积分型真度理论. 在 Łukasiewicz 命题逻辑系统中利用 McNaughton 函数关于赋值空间上的一般模糊测度的 Choquet 积分引入了公式的 Choquet 积分型真度, 证明了当赋值空间上的模糊测度满足有限可加性 (即为有限可加概率测度) 时, Choquet 积分真度函数就具有良好性质, 由此可自然诱导出公式集上的一个伪距离. 特别是证明了当赋值空间上的模糊测度取为 Borel 型概率测度时 Choquet 积分真度函数就退化为概率计量逻辑中的概率真度函数. 本工作是概率计量逻辑工作的继续与深入, 为表示命题间不确定性的非线性关系提供了一种推理框架. 该成果发表在《电子学报》, 2013, 41(12): 2327–2333 上. ③ 逻辑理论的相容度及程度化推理算法. 在计量逻辑框架下利用公式的真度理论解决了国际上认为较难解决的逻辑理论的相容程度问题, 提出了逻辑理论的相容度、广义相容度理论以及程度化推理算法. 该成果发表在*Fuzzy Sets and Systems*, 2006, 157(3): 427–443; 2006, 157(15): 2058–2073 及*International Journal of Approximate Reasoning*, 2006, 43(2): 117–132 上. ④ 极大相容逻辑理论的结构及其拓扑刻画. 由于基于计量逻辑中的真度理论引入的逻辑理论的相容度概念无法区分极大相容理论与不相容理论，我们又另辟蹊径清楚地给出了形式系统 $\mathscr{L}^*$(NM 逻辑) 以及 NMG 等中的极大相容理论的结构刻画和拓扑刻画, 证明了每一极大相容理论必是, 也只能是一组特定的简单复合公式的逻辑闭包; 全体极大相容理论之集带上 Stone 拓扑是一 Cantor 空间. 该成果发表在*Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(23): 2591–2604; 2008, 159(22): 2970–2982;《软件学报》, 2009, 20(3): 515–523, 以及《电子学报》, 2011, 39(12): 2895–2899 上. ⑤ R_0-代数的 Stone 拓扑表示. 将 ④ 中的工作推广到了 R_0-代数中, 深入研究了 R_0-代数的代数和拓扑结构, 在全体极大滤子之集上分别引入了 Stone 拓扑及三值 Stone 拓扑, 证明了 R_0-代数的 Boole 框架代数同构于其 Stone 拓扑空间中的开闭集代数, 而 MV 框架代数同构于三值 Stone 空间中的开闭集代数. 此外, 还证明了 Boole 滤子一一对应于全体超滤子构成的 Stone 拓扑子空间中的拓扑闭集, 而 MV-滤子对应于 Stone 空间中的拓扑闭集, 从而系统地建立了 R_0-代数的 Stone 拓扑表示定理, 推广了著名的 Boole 代数的 Stone 拓扑表示定理. 该研究成果发表在*Fuzzy Sets and Systems*, 2011, 162(1): 1–26 上. ⑥ 剩余格中的广义态理论. 解决了剩余格上广义态理论中的若干公开问题, 通过引入相对否定的概念, 系统地建立了符合一般随机试验规则的广义态理论框架. 该成果发表在*Archive for Mathematical Logic*, 2013, 52(7, 8): 689–706; *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, 187(1): 33–57 及*Journal of Multiple-Valued*

Logic and Soft Computing, 2014, 22(1–2): 123–132 上. 上述研究工作得到了国家自然科学基金 (项目编号：61005046, 11171200, 61473336)、教育部博士点基金 (项目编号：20100202120012)、陕西省自然科学基础研究计划 (项目编号：2010JQ8020)、中央高校基本科研业务费 (项目编号：GK200902048, GK201403001, GK201503013) 以及陕西师范大学优秀博士学位论文基金 (项目编号：S2006YB06) 等项目的资助. 另外, 作者的博士学位论文《概率计量逻辑》[59] 入选了陕西省 2012 年度优秀博士学位论文.

本书将分 10 章对上述研究成果进行系统介绍, 同时也将梳理国际上此领域中的主要研究成果, 以保证全书理论体系的自封性和逻辑严密性.

第 1 章首先扼要介绍命题逻辑系统及其语构理论和语义理论, 同时针对最基本的逻辑概念简要分析把它们进行程度化的必要性, 从而使我们看到建立概率计量逻辑理论便是顺理成章的事情了. 然后主要介绍几种常用的命题逻辑系统, 为后面章节的研究作必要的准备.

第 2 章详细介绍概率逻辑中公式的概率概念以及计量逻辑中公式的真度和随机真度概念, 并分析它们之间的区别与联系以及各自存在的不足, 这是本书的基本出发点.

第 3 章首先通过视全体赋值之集为通常乘积拓扑空间, 利用该空间上的 Borel 型概率测度在二值命题逻辑中引入公式的概率真度概念. 该方法既克服了计量逻辑要求赋值集上的概率测度必须均匀或独立的局限, 又弥补了概率逻辑只讲局部而缺乏整体性的不足. 详细讨论公式的概率真度与计量逻辑中公式的真度、随机真度以及概率逻辑中公式的概率等概念间的联系, 结果表明公式的真度、随机真度以及公式的概率均可作为概率真度的特例而纳入到统一的框架中, 从而实现计量逻辑与概率逻辑的融合和统一. 讨论逻辑闭理论与赋值空间中拓扑闭集间的一一对应关系以及概率真度函数与赋值空间上的 Borel 型概率测度间的一一对应关系. 其次利用概率论中的 Kolmogorov 公理给出概率真度函数的公理化定义, 讨论其基本性质及等价刻画条件, 并最终证明公式集上任一满足 Kolmogorov 公理的 $[0,1]$-值函数均可由赋值空间上的唯一 Borel 型概率测度按上述方法所表出, 从而建立二值命题逻辑框架下的概率计量逻辑理论. 再次, 本章把上述思想推广到 n-值和 $[0,1]$-值命题逻辑中引入公式的概率真度概念, 得到与二值情形相类似的结论. 特别地, 证明概率真度函数的一个极限定理, 从而将 n-值 Łukasiewicz 命题逻辑中公式的概率真度和 $[0,1]$-值 Łukasiewicz 命题逻辑中公式的概率真度和谐地统一起来. 然后, 讨论用赋值空间上的内外测度、概率测度以及常用的模糊测度来定义逻辑公式的真度的可行方法. 最后, 在 $[0,1]$-值 Łukasiewicz 命题逻辑中利用 McNaughton 函数关于赋值空间上的模糊测度的 Choquet 积分建立 Choquet 积分型真度理论.

第 4 章通过把第 3 章在 n-值 Łukasiewicz 命题逻辑中定义的公式的概率真度

函数抽象为模态词, 把关于概率真度函数基本性质的恒等式抽象为公理建立一种概率计量逻辑推理系统 $\mathrm{PQ}(\text{Ł}_n,\text{Ł})$, 证明其关于概率真度函数的完备性定理, 并讨论 $\mathrm{PQ}(\text{Ł}_n,\text{Ł})$ 的 Pavelka 型扩张及其完备性. 为进一步增强 $\mathrm{PQ}(\text{Ł}_n,\text{Ł})$ 的语言表达能力和逻辑推理能力, 本章建立另一种逻辑推理系统 $\mathrm{PQ}\left(\text{Ł}_2,\text{Ł}\Pi\frac{1}{2}\right)$, 并证明关于概率真度函数的完备性. 该系统虽然只是针对二值命题逻辑中的公式建立的, 但它能表示关于公式概率真度的线性不等式性质, 因而具有较强的语言表达能力和逻辑推理能力.

第 5 章首先回忆关于逻辑理论相容度问题的已有研究成果, 并分析这些研究成果存在的局限和不足, 然后对逻辑理论的不相容性作深入分析, 在此基础上运用逻辑系统的演绎定理和公式的概率真度理论从逻辑的角度提出一个新的理论相容性指标, 利用该指标重新定义理论的相容度. 接着, 本章进一步把这一思想进行推广, 提出理论的语义蕴涵度概念, 利用语义蕴涵度取代发散度指标可以定义更为合理的理论的相容度. 出乎意料的是, 在二值命题逻辑系统、Łukasiewicz 模糊命题逻辑系统以及形式系统 $\mathscr{L}^*$ 中理论的语义蕴涵度恰等于该理论的发散度, 从而论证已有研究成果在这三个逻辑系统中定义的理论相容度的合理性. 理论的语义蕴涵度除具有较强的逻辑背景外, 还有较易推广的优点, 即只需把定义中的矛盾式换为一般的逻辑公式便可得一种语义与语构相结合的程度化推理方法. 此外, 也可用语义蕴涵度定义理论关于一般逻辑公式的广义相容度. 最后, 本章利用语义蕴涵度的思想提出一种三 I 算法, 其求解机制与模糊推理中三 I 算法的求解机制完全一致, 从而进一步从语义和语构相结合的角度为模糊推理奠定逻辑基础.

第 6 章给出几种常用命题逻辑系统中极大相容理论的结构刻画和拓扑刻画. 尽管第 5 章定义了理论的相容度并给出理论相容的若干充要条件, 但这些结果, 包括参考文献中的研究成果, 仍无法刻画极大相容理论, 因为极大相容理论和不相容理论的相容度都为 $\frac{1}{2}$. 为刻画极大相容理论的极大性, 本章先利用二值命题逻辑、形式系统 $\mathscr{L}^*$ 及系统 NMG 的强完备性定理和标准完备性定理, 分别在这三个逻辑系统中给出极大相容理论结构的清楚刻画, 并在全体极大相容理论之集上引入 Stone 拓扑, 证明所得空间均是 Cantor 空间. 在这三个逻辑系统中给出不依赖强完备性定理的极大相容理论结构刻画的归纳证法, 但这些方法均不适用于 Łukasiewicz 模糊命题逻辑系统, 该系统中极大相容理论的结构要复杂得多. 然后, 本章在深入研究 Łukasiewicz 模糊命题逻辑中极大相容理论基本性质的基础上证明极大相容理论与赋值是一一对应的, 从而给出该系统中全体极大相容理论的表示, 但其具体结构还远不如上述三个逻辑系统中极大相容理论的结构清楚. 利用 Łukasiewicz 蕴涵算子的连续性, 在全体极大相容理论之集上引入一种模糊拓扑并研究了其性质及截拓

扑的性质. 最后, 本章证明 Gödel 和乘积命题逻辑系统中的极大相容理论与引入的 MV-赋值是一一对应的.

第 7 章首先研究 R_0-代数中极大滤子的结构性质, 在全体极大滤子之集上引入 Stone 拓扑和三值 Stone 拓扑, 相应的拓扑空间分别称为该 R_0-代数的 Stone 空间和三值 Stone 空间. 其次, 为研究 R_0-代数中元素与其 (三值) Stone 空间中既开又闭集间的对应关系, 本章引入 Boole-元和 MV-元的概念, 并证明全体 Boole-元作为 Boole 代数同构于相应 Stone 空间中的开闭集代数; 全体 MV-元作为 MV-代数同构于相应三值 Stone 空间中的开闭集代数. 该表示定理 (称为 R_0-代数的三值 Stone 拓扑表示定理) 是 Boole 代数中 Stone 拓扑表示定理的推广. 最后, 为进一步研究 R_0-代数中滤子与其 Stone 空间中拓扑闭集间的对应关系, 本章引入 Boole-滤子和 MV-滤子的概念, 证明 MV-滤子和 Stone 空间中的拓扑闭集是一一对应的; Boole-滤子和 Stone 空间的由全体超滤子构成的子空间中的拓扑闭集是一一对应的. 至于 R_0-代数的三值 Stone 空间中拓扑闭集的对应物, 目前尚无定论, 是值得进一步研究的课题.

第 8 章介绍逻辑代数上的态理论. MV-代数上的态算子是由意大利学者 Mundici 在 1995 年引入的, 其目的是寻求 Łukasiewicz 命题逻辑中公式的各个真值的某种平均, 因而与概率计量逻辑中的程度化思想具有异曲同工之妙, 是经典概率论中的 Kolmogorov 公理在多值逻辑代数中的公理化推广. 在第 3 章我们将看到 Łukasiewicz 命题逻辑中公式的概率真度函数与 Lindenbaum 代数上的态算子是一一对应的, 因而态理论与概率计量逻辑是密切联系的, 前者可看成后者在语义代数上的一般化和公理化, 后者是前者的语义分析版本. 但二者又有区别, 因为形式系统 $\mathscr{L}^*$ 中的概率真度函数不是 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数上 Mundici 意义下的态算子. 此外, 概率计量逻辑重在基本逻辑概念的程度化, 可用来解决逻辑理论的相容度问题. 态理论在近十年内得到了迅速发展, 取得了诸多重要而深刻的结论. 本章系统地梳理此方面的研究成果, 并给出相应的证明. 由于个别结论的证明超出了本书的范围, 我们仅列出结论及其出处, 有兴趣的读者可进一步查阅相关参考文献. 作为预备知识, 本章先介绍剩余格, 包括常见的各种逻辑代数, 如 MTL-代数、BL-代数、MV-代数, 以及它们的基本代数性质. 然后在剩余格上引入 Bosbach 与 Riečan 态算子, 研究它们的性质与存在性, 并应用到各逻辑代数. 最后构造 MV-代数关于态算子的 Cauchy 度量完备.

第 9 章介绍逻辑代数上的内部态理论. 由于逻辑代数带上第 8 章介绍的态算子不再是一个泛代数, 因为态算子总在单位区间 $[0,1]$ 中取值, 所以逻辑代数带上其态算子不能再构成 Blok 与 Pigozzi 可代数化逻辑意义下的逻辑代数. 另外, 类似第 4 章的做法也可把逻辑代数中的态算子抽象为模态词, 把态算子定义中的等式抽象为模态公理, 进而建立相应的逻辑推理系统, 但此类模态化的推理系统不能表达形

如 $\varphi \to P(\varphi)$ 的公式. 为提供从代数及逻辑两角度处理态算子的统一方法, 意大利学者 Flaminio 与 Montagna 于 2009 年在 MV-代数上提出了内部态算子, 并建立了相应的概率模糊逻辑. 内部态理论现已被推广到其他逻辑代数上. 鉴于第 10 章介绍的广义态理论是内部态理论的进一步推广, 那里允许广义态算子的定义域与取值域可以为任意两个剩余格, 本章仅以 MV-代数与 BL-代数为例介绍内部态理论.

第 10 章介绍由罗马尼亚学者 Georgescu 与 Mureşan 在剩余格上建立的广义态理论以及作者在其中的若干工作. 第 8 章介绍的态算子是经典概率论中的 Kolmogorov 公理在多值逻辑代数中的形式化推广, 是多值概率论的基本模型. 经研究发现, 不同逻辑代数上的态算子的取值域 $[0,1]$ 具有标准 MV-代数的代数结构, 10.1 节开始也将详细说明这一点. 由此, 第 8 章中的态理论要求不同逻辑系统中的事件的概率具有相同的 MV-代数结构, 而第 9 章介绍的内部态理论则要求多值事件的概率值具有与事件相同的代数结构. 本章在第 8 章与第 9 章的基础上更进一步, 允许态算子的定义域与取值域可以为任意两个剩余格, 建立符合一般逻辑规则的广义态理论. 具体为, 首先介绍剩余格上的三类广义态算子: Ⅰ-型 Bosbach 态、Ⅱ-型 Bosbach 态和广义 Riečan 态, 以及它们的基本性质. 其次介绍剩余格中的相似收敛理论与广义态算子的连续性, 进而构造剩余格关于保序 Ⅰ-型 Bosbach 态的 Cauchy 相似完备. 然后介绍作者引入的分别基于相对否定与核算子的广义态理论. 最后是有关广义态理论的逻辑基础的思考.

本书的第 1–7 章主要是对作者的博士学位论文[59] 进行整理和补充最新研究成果而来的, 侧重命题逻辑的语义计量化模型及其应用, 而第 8–10 章侧重介绍与概率计量逻辑密切联系的逻辑代数上的态理论、内部态理论和广义态理论, 它们是概率计量逻辑中概率真度函数的公理化和代数化版本. 本书是科学出版社出版的系列著作《数理逻辑引论与归结原理》[2]、*Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle*[53]、《非经典数理逻辑与近似推理》[126]、《基于三角模的模糊逻辑理论及其应用》[20], 以及《模糊逻辑及其代数分析》[21] 的续篇与提高篇, 是王国俊教授创立的计量逻辑理论的深化与系统化. 在介绍具体内容前本书对必要的预备知识都做了简单介绍, 保证了全书整个内容体系的完整性和自封性, 所以稍微具有点逻辑基础的读者都可直接阅读本书. 最后指出的是, 限于篇幅, 本书只是介绍命题逻辑的概率计量化研究成果, 不含谓词逻辑与模态逻辑的概率计量化, 感兴趣的读者可参阅文献 [38], [60]–[63].

在本书即将出版之际, 作者要特别感谢于 2013 年年底因病医治无效而离开我们的恩师王国俊教授, 感谢他对作者自研究生求学以来多年的淳淳教诲及细心指导, 书中许多新思想都直接源于恩师极具启发性的讲授和指点. 恩师渊博的学科知识、严谨的治学态度、敏锐的学术思维、深刻的洞察见解、“勤和恒乃成功之本” 的信条以及为人处世的宽大胸怀是作者不断努力进取的力量源泉和终身受益的宝贵

财富. 同时要特别感谢师母何老师对作者多年来在生活及家庭上的热情关心和无私帮助, 愿师母保重身体, 健康长寿.

在本书的撰写过程中, 作者得到了许多老师、同事、同仁及研究生的关心和帮助, 在此特别感谢陕西师范大学的赵彬教授、李永明教授、李生刚教授和吴洪博教授, 西安电子科技大学的高新波教授, 四川大学的张德学教授, 西南交通大学的徐扬教授、秦克云教授和潘小东副教授, 华东师范大学的陈仪香教授, 西安邮电大学的范九伦教授, 山东大学的刘华文教授, 浙江理工大学的裴道武教授和王三民教授, 西北大学的辛小龙教授, 江南大学的刘练珍教授, 江西师范大学的覃锋教授, 甘肃理工大学的李骏教授, 上海海事大学的张小红教授, 湖北民族学院的詹建明教授, 湖南大学的周湘南副教授, 西安石油大学的折延宏副教授以及西安财经学院的罗清君副教授等, 他们阅读了部分书稿, 提出了诸多有益建议. 作者还要感谢陕西师范大学的马丽娜副教授、汪开云副教授、时慧娴博士、郑慕聪博士、段景瑶博士、吴苏朋博士以及硕士研究生马琴和兰淑敏, 西北大学的贺鹏飞博士和王军涛博士, 他们承担了部分书稿的 Latex 打印排版及校对工作. 感谢陕西师范大学数学与信息科学学院院长吉国兴教授和副院长唐三一教授等的关心以及学院提供的经费支持. 感谢科学出版社数理分社赵彦超社长与李静科编辑高效而细致的工作, 使得本书如期出版.

最后感谢陕西师范大学优秀著作出版基金为本书的出版所提供的资助.

本书是作者十余年研究工作的系统总结, 尽管书中的大部分内容都已正式发表, 在 “不确定性推理” 讨论班上也报告过, 但限于作者的水平, 书中的不妥之处在所难免, 恳请各位专家与读者不吝赐教. 另外, 概率计量逻辑作为一门十分年轻的交叉学科也需要各位同仁共同努力使之不断发展完善.

周红军

2015 年 3 月于陕西师范大学

目　　录

第 1 章　多值命题逻辑简介

由于本书将要建立的概率计量逻辑理论是在多值命题逻辑框架下展开的, 所以为了顺利阅读并领会概率计量逻辑的基本思想, 本章介绍有关多值命题逻辑的一些预备知识. 1.1 节简要介绍命题逻辑系统及其语构理论、语义理论和完备性, 同时针对最基本的逻辑概念简要分析把它们进行程度化的必要性, 从而使我们看到建立概率计量逻辑理论便是顺理成章的事情. 1.2 节介绍若干常用的命题逻辑系统, 包括二值命题逻辑系统 L、多值 Łukasiewicz 命题逻辑系统 Ł 与 $Ł_n$、Gödel 模糊命题逻辑系统 G、乘积模糊命题逻辑系统 Π、R_0-型多值命题逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 与 $\mathscr{L}_n^*$、模糊命题逻辑系统 NMG 以及模糊命题逻辑系统 ŁΠ 和 ŁΠ$\frac{1}{2}$, 也可参阅文献 [2], [20], [21].

有关概率论、测度论以及拓扑空间论的预备知识将在具体用到时再作进一步的介绍, 参见 3.3.1 节和 6.1.3 节.

1.1　命题逻辑系统及其完备性

1.1.1　命题逻辑系统

一个命题逻辑系统一般由 5 部分组成:

(i) **符号表**　包括原子命题符号: $p_1, p_2, \cdots$(有个别命题逻辑系统还可能把常值公式 $\overline{0}$ 作为原子公式), 其全体构成一个可数集 $S = \{p_1, p_2, \cdots\}$; 逻辑连接词: $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \&, \cdots$; 标点符号: 逗号 “,”, 左括号 “(” 以及右括号 “)”.

(ii) **公式集**　原子命题 $p_1, p_2, \cdots$ 也称为**原子公式**, 它们都是**公式**. 又将原子公式用逻辑连接词恰当连接所得的表达式都称为**公式**(或**命题**), 其全体之集记作 $F(S)$. 不同的逻辑系统可以使用不同的逻辑连接词. 如果所使用的连接词之集是 $\{\neg, \vee, \rightarrow\}$, 则 $F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型自由代数, 即

(1) $S \subseteq F(S)$,

(2) 若 $\varphi, \psi \in F(S)$, 则 $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in F(S)$,

(3) $F(S)$ 中的成员均可由以上规则 (1) 和 (2) 在有限步之内生成.

例如, $\varphi = p_1 \rightarrow \neg(\neg p_2 \vee p_3)$ 就是一个公式, 而 $\rightarrow p_1 \vee p_2$ 就不是公式. $F(S)$ 中的公式是将 S 中的原子公式用逻辑连接词按规则 (2) 恰当地连接而成, 所以也称为**合式公式**. 本书将 $F(S)$ 中的成员简称为公式, 有时也称为命题.