北京钢铁学院“概率统计”编写组

概率论习题集

（附习题解答）

$$\Phi(X) = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

测 绘 出 版 社

.202274

认识 动机

概率论习题集

（附习题解答）

北京钢铁学院“概
率统计”编写组

测绘出版社

内容简介

本书按照高等工科院校“概率论”课程的基本要求编写。在教学实践的基础上，收集和汇编了400多道基本题，按由浅入深、循序渐进的原则分类编排，并附有解答。

本书共分五章。第一章 概率论的基本概念；第二章 随机变量及其分布；第三章 多维随机变量及其分布；第四章 随机变量的数字特征；第五章 大数定律及中心极限定理。书中每节都按内容提要，习题和习题解答三部分编排。可供工科院校教师、学生，中学数学教师，工程技术人员和自学青年参考。

概率论习题集

（附习题解答）

北京钢铁学院“概率统计”编写组

*

测绘出版社出版

怀柔王史山胶印厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本：787×1092 1/32 印张：8.75 字数：196千字

1981年11月第一版 1989年6月第三次印刷

印数：9601-18100册 定价：2.30元

ISBN 7-5030-0280-8/G·23

前　　言

为了逐步适应四个现代化的要求，科学技术的各个领域正在愈来愈广泛地采用许多新的数学方法，“概率论与数理统计”就是其中之一。目前，高等工科院校的教学计划中已将这部分内容列为必修的课程。许多工程技术人员也正在通过各种渠道学习这种数学方法。

与其他数学课程比较，“概率论与数理统计”这门课具有许多不同的特点，这给初学者入门带来不少困难，尤其是在解题时常常无从下手，解完后感觉把握不大。为了帮助初学者克服学习中的困难，较好地掌握课程的基本内容，我们编写了这本书。根据工科院校中这门课程的基本要求，在以往教学实践的基础上，精选了400多道基本题，按照由浅入深，循序渐进的教学原则分类编排；力求题意明确，叙述清楚，尽量避免繁琐的计算；针对学生掌握概念和方法时容易出现的错误，还有意识地编入了某些辨误、思考题；此外许多题目采用了一题多解的方法，以利于学生举一反三，开阔思路。

本书共分五章，重点是第一章、第二章和第四章的第一节。我们认为：这些内容是工科院校“概率论”课程最基本的内容。为了便于少学时类型的课程使用，在编写中我们有意识地使这部分内容具有相对的独立性。对于多学时类型的课程来说，除上述内容外，可酌情增加其他部分的内容。

我们殷切希望青年学生在使用本书时要立足于独立思考，刻苦钻研，切忌一遇困难就去查解答，这种做法对能力

95.12.14

的培养是很不利的，而任何有损于学习能力培养的做法都是违背出版此书的根本目的的。

本书是由北京钢铁学院数学教研室庞鹏飏、吕世意、戚国安、杜才难、徐曼华、张建业、秦明达编写的。在编写过程中得到本教研室的大力支持和帮助。教研室主任何品三教授以及刘钦圣副教授、高瑞同志等进行了审阅。最后特请北京师范大学概率统计教研室主任严士健教授进行了审定。特此表示衷心地感谢。由于水平所限，本书会有不少缺点错误，请读者批评指正。

编者

1981.5

〔说　　明〕

（1）关于分布函数定义，本书一律采用下列定义方法，即

$$F(x)=P\{\xi\leqslant x\}$$

而不采用

$$F(x)=P\{\xi<x\}$$

的定义。

（2）关于拉普拉斯函数表，本书一律按

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

的函数表解题，并由此给出几个常用的查表公式，而不采用

$$\Phi(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

的函数表及其所附属的几个查表公式。

（3）本书内容提要和习题中打＊号处分别表示非基本内容和选题。

参　考　书　目

〔1〕 浙江大学数学系高等数学教研组编：概率论与数理统计，1977。

〔2〕 王梓坤著：概率论基础及其应用，1976。

〔3〕 复旦大学编：概率论第一册概率论基础，1979。

〔4〕 沈恒范编：概率论讲义，1978。

〔5〕 林少宫编：基础概率与数理统计，1962。

〔6〕 同济大学数学教研室主编：高等数学（下册），1978。

〔7〕 南京工学院数学教研组编：高等数学，1978。

〔8〕 关家骥、瞿永然编：概率统计习题解答，1980。

〔9〕 W.Feller.An introduction to probability theory and its applications. Vol.1 第二版,1957；Vol.2,第二版，1971。

〔10〕 M.Fisz，概率论及数理统计，1958（王福保译）。

〔11〕 Morris H.Degroot,probability and statistics,1974。

〔12〕 A.A.史威斯尼珂夫等著，概率论解题指南，1962，（计度生、朱锡斌译）

目　录

〔说明〕参考书目

第一章　概率论的基本概念

§ 1　集合论初步……………………………………………(1)

§ 2　排列与组合……………………………………………(21)

§ 3　随机试验和随机事件……………………………………(33)

§ 4　概率的定义和性质………………………………………(43)

§ 5　条件概率与事件独立性…………………………………(63)

第二章　随机变量及其分布

4 § 1　随机变量的概念…………………………………………(88)

§ 2　随机变量的分布函数……………………………………(105)

§ 3　随机变量函数的分布……………………………………(130)

第三章　多维随机变量及其分布

5.1 § 1　二维随机变量及其分布…………………………………(148)

§ 2　二维随机变量函数的分布………………………………(182)

第四章　随机变量的数字特征

5.3 § 1　一维随机变量的数字特征………………………………(203)

§ 2　二维随机变量的数字特征………………………………(231)

第五章　大数定律和中心极限定理

附表 1　标准正态分布表

附表 2　泊松分布表

第一章 概率论的基本概念

§1 集合论初步

一、内容提要

1.集合的概念

（1）一般将集合理解为具有某种共同性质的一些对象组成的全体。组成某一集合的那些对象叫做该集合的元素。通常用大写字母 A、B、C 等表示集合，用小写字母 a、b、c 等表示元素。

（2）如果 a 是集合 A 的元素，则称"a 属于 A"，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，则称"a 不属于 A"，记作 $a \overline{\in} A$。

（3）仅含有限多个元素的集合叫有限集，含有无限多个元素的集合叫无限集。在无限集中，能与自然数集建立一一对应关系的集合叫可列集（或可数集），否则叫做不可列集。

不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ。仅含一个元素 x 的集合称为单元素集，记作 $\{x\}$。

2.子集与空间

（1）如果集合 A 的每一个元素都属于 B，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A"。

（2）如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合A与集合B是相等的，记作$A=B$。

（3）倘若研究某一问题时所涉及的有关集合都是某个集合的子集，则称该集合为空间，记作Ω、U或S。

（4）如果集合A是空间Ω的子集，把Ω中所有不属于A的元素组成的集合叫做A的余集，记作$\overline{A}$。

3.集合的运算

（1）由属于集合A或集合B的那些元素的全体所组成的集合称为A与B的并集（或和集），记作$A\cup B$。

有限个及可列个集合的并集分别记作$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$及$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

（2）由属于集合A又属于集合B的那些元素的全体所组成的集合称为A与B的交集，记作$A\cap B$。

有限个及可列个集合的交集分别记作$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$及$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

（3）由属于集合A而不属于集合B的那些元素的全体所组成的集合称为A与B的差集，记作$A\setminus B$.余集$\overline{A}$是空间Ω与集合A的差集，所以有

$\overline{A}=\Omega\setminus A$或$A=\Omega\setminus\overline{A}$或$A\cup\overline{A}=\Omega$。

（4）集合运算的某些性质：

1°并与交的交换律

$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$。

2°并与交的结合律

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$。

3°分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4°德莫根（de Morgan）定理

$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$；　　$\overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$；

$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；　　$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；

$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$；　　$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

*4．集类的概念

以集合为元素的集合叫做集类，一般用花写字母$\mathscr{F}$，$\mathscr{B}$等表示。若集合A属于集类$\mathscr{F}$，则记作$A\in\mathscr{F}$；否则记作$A\overline{\in}\mathscr{F}$.

二、习题

1.1　指出下列集合是怎样的集合？是有限集还是无限集？若是无限集，是否是可列集？

(1) $A=\{x\mid x^2=9\}$；

(2) $B=\{x\mid x+2=-5\}$；

(3) $C=\{x\mid x^2<0$，x为实数$\}$；

(4) $D=\{x\mid x=4n+1$；　$n=1,2,3,\cdots\}$；

(5) $E=\{x\mid x=2,3,4,5,\cdots\}$；

(6) $F=\{x\mid x\geqslant a,\ x\leqslant b$；　a,b为给定的实数$\}$；

(7) $G=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

*(8) $H=\{ax^2+bx+c\mid a,b,c$是任意实数且$a\neq 0\}$.

1.2　用形如$A=\{$元素$x\mid x$具有性质$p\}$的记号表示下列集合：

(1)小于100的正整数集；

(2)全部偶数集；

(3)双曲线 $xy=1$ 上一切点的集合；

(4)所有平行于已知直线 l_0：$2x+y=1$ 的一切直线 l 所组成的集合。

1.3 设Ω为某一空间，A为它的某一子集，x 为 A 中某一元素。问下列记法哪些正确？哪些错误？

(1)$x\in A$；　　(2)$x\in\Omega$；

(3)$x\subset A$；　　(4)$x\subset\Omega$；

(5)$A\in\Omega$；　　(6)$A\subset\Omega$；

(7)$\{x\}\in A$；　　(8)$\{x\}\subset A$。

1.4 设 A 和 B 都是有限集，问在什么条件下 $A\cup B$ 的元素个数等于 A 的元素与 B 的元素个数之和？

1.5 集合 $A\cup A$ 及 $A\cap A$ 分别等于什么？数字运算有类似结果吗？

1.6 下面两式分别表示 A、B 之间有什么包含关系？

(1)$A\cap B=A$；　　(2)$A\cup B=A$。

1.7 在什么情况下等式 $A\cap B\cap C=C$ 成立？

1.8 在什么情况下才会有 $B\setminus A=B$ 成立？

1.9 区间 $[-3,3]$ 与 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ 的交集是怎样的一个集合？

1.10 设 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\}$，

$B=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，求 $A\cap B=$？

1.11 平面上由 $x^2+y^2\leqslant 4$ 所确定的集合与由 $x^2+y^2>1$所确定的集合的交集是怎样的一个集合？

1.12 设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$B=\Big\{(x,y)\mid -\infty$

$<x<\infty,\ \frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}\}$。画图表示：

(1)$A\cup B$；(2)$A\cap B$；(3)$A\setminus B$；(4)$B\setminus A$。

1.13　设空间 $\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$，集合 $A=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$，$B=\{e_1, e_2, e_4, e_6\}$，$C=\{e_4, e_5, e_6, e_8\}$，$D=\{e_8\}$。试求下列各集合：

(1)$\overline{A}$；(2)$B\cap D$；(3)$A\cup C$；(4)$B\cap C$；

(5)$\overline{B\cup C}$；(6)$A\cap(B\cup C)$。

1.14　设 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid 3<x\leqslant 7\}$，$C=\{x\mid x\leqslant 0\}$，都是空间 $R_1=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$ 中的集合．试求下列各集合：

(1)$\overline{A}$；(2)$A\cup B$；(3)$B\cap\overline{C}$；(4)$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$；

(5)$(A\cup B)\cap C$。

1.15　设 $R_1=(-\infty, +\infty)$，$A=\left(\frac{1}{2}, 1\right]$，

$B=\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$。

试求：

(1)$\overline{A\cup B}$；(2)$\overline{A}\cup\overline{B}$；(3)$\overline{A\cap B}$；(4)$\overline{A}\cap\overline{B}$。

1.16　由上题的结果验证下列各命题是否成立？

(1)若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$；(2)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(3)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；　　　(4)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；

(5)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

1.17　设 A、B 为任意两个集合，试将 $A\cup B$ 表示成 A 及另一个与 A 互不相交的集合的并集。

1.18　设 A、B、C 为任意三个集合，从 $A\cap C$ 和 $B\cap C$ 不

相交能否推出 A、B 一定不相交的结论？作图表示你的答案。

1.19 证明：（1）$\overline{\overline{A}}=A$；（2）$\overline{A}=\Omega\setminus A$；

（3）$A\setminus B=A\cap\overline{B}$。

1.20 证明集合运算的分配律：

（1）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

*（2）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

1.21 证明：

（1）$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$；

（2）$\overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$。

1.22 证明：

（1）$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；

（2）$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$。

1.23 化简：

（1）$(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（2）$(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})$；

（3）$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$；

（4）$(B\cup C)\cap(B\cup\overline{C})\cap(\overline{B}\cup C)$。

*1.24 判断下列等式是否成立？若成立，试用已知等式推证之；若不成立，请举反例说明之：

（1）$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$；

（2）$A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup C$；

（3）$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$；

（4）$(A\cup B)\setminus B=A$；

（5）$(A\setminus B)\cup B=A$。

通过此题想一想，数字运算的类似规律成立否？

*1.25　已知空间$\Omega=\{1,2,3,4\}$：

（1）写出Ω的全部子集；

（2）若将Ω的全部子集组成一个集类$\mathscr{F}$，这个集类对集合的三种基本运算（“并”、“交”及“差”）都封闭吗？（“封闭”指对$\mathscr{F}$中的任意两个集合进行某种运算的结果仍在$\mathscr{F}$内）。

（3）如果在$\mathscr{F}$中去掉一个集合Ω，问新的集类$\mathscr{F}'$对三种基本运算仍封闭吗？

三、习题解答

1.1　指出下列集合是怎样的集合？是有限集还是无限集？若是无限集，是否是可列集？

（1）$A=\{x\mid x^2=9\}$

解　A仅含-3和3两个元素，故为有限集。

（2）$B=\{x\mid x+2=-5\}$

解　B仅含-7一个元素，故为单元素集。

（3）$C=\{x\mid x^2<0;\ x$为实数$\}$

解　C是空集ϕ，是有限集的一种特殊情形，因为它的元素的个数为0。

（4）$D=\{x\mid x=4n+1;n=1,2,3,\cdots\}$

解　D所含元素组成等差数列：5,9,13,…．因为D通过关系式$x=4n+1$可与自然数集N建立一一对应关系，所以D是可列无限集。

（5）$E=\{x\mid x=2,3,4,5,\cdots\}$

解　因为E可改写为$E=\{x\mid x=n+1;n=1,2,\cdots\}$，所以

E 是可列无限集。

(6) $F=\{x \mid x \geqslant a, x \leqslant b; a, b$ 为给定的实数$\}$

解 1° 如果 $a<b$，则 $F=[a,b]$ 是不可列无限集；

2° 如果 $a=b$，则 F 为有限集且为单元素集，仅含 $x=a$ 或 b；

3° 如果 $a>b$，则 F 为空集。

(7) $G=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2 \leqslant 4\}$

解 G 为 xOy 平面上由同心圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 所夹的环形域（包括外边界而不包括内边界），它是无限不可列集。

*(8) $H=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c$ 为任意实数且 $a \neq 0\}$

解 H 为一切实系数二次多项式($a \neq 0$)的集合，它是无限不可列集。

1.2 用形如 $A=\{$元素$x \mid x$具有性质$p\}$的记号表示下列集合：

(1) 小于100的正整数集

解 $A=\{x \mid x<100;\ x$ 是正整数$\}$。

(2) 全部偶数集

解 $B=\{x \mid x=2n;\ n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots\}$。

(3) 双曲线 $xy=1$ 上一切点的集合

解 $C=\{(x,y) \mid xy=1\}$。

(4) 所有平行于已知直线 l_0：$2x+y=1$ 的一切直线 l 所组成的集合。

解 $D=\{$直线 $l \mid l \,/\!/\, l_0$；其中 l_0 为直线 $2x+y=1\}$。

1.3 设 Ω 为某一空间，A 为它的某一子集、x 为 A 中某一元素，问下列记法哪些正确？哪些错误？

(1) $x \in A$；　(2) $x \in \Omega$；　(3) $x \subset A$；　(4) $x \subset \Omega$；

(5) $A \in \Omega$；　(6) $A \subset \Omega$；　(7) $\{x\} \in A$；　(8) $\{x\} \subset A$。

解　(1)(2)(6)(8)正确。(3)(4)(5)(7)错误。

1.4　设 A 和 B 都是有限集，问在什么条件下 $A \cup B$ 的元素个数等于 A 的元素与 B 的元素个数之和？

解　条件为 $A \cap B = \phi$。

1.5　集合 $A \cup A$ 及 $A \cap A$ 分别等于什么？数字运算有类似结果吗？

解　$A \cup A = A$；$A \cap A = A$。数字运算中的加法和乘法对非零数 a 来说，$a + a = a$ 不成立；对非零且非 1 的数 a 来说，$a \cdot a = a$ 不成立。这是集合运算与数字运算不同点之一。

1.6　下面两式分别表示 A，B 之间有什么包含关系？

(1) $A \cap B = A$；　　(2) $A \cup B = A$；

解　(1)表示 $A \subset B$；　　(2)表示 $B \subset A$。

1.7　在什么情况下等式 $A \cap B \cap C = C$ 成立？

解　在集合 $A \cap B$ 包含集合 C 即 $C \subset A \cap B$ 时，等式才成立。

1.8　在什么情况下才会有 $B \setminus A = B$ 成立？

解　当 $A \cap B = \phi$ 或 $A = \phi$ 时，等式成立。

1.9　区间 $[-3,3]$ 与 $(-\infty,-1) \cup [3,+\infty)$ 的交集是怎样的一个集合？

解　它们的交集是集合：

$$[-3,-1) \cup \{3\}.$$

1.10　设 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 < 0\}$，

$B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leqslant 0\}$，求 $A \cap B = ?$

解　由解不等式可知：$A = (-3,2)$，$B = [-1,3]$，

$\therefore A\cap B=(-3,2)\cap[-1,\ 3]=[-1,2)$.

1.11　平面上由 $x^2+y^2\leqslant 4$ 所确定的集合与由 $x^2+y^2>1$ 所确定的集合的交集是怎样的一个集合？

解　设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$

$$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$$

于是

$$A\cap B=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$$

是一个环形域（含外边界而不含内边界）．

1.12　设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，

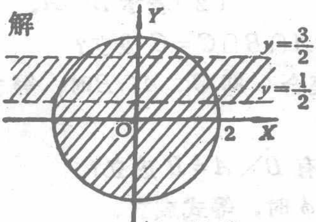
$$B=\left\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,\ \frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}\right\},$$

画图表示：

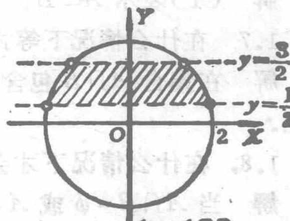
（1）$A\cup B$；　　（2）$A\cap B$；

（3）$A\setminus B$；　　（4）$B\setminus A$。

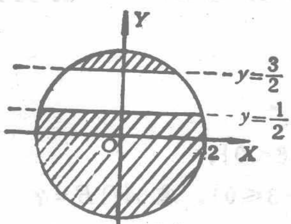
解



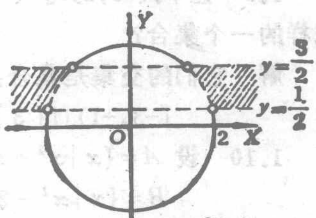
（1）$A\cup B$



（2）$A\cap B$



（3）$A\setminus B$



（4）$B\setminus A$