高等学校试用教材

工程数学

矢量分析与场论

重庆大学 谢 树 艺 编

人 民 教 育 出 版 社

前　言

本书是遵照1977年高等学校工科基础课教材座谈会所确定的任务，按同年在西安召开的高等学校工科数学教材编写会议所确定的编写大纲编写的. 它可作为高等学校工科《工程数学》试用教材之一，主要适用于电类专业，也可供有关工程技术人员参考之用.

使用本书的教学时数，除书末的附录部分外大约为20学时(包括习题课4～6学时在内).

本书由浙江大学主审，参加审稿的单位有北京航空学院、河北工学院、吉林工业大学、山东工学院、湖南大学、天津大学、西安冶金建筑学院、上海机械学院、上海交通大学、南京航空学院、西安交通大学、南京工学院. 编者对他们的热忱帮助，特致以衷心的感谢！

重庆大学谢树艺

目　　录

第一章　矢量分析

这一章矢量分析，是矢量代数的继续，它是场论的初步知识．其主要内容是介绍矢性函数及其微分、积分等．

第一节　矢 性 函 数

1. 矢性函数的概念

我们在矢量代数中，曾经学过模和方向都保持不变的矢量，这种矢量称为**常矢**（零矢量的方向为任意，可作为一个特殊的常矢量）；然而，在许多科学、技术问题中，我们常常遇到模和方向或其中之一会改变的矢量［例如当质点M沿曲线 l 作变速运动时，质点M的速度矢量 $\boldsymbol{v}$，它的模和方向，就是随着时间 t 的推移而有所变化的(图 1-1)，这里 $M_1, M_2, M_3, \cdots$ 表示质点M所在的位置．］，这种矢量称为**变矢**．此外，在矢量分析中还有矢性函数的概念，其定义如下．

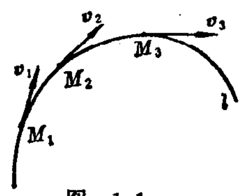


图　1-1

定义：设有数性变量 t 和变矢 $\boldsymbol{A}$，如果对于 t 在某个范围内的每一个数值，$\boldsymbol{A}$ 都有一个确定的矢量和它对应，则称 $\boldsymbol{A}$ 为数性变量 t 的**矢性函数**，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t) \tag{1.1}$$

这时，矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $Oxyz$ 直角坐标系中的三个坐标（即它在三个坐标轴上的投影），显然都是 t 的数性函数：

$$A_x(t),\ \ A_y(t),\ \ A_z(t)$$

依此，就可以写出矢量 $\boldsymbol{A}$ 的坐标表示式

$$\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿三个坐标轴正向的单位矢量.

2. 矢端曲线

本章所讲的矢量均指**自由矢量**，就是当二矢量的模和方向都相同时,就认为此二矢量是相等的. 依此,为了能用图形来直观地表示矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的变化状态,我们就可以把 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点. 这样，当 t 变化时，矢量 $\boldsymbol{A}(t)$的终点M就描绘出一条曲线 l 如图(1-2);这条曲线叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的**矢端曲线**,亦叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的**图形**. 同时称(1.1)式或(1.2)式为此曲线的**矢量方程**.

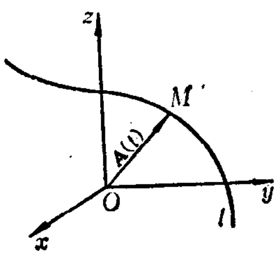


图 1-2

当我们把 $\boldsymbol{A}(t)$的起点取在坐标原点时，$\boldsymbol{A}(t)$实际上就成为其终点M的**矢径**. 我们知道,矢径有这样一个特点,就是它的三个坐标 $A_x(t),A_y(t),A_z(t)$正好对应地等于它的终点M的三个坐标 x,y,z. 即有

$$x=A_x(t),\quad y=A_y(t),\quad z=A_z(t) \tag{1.3}$$

此式就是曲线 l 以 t 为参数的**参数方程**.

容易看出,曲线 l 的矢量方程(1.2)和参数方程(1.3)之间,有着明显的一一对应关系,只要知道其中的一个,就可以立刻写出其另一个来.

例如：已知圆柱螺旋线(图 1-3)的参数方程为

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta,\quad z=b\,\theta$$

则其矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\,\boldsymbol{j}+b\,\theta\,\boldsymbol{k}$$

又如：已知摆线(图 1-4)的参数方程为

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

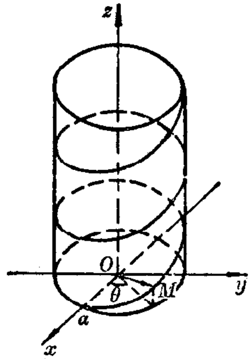


图 1-3

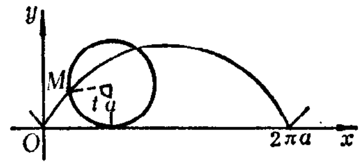


图 1-4

则其矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a(t-\sin t)\boldsymbol{i}+a(1-\cos t)\boldsymbol{j}$$

3. 矢性函数的极限和连续性

(1) 矢性函数极限的定义：设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在点 t_0 的某个邻域内有定义(但在 t_0 可以没有定义)，$\boldsymbol{A}_0$ 为一常矢．若对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，就有

$$|\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}_0|<\varepsilon$$

成立，则我们说，当 $t\to t_0$ 时矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$有极限 $\boldsymbol{A}_0$，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}_0 \tag{1.4}$$

这个定义与数性函数的极限定义完全类似．因此，矢性函数也就有类似于数性函数中的一些极限运算的法则．如

$$\lim_{t\to t_0}u(t)\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}u(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t) \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.8}$$

其中 u 为数性函数；$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$为矢性函数；且当 $t\to t_0$时，$u(t)$，$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$均有极限存在.

依此，设

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$$

则有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}A_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}A_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}A_z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.9}$$

(2) 矢性函数连续性的定义： 若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在点 t_0的某个邻域内有定义，而且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t_0) \tag{1.10}$$

则称 $\boldsymbol{A}(t)$在 $t=t_0$处连续.

若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在某个区间内的每一点处都连续，则称它在该区间内连续.

第二节　矢性函数的微分法

1. 矢性函数的导数

设有矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$(矢量的起点均相同)，当数性变量从 t 变到 $t+\Delta t(\Delta t\neq 0)$时，对应的矢量分别为

$$\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{OM}$$

与　$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON}$$

如图(1-5)，则

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$$

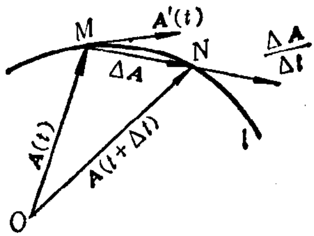


图　1-5

叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的**增量**，记作 $\Delta\boldsymbol{A}$，即

$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t) \tag{2.1}$$

据此，我们就可给出矢性函数的导数的定义.

定义： 设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在点 t 处的增量$\Delta\boldsymbol{A}$ 与对应的Δt 之

比

$$\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t \to 0$ 时，其极限存在，则称此极限为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在点 t 处的导数(简称导矢)，记作 $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ 或$\boldsymbol{A}'(t)$，即

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \tag{2.2}$$

若 $\boldsymbol{A}(t)$由坐标式给出:

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$$

且函数 $A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$可导，则有

$$\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}=\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

令 $\Delta t \to 0$ 两端取极限，就得到导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$的坐标表示式

$$\boldsymbol{A}'(t)=A_x'(t)\boldsymbol{i}+A_y'(t)\boldsymbol{j}+A_z'(t)\boldsymbol{k} \tag{2·3}$$

此式把求矢性函数的导矢，归结为求三个数性函数的导数。

例如：圆柱螺旋线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(\theta)=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\,\boldsymbol{j}+b\,\theta\,\boldsymbol{k}$$

则其导矢

$$\boldsymbol{r}'(\theta)=-a\sin\theta\,\boldsymbol{i}+a\cos\theta\,\boldsymbol{j}+b\,\boldsymbol{k}$$

2. 矢性函数的导数的几何意义

如图(1-5)，$\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}$是在割线 MN 上的一个矢量，当 $\Delta t>0$ 时，其指向与 $\Delta \boldsymbol{A}$ 一致，系指向 t 增大的一方，当 $\Delta t<0$ 时如图(1-6)，其指向与 $\Delta \boldsymbol{A}$ 相反，但此时 $\Delta \boldsymbol{A}$ 指向 t 减少的一方，从而$\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}$仍指向 t 增大的一方。

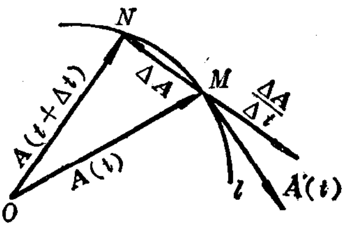


图 1-6

在 $\Delta t\to 0$ 时，由于割线 MN 绕点M转动，且以点M处的切线为其极限位置．此时，在割线 MN 上的矢量$\dfrac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}$，其极限位置，自然也就在此切线上，而我们知道

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}=\boldsymbol{A}'(t)$$

这就是说，导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$是在点M处的切线上，且由上述可知，其方向恒指向 t 增大的一方．导矢在几何上为一切向矢量．

3. 矢性函数的微分

设有矢性函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$，我们把

$$d\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)dt \qquad (dt=\Delta t) \tag{2.4}$$

称为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在 t 处的**微分**．

由于微分 $d\boldsymbol{A}$ 是导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$与增量 Δt 的乘积，所以它是一个矢量．它和导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$一样，在点M处与曲线 l 相切，但其指向当 $dt>0$ 时，与 $\boldsymbol{A}'(t)$的方向一致，而当$dt<0$ 时，则与$\boldsymbol{A}'(t)$的方向相反，如图(1-7)．

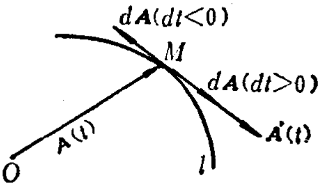


图 1-7

微分 $d\boldsymbol{A}$ 的坐标表示式，可由(2.3)式求得，即

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}'(t)dt\\&=A_x'(t)dt\,\boldsymbol{i}+A_y'(t)dt\,\boldsymbol{j}+A_z'(t)dt\,\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

或

$$d\boldsymbol{A}=dA_x\boldsymbol{i}+dA_y\boldsymbol{j}+dA_z\boldsymbol{k} \tag{2.5}$$

于是有

$$|d\boldsymbol{A}|=\sqrt{dA_x^2+dA_y^2+dA_z^2} \tag{2.6}$$

特别，对于矢径函数 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，其微分

$$d\boldsymbol{r}=dx\,\boldsymbol{i}+dy\,\boldsymbol{j}+dz\,\boldsymbol{k}$$

其模

$$|d\boldsymbol{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \tag{2.7}$$

另一方面，我们知道，若在规定了正向的曲线 l 上，取定一点作为计算弧长 s 的起点，并将 l 的正向取作 s 增大的方向；这样，在 l 上任一点处，弧长的微分

$$ds=\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \tag{2.8}$$

由此可见

$$|d\boldsymbol{r}|=|ds|. \tag{2.9}$$

就是说，矢径函数的微分的模，等于其矢端曲线的弧长微分的绝对值. 从而有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=\frac{|d\boldsymbol{r}|}{|ds|}=1 \tag{2.10}$$

这说明，矢径函数对(其矢端曲线的)弧长 s 的导数 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 为一单位矢量.

4. 矢性函数的导数公式

设矢性函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(t)$ 及数性函数 $u=u(t)$ 在 t 的某个范围内可导，则下列公式在该范围内成立

(1) $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{C}=0$, ($\boldsymbol{C}$ 为常矢)

(2) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\pm\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$

(3) $\dfrac{d}{dt}(k\boldsymbol{A})=k\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$, ($k$ 为常数)

(4) $\dfrac{d}{dt}(u\boldsymbol{A})=\dfrac{du}{dt}\boldsymbol{A}+u\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$

(5) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}$

(6) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}$

(7) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u)$，而 $u=u(t)$，则有

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{du}\frac{du}{dt}$$

这些公式的证明方法，与微积分学中数性函数的类似公式的证法完全相同. 比如公式(5)可以这样证明:

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

以 Δt 除两端，有

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{\Delta t}=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

再令 $\Delta t\to0$ 两端取极限，就得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{0}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\\&=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

例 1. 矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的模不变的充要条件是

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0 \tag{2.11}$$

证: 假定 $|\boldsymbol{A}|=$ 常数

则有 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|^2=$ 常数

两端对 t 求导，就得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0$$

反之，若有 $\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0$

则有 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}^2=0$

从而 $\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|^2=$ 常数

所以有 $$|\boldsymbol{A}|=\text{常数}$$

这个例子，可以简单地说成：定长矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 与其导矢互相垂直. 特别对于单位矢量 $\boldsymbol{A}^\circ=\boldsymbol{A}^\circ(t)$ 有

$$\boldsymbol{A}^\circ \perp \frac{d\boldsymbol{A}^\circ}{dt} \tag{2.12}$$

例 2. 导矢在力学上的应用：

设质点 M 在空间运动，其矢径 $\boldsymbol{r}$ 与时间 t 的函数关系为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

这个函数的矢端曲线，就是质点 M 运动的轨迹，如图(1-8)中的曲线 l. 假定质点 M 从 $t=0$ 到时刻 t 在 l 上所经过的路程为 s，则有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

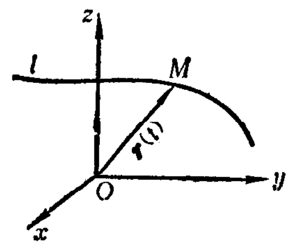


图 1-8

式中的 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 按导矢的几何意义，并由(2.10)式得知，它是在点 M 处切线方向上的单位矢量，指向 s 增大的一方，现以 $\boldsymbol{\tau}$ 表之；而式中的 $\dfrac{ds}{dt}$ 是路程 s 对时间 t 的变化率，因此它表示质点 M 运动速度的大小，如以 v 表之，则

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=v\boldsymbol{\tau}$$

由此可见，导矢 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 表出了质点 M 运动速度的大小和方向，所以它就是质点 M 运动的**速度矢量** $\boldsymbol{v}$，即

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=v\boldsymbol{\tau} \tag{2.13}$$

显然，$\boldsymbol{w}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ 为质点 M 运动的加速度矢量.

第三节　矢性函数的积分

矢性函数的积分和数性函数类似，也有不定积分和定积分两种，现分述于下：

1. 矢性函数的不定积分

定义： 若 $\boldsymbol{B}'(t)=\boldsymbol{A}(t)$，则称 $\boldsymbol{B}(t)$ 为 $\boldsymbol{A}(t)$ 的一个**原函数**. $\boldsymbol{A}(t)$ 的原函数的全体，叫做 $\boldsymbol{A}(t)$ 的**不定积分**，记作

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{3.1}$$

和数性函数一样，若已知 $\boldsymbol{B}(t)$ 是 $\boldsymbol{A}(t)$ 的一个原函数，则有

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{C} \qquad (\boldsymbol{C}\text{ 为任意常矢}) \tag{3.2}$$

由于矢性函数的不定积分和数性函数的不定积分在形式上完全类似，因此，数性函数不定积分的基本性质对矢性函数来说仍然成立。例如

$$\int k\boldsymbol{A}(t)dt=k\int \boldsymbol{A}(t)dt, \qquad (k\text{ 为常数}) \tag{3.3}$$

$$\int \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{A}(t)dt, \qquad (\boldsymbol{a}\text{ 为常矢}) \tag{3.4}$$

$$\int [\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]dt=\int \boldsymbol{A}(t)dt\pm\int \boldsymbol{B}(t)dt \tag{3.5}$$

此外，若

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$$

则有

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt=\left(\int A_x(t)dt\right)\boldsymbol{i}+\left(\int A_y(t)dt\right)\boldsymbol{j}+\left(\int A_z(t)dt\right)\boldsymbol{k} \tag{3.6}$$

此式把求矢性函数的不定积分，归结为求三个数性函数的不定积分.

2. 矢性函数的定积分

定义：设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在区间$[T_1, T_2]$上连续，则 $\boldsymbol{A}(t)$在$[T_1,T_2]$上的定积分是指下面形式的极限：

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)dt=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}(\xi_i)\Delta t_i \tag{3.7}$$

其中 $T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T_2$；$\xi_i$ 为区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的一点；$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$；$\lambda=\max \Delta t_i$，$(i=1, 2, \cdots, n)$.

可以看出，矢性函数的定积分概念，也和数性函数的完全类似. 因此，也相应地具有数性函数定积分的基本性质. 例如

若 $\boldsymbol{B}(t)$是连续矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在区间$[T_1,T_2]$上的一个原函数，则

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{B}(T_2)-\boldsymbol{B}(T_1) \tag{3.8}$$

其他的性质就不一一列举了.

此外，类似于(3.6)式，求矢性函数的定积分也可归结为求三个数性函数的定积分.

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)dt=\left(\int_{T_1}^{T_2}A_x(t)dt\right)\boldsymbol{i}+\left(\int_{T_1}^{T_2}A_y(t)dt\right)\boldsymbol{j}+\left(\int_{T_1}^{T_2}A_z(t)dt\right)\boldsymbol{k} \tag{3.9}$$

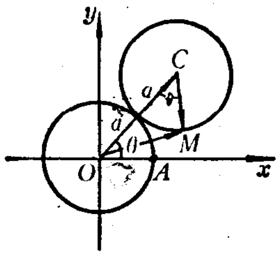
习 题 1

1. 写出下列曲线的矢量方程，并说明它们是何种曲线.

(1) $x=a\cos t$，$y=b\sin t$

(2) $x=3\sin t$，$y=4\sin t$，$z=3\cos t$

2. 设有定圆 O 与动圆 C，半径均为 a，动圆在定圆外相切而滚动(如图). 求动圆上一定点M所描曲线的矢量方程.



第 2 题

[提示: ①设开始时M点与A点重合; ②取 $\angle AOC=\theta$ 为参数; ③$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$]

3. 求曲线

$$x=a\sin^2 t,\quad y=a\sin 2t,\quad z=a\cos t$$

在 $t=\dfrac{\pi}{4}$处的切向矢量.

4. 求曲线 $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$ 上的点, 使该点的切线平行于平面

$$x+2y+z=4$$

5. 证明圆柱螺旋线

$$\boldsymbol{r}=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\boldsymbol{j}+b\theta\boldsymbol{k}$$

的切线与 z 轴之间成定角.

6. 求等速圆周运动 $\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$ 的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{w}$, 并讨论它们与 $\boldsymbol{r}$ 的关系.

7. 设 $\boldsymbol{r}=-a\sin\theta\boldsymbol{i}+a\cos\theta\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$. 求

$$\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\,d\theta$$

第二章　场　　论

在许多科学、技术问题中，常常要考察某种物理量（如温度、密度、电位、力、速度等等）在空间的分布和变化规律. 为了揭示和探索这些规律，数学上就引进了场的概念.

第一节　场

1. 场的概念

如果在全部空间或部分空间里的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，就说在这空间里确定了该物理量的**场**. 如果这物理量是数量，就称这个场为**数量场**；若是矢量，就称这个场为**矢量场**. 例如温度场、密度场、电位场等为数量场；而力场、速度场等为矢量场.

此外，若场中之物理量在各点处的对应值不随时间而变化，则称该场为**稳定场**；否则，称为**不稳定场**. 后面我们只讨论稳定场（当然，所得的结果也适合于不稳定场的每一瞬间情况）.

2. 数量场的等值面

由数量场的定义可知，分布在数量场中各点处的数量 u 是场中之点 M 的单值函数 $u=u(M)$，当取定了 $Oxyz$ 坐标系以后，它就成为点 M 的坐标 (x, y, z) 的函数了，即

$$u=u(x, y, z) \tag{1.1}$$

就是说，一个数量场，可以用一个函数来表示. 此后，我们恒假定这函数具有一阶连续偏导数.

在数量场中，为了直观地研究物理量 u 在场中的分布状况，常常需要考察场中有相同物理量的点，也就是使 $u(x, y, z)$ 取相同数