数学分析精选习题解析

（上 册）

北京大学数学科学学院

林源渠 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数学分析精选习题解析
(上册)

林源渠　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析精选习题解析. 上册 / 林源渠编著. —北京：北京大学出版社，2016. 10
ISBN 978-7-301-27473-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①数学分析—题解 Ⅳ. ①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 212669 号

书　　名	数学分析精选习题解析（上册） SHUXUE FENXI JINGXUAN XITI JIEXI (SHANG CE)
著作责任者	林源渠　编著
责任编辑	潘丽娜
标准书号	ISBN 978-7-301-27473-6
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪官方微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	890 毫米×1240 毫米　A5　11.75 印张　300 千字
	2016 年 10 月第 1 版　2016 年 10 月第 1 次印刷
定　　价	35.00 元

目　　录

第一章　极限与连续

§1　数 列 极 限

内 容 提 要

1. 数列极限的定义

设 $\{a_n\}$ 为数列, a 为定数. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称**数列**$\{a_n\}$**收敛于**a, a 称为**数列**$\{a_n\}$ **的极限**, 并记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

等价说法: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0$, 邻域 $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ 之外至多含有数列 $\{a_n\}$ 中的有限项. 数列极限的几何意义如示意图 1.1 所示.

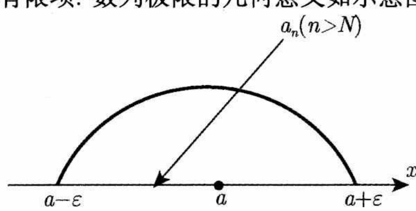

图 1.1

2. 数列极限的性质

性质 1 (唯一性)　收敛数列的极限是唯一的.

性质 2 (有界性)　收敛数列必有界.

性质 3 (保号性)　若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 则 $\exists N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $a_n>0$.

性质 4 (保序性)　设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为数列, 若存在正整数 N_0 , 使得当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \leqslant b_n$,则

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

性质 5　改变数列的有限项不改变数列的敛散性, 且不改变收敛数列的极限.

性质 6 (夹逼准则)　设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均以 a 为极限, 数列 $\{c_n\}$ 满足

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n,$$

则数列 $\{c_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

3. 极限存在准则

单调有界原理　单调上升有上界或单调下降有下界的数列必有极限.

4. 斯托克斯 (Stolz) 定理

定理 1 $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$　设 $\{x_n\}$ 是趋于零的数列, $\{y_n\}$ 是单调递减趋于零的数列. 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$ 存在或为 $+\infty$ 时, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ 也存在或为 $+\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}.$$

定理 2 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$　设数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ 存在或为 $+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n}$ 也存在或为 $+\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

典型例题解析

例 1　求证: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 存在最大项, 即 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_n \leqslant a_{N_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 所以可取 $\varepsilon = a_1 > 0$, 那么 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $0 < a_n < a_1$, 只要 $n > N$. 因此,

$$a_{N_0} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}.$$

例 2 求证: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则数列 $\{a_n\}$ 存在最小项, 即 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_n \geqslant a_{N_0}, \forall n \in \mathbb{N}$.

证明 用反证法. 假设数列不存在最小项, 即 $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n 都不是 $\{a_n\}$ 的最小项, 也就是 a_n 后面总存在某一项比它小. 这句话用式子写出来就是: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n$, 使得 $a_m < a_n$.

取 $n = 1, \exists n_1 > 1$, 使得 $a_{n_1} < a_1$;

取 $n = n_1, \exists n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} < a_{n_1}$;

取 $n = n_2, \exists n_3 > n_2$, 使得 $a_{n_3} < a_{n_2}$;

$\cdots\cdots\cdots$

于是得到数列 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}\}$, 且

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \cdots > a_{n_k} > \cdots, \quad n_k \to \infty.$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 矛盾. 所以 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_n \geqslant a_{N_0}, \forall n \in \mathbb{N}$.

例 3 证明: 若数列无上界, 则必存在收敛于正无穷的子列.

证明 设 $n_1 = 1$, 因为数列 $\{x_n\}$ 无上界, 故 $\exists n_2 > 1 = n_1$, 使得

$$x_{n_2} > \max\{1, x_1\};$$

同理, 因为数列 $\{x_n\}$ 无上界, $\exists n_3 > n_2$, 使得

$$x_{n_3} > \max\{2, x_1, x_{n_2}\};$$

$\cdots\cdots\cdots$

若已取 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 使得

$$x_{n_{i+1}} > \max\{i, x_1, x_{n_2}, \cdots, x_{n_i}\}, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

再根据 $\{x_n\}$ 无上界, $\exists n_{k+1} > n_k$, 使得

$$x_{n_{k+1}} > \max\{k, x_1, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}\}.$$

从而得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x'_{n_k}\}$, $x'_{n_k} = x_{n_k} > k$, 从而 $x'_{n_k} \to +\infty$.

例 4 若在 $[a, b]$ 中有两个数列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 满足 $x_n - y_n \to 0$, 则两个数列中能找到具有相同足标 n_k 的子列, 使得

$$x_{n_k} \to x_0, \quad y_{n_k} \to x_0.$$

证明　因 $a \leqslant x_n \leqslant b$, 故 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$. 所以

$$\begin{array}{ccc} y_{n_k} & & x_0 \\ \| & & \| \\ x_{n_k} - (x_{n_k} - y_{n_k}) & \to & x_0 - 0 \end{array}$$

从此 U 形等式串的两端即知, $y_{n_k} \to x_0$. 于是同时有

$$x_{n_k} \to x_0, \quad y_{n_k} \to x_0.$$

例 5　设 $a_n > 0\ \ (n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\exists C > 0$, 当 $n > m$ 时, $a_n \leqslant C a_m$. 若已知 $\{a_n\}$ 存在子序列 $\{a_{n_k}\}$, 且 $a_{n_k} \to 0$. 求证:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

证明　$\forall \varepsilon > 0$, 由 $a_{n_k} \to 0$ 可知, $\exists K_1$, 使得当 $k > K_1$ 时, 有

$$|a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

再令 $N = n_{K_1+1}$, 则当 $n > N$ 时,

$$\begin{array}{ccc} a_n & & \varepsilon \\ \wedge\!\backslash & & \| \\ C a_{n_{K_1+1}} & < & C \cdot \dfrac{\varepsilon}{C} \end{array}$$

从此 U 形等式–不等式串的两端即知, $0 < a_n < \varepsilon$. 于是 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

例 6　设 $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n} = \alpha_1$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n+1} = \alpha_2$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_{3n} = \alpha_3$. 求证: 存在极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

证明　**第一步**　因为 $\{x_{6n}\}$ 既是 $\{x_{2n}\}$ 的子序列, 也是 $\{x_{3n}\}$ 的子序列, 所以

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} x_{6n} = \alpha_1, \\ \lim\limits_{n \to \infty} x_{6n} = \alpha_3, \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3, \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_{6n} = \alpha_1, \quad \lim_{n \to \infty} x_{6n} = \alpha_3.$$

另一方面, $\{x_{6n+3}\}$ 既是 $\{x_{2n+1}\}$ 的子序列, 也是 $\{x_{3n}\}$ 的子序列, 故

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_{6n+3}=\alpha_2,\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_{6n+3}=\alpha_3,\end{array}\right. \Rightarrow \alpha_2=\alpha_3. \tag{2}$$

联立 (1), (2) 两式即得 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$.

第二步 根据第一步可以改写 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=l$, 并证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_0\geqslant 1$, $N_1\geqslant 1$, 使得

$$\left\{\begin{array}{ll}|x_{2k}-l|<\varepsilon, & \forall n\geqslant N_0,\\ |x_{2k+1}-l|<\varepsilon, & \forall n\geqslant N_1.\end{array}\right. \tag{3}$$

设 $N=\max\{2N_0,2N_1+1\}, n\geqslant N$. 如果 $n=2k$, 则有 $k\geqslant N_0$, 因为 $n\geqslant N\geqslant 2N_0$, 由 (3) 中的第一行不等式,

$$|x_{2k}-l|<\varepsilon \quad 或 \quad |x_n-l|<\varepsilon.$$

类似地, 如果 $n=2k+1$, 则有 $k\geqslant N_1$, 因为 $n\geqslant N\geqslant 2N_1+1$, 由 (3) 中的第二行不等式,

$$|x_{2k+1}-l|<\varepsilon \quad 或 \quad |x_n-l|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$

例 7 设 $\{x_n\}$ 是一个无界数列, 但非无穷大量. 证明: 存在两个子列, 一个是无穷大量, 另一个是收敛子列.

证明 设 $n_1=1$, 因为数列 $\{x_n\}$ 无界, 所以 $\exists n_2>1=n_1$, 使得

$$|x_{n_2}|>\max\{1,|x_1|\};$$

同理, 因为数列 $\{x_n\}$ 无界, 所以 $\exists n_3>n_2$, 使得

$$|x_{n_3}|>\max\{2,|x_1|,|x_{n_2}|\};$$

....

若已取 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，使得

$$\left|x_{n_{i+1}}\right| > \max\left\{i, |x_1|, |x_{n_2}|, \cdots, |x_{n_i}|\right\}, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

再根据 $\{x_n\}$ 无界, $\exists n_{k+1} > n_k$, 使得

$$\left|x_{n_{k+1}}\right| > \max\left\{k, |x_1|, |x_{n_2}|, \cdots, |x_{n_k}|\right\},$$

故得 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x'_{n_k}\}$, $x'_{n_k} = x_{n_k}$, $\left|x'_{n_k}\right| = |x_{n_k}| > k$, 从而 $x'_{n_k} \to \infty$.

其次, 因为 $\{x_n\}$ 不是无穷大量, 即 $\exists M_0 > 0$, $\forall N$, $\exists n > N$, 使得 $|x_n| \leqslant M_0$. 从而 $\{x_n\}$ 有子列 $\left\{x''_{n_k}\right\}$, 且 $\left|x''_{n_k}\right| \leqslant M_0$, 即子列 $\left\{x''_{n_k}\right\}$ 是有界的, 故此有界子列有收敛子列 $\left\{x''_{n_{k_j}}\right\}$.

例 8 设 $a_n \neq 0, n \geqslant 1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 则 $|l| \leqslant 1$.

证明 用反证法. 假设 $|l| > 1$, 见示意图 1.2, 取 $c = \dfrac{|l|+1}{2}$, 则 $c > 1$. 由极限的保号性得

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > c.$$

由此可得, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+p}| > c^p |a_n| \to +\infty, \quad p \to \infty.$$

这与已知条件 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 矛盾. 故 $|l| \leqslant 1$.

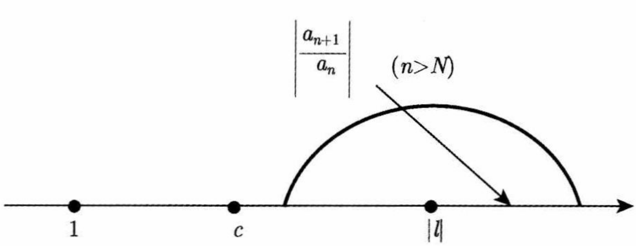

图 1.2

例 9 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1}), n \geqslant 2$.

① 若 $\{a_n\}$ 不是单调下降数列, 求证: $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时, $\{a_n\}$ 是单调上升数列;

② 试举出满足题设条件 $\{a_n\}$ 的例子:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 为有限数;

(ii) 当 $n \to \infty$ 时,$a_n \to +\infty$;

(iii) 当 $n \to \infty$ 时,$a_n \to -\infty$.

证明 ① 若 $\{a_n\}$ 是单调下降数列, 则是指对 $\forall\, n \geqslant 2$, 有

$$a_n \geqslant a_{n+1};$$

所以当 $\{a_n\}$ 不是单调下降数列时, 则是指 $\exists N \geqslant 2$, 使得 $a_{N+1} > a_N$.

为了证明当 $n > N$ 时, $\{a_n\}$ 是单调上升数列, 就是要证明, 对 $\forall n \geqslant 1$ 成立

$$a_{N+2} > a_{N+1},$$

$$a_{N+3} > a_{N+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{N+n+1} > a_{N+n}.$$

采用数学归纳法. 首先假设 $a_{N+1} > a_N$, 则对 $n = 1$, 有

$$a_{N+1} < \frac{1}{2}(a_N + a_{N+2}) < \frac{1}{2}(a_{N+1} + a_{N+2}).$$

由此推出, $a_{N+2} > a_{N+1}$. 这说明 $a_{N+n+1} > a_{N+n}$ 对 $n = 1$ 成立.

现假设 $a_{N+k+1} > a_{N+k}$ 对 $k > 1$ 成立, 则有

$$a_{N+k+1} < \frac{1}{2}(a_{N+k} + a_{N+k+2}) < \frac{1}{2}(a_{N+k+1} + a_{N+k+2}),$$

由此推出, $a_{N+k+2} > a_{N+k+1}$. 这说明 $a_{N+n+1} > a_{N+n}$ 对 $n = k+1$ 成立. 于是根据数学归纳法原理, $a_{N+n+1} > a_{N+n}$ 对 $\forall n \geqslant 1$ 成立. 这就证明了, 当 $n > N$ 时, $\{a_n\}$ 是单调上升数列.

② (i) 取 $a_n = \dfrac{1}{n}$.

$$\begin{array}{ccc}
a_{n-1}+a_{n+1} & & \dfrac{2}{n}=2a_n \\
\parallel & & \wedge \\
\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n+1} & = & \dfrac{2}{n}\dfrac{n^2}{n^2-1}
\end{array}$$

从此 U 形等式–不等式串的两端即知, $a_n < \dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1})$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) 取 $a_n = n^2$.

$$\begin{array}{ccc}
a_{n-1}+a_{n+1} & & 2n^2=2a_n \\
\parallel & & \wedge \\
(n-1)^2+(n+1)^2 & = & 2n^2+2
\end{array}$$

从此 U 形等式–不等式串的两端即知, $a_n < \dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1})$. 显然当 $n\to\infty$ 时, $a_n\to+\infty$.

(iii) 取 $a_n = -\sqrt{n}$.

对此 a_n, 要证 $a_{n-1}+a_{n+1} > 2a_n$, 容易归结为要证明下面的不等式:

$$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}.$$

不等式两边同除以 $\sqrt{n}$, 就是要证明不等式:

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n-1}{n}} < 2. \tag{1}$$

根据平均值不等式, 有

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} < \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{n}\right);$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1} < \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

以上两个不等式相加得到不等式 (1). 显然当 $n\to\infty$ 时, $a_n\to-\infty$.

例 10 设实数列 $\{a_n\}$ 和实数 A 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = A^2, \quad \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

求证: ① 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, a_n 有相同的符号;

② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -A$.

证明 ① 因为 $A \neq 0$, 有

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \dfrac{1}{|A|}\left|a_n^2 - A^2\right| \\ \wedge\!\!\backslash & & \vee\!/ \\ \left||a_n| - |A|\right| & = & \dfrac{\left|a_n^2 - A^2\right|}{|a_n| + |A|} \end{array}$$

由极限的夹逼准则知,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|.$$

因此, $\exists N_1$, 使得 $|a_n| > \frac{1}{2}|A|$, 只要 $n > N_1$; 又由题设, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$, $\exists N_2$, 使得 $|a_{n+1} - a_n| < |A|$, 只要 $n > N_2$.

于是取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n| > \frac{1}{2}|A| \tag{1}$$

与

$$|a_{n+1} - a_n| < |A| \tag{2}$$

同时成立.

下面证明 ① 的结论. 如果不然, 即 $\exists n > N$, 使得 $a_n a_{n+1} \leqslant 0$, 则有

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1}| + |a_n|. \tag{3}$$

根据不等式 (2), $|a_{n+1} - a_n| < |A|$; 而根据不等式 (1), $|a_{n+1}| + |a_n| > |A|$, 矛盾.

② 若 $A=0$, 则 $\lim\limits_{h\to\infty} a_n^2=0$, 即对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_0$, 使得当 $n>N_0$ 时,

$$\left|a_n^2\right|<\varepsilon^2\Rightarrow\left|a_n\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0=A.$$

若 $A\neq 0$, 应用第 ① 小题的结果, 当 $n>N$ 时, 可以表达 $a_n=\sigma\left|a_n\right|$, 其中 $\sigma=\pm 1$. 也就是当 $n>N$ 时, 或 $a_n=\left|a_n\right|$ 或 $a_n=-\left|a_n\right|$ 二者必居其一. 故有

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} a_n=-A.$$

例 11 设函数 $f(x)$ 是具有不全为零的实系数的多项式, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=1.$$

证明 设多项式 $f(x)$ 的最高次项为 $x^p(p\in\mathbb{N})$, 并假定其首项系数 $a_0\neq 0$, 将 $f(x)$ 表示为

$$f(x)=a_0x^p\left(1+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots\right),$$

则有

$$f(n)\sim a_0n^p,\quad f(n+1)\sim a_0(n+1)^p,$$

故有

$$\begin{array}{ccc}
\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n+1)}{f(n)} & & 1 \\
\parallel & & \parallel \\
\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0(n+1)^p}{a_0n^p} & = & \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p
\end{array}$$

从此 U 形等式串的两端即知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=1.$$

例 12 设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, α 是一任意实数.

求证: $x_n = \dfrac{[\alpha]+[2\alpha]+\cdots+[n\alpha]}{n^2}$ 收敛.

证明 根据函数 $[\,\cdot\,]$ 的定义, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $[x] \leqslant x < [x]+1$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{(\alpha-1)+(2\alpha-1)+\cdots+(n\alpha-1)}{n^2} &\leqslant \frac{[\alpha]+[2\alpha]+\cdots+[n\alpha]}{n^2}\\ &\leqslant \frac{\alpha+2\alpha+\cdots+n\alpha}{n^2},\end{aligned}$$

即

$$\frac{(1+2+\cdots+n)\,\alpha-n}{n^2} \leqslant \frac{[\alpha]+[2\alpha]+\cdots+[n\alpha]}{n^2} \leqslant \frac{(1+2+\cdots+n)\,\alpha}{n^2}.$$

在上面不等式的两端应用代数恒等式

$$1+2+\cdots+m = \frac{m\,(m+1)}{2}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

得到

$$\frac{\dfrac{n\,(n+1)}{2}\alpha-n}{n^2} \leqslant \frac{[\alpha]+[2\alpha]+\cdots+[n\alpha]}{n^2} \leqslant \frac{\dfrac{n\,(n+1)}{2}\alpha}{n^2},$$

即

$$\frac{(n+1)\,\alpha}{2n}-\frac{1}{n} \leqslant \frac{[\alpha]+[2\alpha]+\cdots+[n\alpha]}{n^2} \leqslant \frac{(n+1)\,\alpha}{2n}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\,\alpha}{2n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{\alpha}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,\alpha}{2n}=\frac{\alpha}{2}.$$

由极限的夹逼准则, 即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\alpha]+[2\alpha]+\cdots+[n\alpha]}{n^2}=\frac{\alpha}{2}.$$

例 13 设函数 $f\,(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调, 又 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f\,(x_n)=f\,(a)$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证明 用反证法. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 不成立, 则 $\exists \varepsilon_0>0$ 及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得