



数学分析 精选习题解析

(上册)

北京大学数学科学学院

林源渠 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数学分析精选习题解析 (上册)

林源渠 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析精选习题解析. 上册 / 林源渠编著. —北京: 北京大学出版社, 2016. 10

ISBN 978-7-301-27473-6

I. ①数… II. ①林… III. ①数学分析—题解 IV. ①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 212669 号

书 名 数学分析精选习题解析 (上册)

SHUXUE FENXI JINGXUAN XITI JIEXI (SHANG CE)

著作责任者 林源渠 编著

责任编辑 潘丽娜

标准书号 ISBN 978-7-301-27473-6

出版发行 北京大学出版社

地 址 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址 <http://www.pup.cn> 新浪官方微博: @北京大学出版社

电子信箱 zpup@pup.cn

电 话 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

印刷者 北京大学印刷厂

经 销 者 新华书店

890 毫米×1240 毫米 A5 11.75 印张 300 千字

2016 年 10 月第 1 版 2016 年 10 月第 1 次印刷

定 价 35.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

图书如有印装质量问题, 请与出版部联系, 电话: 010-62756370

目 录

第一章	极限与连续	1
§1	数列极限	1
	内容提要	1
	1. 数列极限的定义	1
	2. 数列极限的性质	1
	3. 极限存在准则	2
	4. 斯托克斯 (Stolz) 定理	2
	典型例题解析	2
§2	函数极限与连续概念	59
	内容提要	59
	1. 六种极限过程及其数学刻画	59
	2. 四种极限值	59
	3. 函数极限的性质	59
	4. 海涅 (Heine) 定理	60
	5. 斯托克斯 (Stolze) 定理	60
	典型例题解析	61
§3	闭区间上连续函数的性质	69
	内容提要	69
	典型例题解析	69
§4	实数系连续性的基本定理及其应用	82
	内容提要	82
	1. 常用的七条实数连续性定理	82
	2. 常用的七条实数连续性定理的等价性	83
	典型例题解析	88
§5	上、下极限	140
	内容提要	140

	1. 数列的上、下极限	140
	2. 函数的上、下极限	145
	典型例题解析	147
第二章	一元函数微分学	167
§1	导数和微分	167
	内容提要	167
	1. 导数的定义	167
	2. 导数的几何意义	167
	3. 单侧导数	167
	4. 基本公式	168
	5. 求导的基本法则	168
	6. 高阶导数	169
	7. 微分定义	169
	8. 函数可微的充分必要条件	169
	9. 一阶微分形式的不变性	170
	10. 几何应用	170
	典型例题解析	170
§2	微分中值定理	183
	内容提要	183
	1. 费马 (Fermat) 定理	183
	2. 罗尔 (Rolle) 定理	183
	3. 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	183
	4. 柯西 (Cauchy) 中值定理	183
	5. 达布 (Darboux) 定理 (导函数介值定理)	184
	典型例题解析	184
§3	函数的升降、凹凸、极值、最值问题	245
	内容提要	245
	1. 函数单调性判别法	245
	2. 函数极值的定义	245
	3. 函数取极值的判别法 I	245
	4. 函数取极值的判别法 II	246

	5. 函数的凹凸性、拐点及函数作图	246
	典型例题解析	249
§4	洛必达法则与泰勒公式	261
	内容提要	261
	1. 洛必达 (L'Hospital) 法则	261
	2. 泰勒 (Taylor) 公式	261
	3. 常用函数的麦克劳林 (Maclaurin) 公式	262
	典型例题解析	262
第三章	一元函数积分学	287
	内容提要	287
	1. 定积分的定义	287
	2. 连续函数的可积性	288
	3. 微积分基本定理 (Newton-Leibniz 公式)	288
	4. 定积分的性质	288
	5. 变限定积分	289
	6. 定积分的计算	289
	7. 积分中值定理	290
	8. 两个重要不等式	290
	9. 函数可积的充分必要条件	291
	10. 广义积分	292
	典型例题解析	293

第一章 极限与连续

§1 数列极限

内容提要

1. 数列极限的定义

设 $\{a_n\}$ 为数列, a 为定数. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 并记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

等价说法: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的充分必要条件是 $\forall \varepsilon > 0$, 邻域 $U_\varepsilon(a)$ 之外至多含有数列 $\{a_n\}$ 中的有限项. 数列极限的几何意义如示意图 1.1 所示.

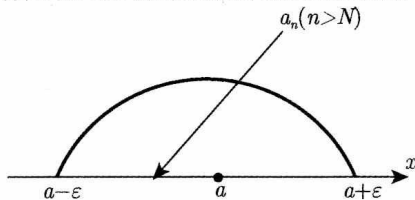


图 1.1

2. 数列极限的性质

性质 1 (唯一性) 收敛数列的极限是唯一的.

性质 2 (有界性) 收敛数列必有界.

性质 3 (保号性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

性质 4 (保序性) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为数列, 若存在正整数 N_0 , 使得当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \leq b_n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

性质 5 改变数列的有限项不改变数列的敛散性, 且不改变收敛数列的极限.

性质 6 (夹逼准则) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均以 a 为极限, 数列 $\{c_n\}$ 满足

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

则数列 $\{c_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

3. 极限存在准则

单调有界原理 单调上升有上界或单调下降有下界的数列必有极限.

4. 斯托克斯 (Stolz) 定理

定理 1 ($\frac{0}{0}$ 型) 设 $\{x_n\}$ 是趋于零的数列, $\{y_n\}$ 是单调递减趋于零的数列.

若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$ 存在或为 $+\infty$ 时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ 也存在或为 $+\infty$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}.$$

定理 2 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 若极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ 存在或为 $+\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ 也存在或为 $+\infty$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

典型例题解析

例 1 求证: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 存在最大项, 即 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_n \leq a_{N_0}, \forall n \in \mathbb{N}$.

证明 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 所以可取 $\varepsilon = a_1 > 0$, 那么 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $0 < a_n < a_1$, 只要 $n > N$. 因此,

$$a_{N_0} = \max \{a_1, a_2, \dots, a_N\}.$$

例 2 求证: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则数列 $\{a_n\}$ 存在最小项, 即 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_n \geq a_{N_0}, \forall n \in \mathbb{N}$.

证明 用反证法. 假设数列不存在最小项, 即 $\forall n \in \mathbb{N}, a_n$ 都不是 $\{a_n\}$ 的最小项, 也就是 a_n 后面总存在某一项比它小. 这句话用式子写出来就是: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n$, 使得 $a_m < a_n$.

取 $n = 1, \exists n_1 > 1$, 使得 $a_{n_1} < a_1$;

取 $n = n_1, \exists n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} < a_{n_1}$;

取 $n = n_2, \exists n_3 > n_2$, 使得 $a_{n_3} < a_{n_2}$;

.....

于是得到数列 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}\}$, 且

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \cdots > a_{n_k} > \cdots, \quad n_k \rightarrow \infty.$$

这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 矛盾. 所以 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_n \geq a_{N_0}, \forall n \in \mathbb{N}$.

例 3 证明: 若数列无上界, 则必存在收敛于正无穷的子列.

证明 设 $n_1 = 1$, 因为数列 $\{x_n\}$ 无上界, 故 $\exists n_2 > 1 = n_1$, 使得

$$x_{n_2} > \max\{1, x_1\};$$

同理, 因为数列 $\{x_n\}$ 无上界, $\exists n_3 > n_2$, 使得

$$x_{n_3} > \max\{2, x_1, x_{n_2}\};$$

.....

若已取 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 使得

$$x_{n_{i+1}} > \max\{i, x_1, x_{n_2}, \cdots, x_{n_i}\}, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

再根据 $\{x_n\}$ 无上界, $\exists n_{k+1} > n_k$, 使得

$$x_{n_{k+1}} > \max\{k, x_1, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}\}.$$

从而得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x'_{n_k}\}$, $x'_{n_k} = x_{n_k} > k$, 从而 $x'_{n_k} \rightarrow +\infty$.

例 4 若在 $[a, b]$ 中有两个数列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 满足 $x_n - y_n \rightarrow 0$, 则两个数列中能找到一个具有相同足标 n_k 的子列, 使得

$$x_{n_k} \rightarrow x_0, \quad y_{n_k} \rightarrow x_0.$$

证明 因 $a \leq x_n \leq b$, 故 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$). 所以

$$\begin{array}{ccc} y_{n_k} & & x_0 \\ \parallel & & \parallel \\ x_{n_k} - (x_{n_k} - y_{n_k}) & \rightarrow & x_0 - 0 \end{array}$$

从此 U 形等式串的两端即知, $y_{n_k} \rightarrow x_0$. 于是同时有

$$x_{n_k} \rightarrow x_0, \quad y_{n_k} \rightarrow x_0.$$

例 5 设 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\exists C > 0$, 当 $n > m$ 时, $a_n \leq Ca_m$. 若已知 $\{a_n\}$ 存在子序列 $\{a_{n_k}\}$, 且 $a_{n_k} \rightarrow 0$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $a_{n_k} \rightarrow 0$ 可知, $\exists K_1$, 使得当 $k > K_1$ 时, 有

$$|a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

再令 $N = n_{K_1+1}$, 则当 $n > N$ 时,

$$\begin{array}{ccc} a_n & & \varepsilon \\ \wedge & & \parallel \\ Ca_{n_{K_1+1}} & < & C \cdot \frac{\varepsilon}{C} \end{array}$$

从此 U 形等式-不等式串的两端即知, $0 < a_n < \varepsilon$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

例 6 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \alpha_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \alpha_2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \alpha_3$. 求证: 存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证明 第一步 因为 $\{x_{6n}\}$ 既是 $\{x_{2n}\}$ 的子序列, 也是 $\{x_{3n}\}$ 的子序列, 所以

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{6n} = \alpha_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{6n} = \alpha_3, \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{6n} = \alpha_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{6n} = \alpha_3.$$

另一方面, $\{x_{6n+3}\}$ 既是 $\{x_{2n+1}\}$ 的子序列, 也是 $\{x_{3n}\}$ 的子序列, 故

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{6n+3} = \alpha_2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{6n+3} = \alpha_3, \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3. \quad (2)$$

联立 (1), (2) 两式即得 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

第二步 根据第一步可以改写 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = l$, 并证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geq 1, N_1 \geq 1$, 使得

$$\begin{cases} |x_{2k} - l| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_0, \\ |x_{2k+1} - l| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1. \end{cases} \quad (3)$$

设 $N = \max\{2N_0, 2N_1 + 1\}, n \geq N$. 如果 $n = 2k$, 则有 $k \geq N_0$, 因为 $n \geq N \geq 2N_0$, 由 (3) 中的第一行不等式,

$$|x_{2k} - l| < \varepsilon \quad \text{或} \quad |x_n - l| < \varepsilon.$$

类似地, 如果 $n = 2k + 1$, 则有 $k \geq N_1$, 因为 $n \geq N \geq 2N_1 + 1$, 由 (3) 中的第二行不等式,

$$|x_{2k+1} - l| < \varepsilon \quad \text{或} \quad |x_n - l| < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

例 7 设 $\{x_n\}$ 是一个无界数列, 但非无穷大量. 证明: 存在两个子列, 一个是无穷大量, 另一个是收敛子列.

证明 设 $n_1 = 1$, 因为数列 $\{x_n\}$ 无界, 所以 $\exists n_2 > 1 = n_1$, 使得

$$|x_{n_2}| > \max\{1, |x_1|\};$$

同理, 因为数列 $\{x_n\}$ 无界, 所以 $\exists n_3 > n_2$, 使得

$$|x_{n_3}| > \max\{2, |x_1|, |x_{n_2}|\};$$

.....

若已取 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 使得

$$|x_{n_{i+1}}| > \max \{i, |x_1|, |x_{n_2}|, \cdots, |x_{n_i}|\}, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

再根据 $\{x_n\}$ 无界, $\exists n_{k+1} > n_k$, 使得

$$|x_{n_{k+1}}| > \max \{k, |x_1|, |x_{n_2}|, \cdots, |x_{n_k}|\},$$

故得 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x'_{n_k}\}$, $x'_{n_k} = x_{n_k}$, $|x'_{n_k}| = |x_{n_k}| > k$, 从而 $x'_{n_k} \rightarrow \infty$.

其次, 因为 $\{x_n\}$ 不是无穷大量, 即 $\exists M_0 > 0, \forall N, \exists n > N$, 使得 $|x_n| \leq M_0$. 从而 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x''_{n_k}\}$, 且 $|x''_{n_k}| \leq M_0$, 即子列 $\{x''_{n_k}\}$ 是有界的, 故此有界子列有收敛子列 $\{x''_{n_{k_j}}\}$.

例 8 设 $a_n \neq 0, n \geq 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 则 $|l| \leq 1$.

证明 用反证法. 假设 $|l| > 1$, 见示意图 1.2, 取 $c = \frac{|l|+1}{2}$, 则 $c > 1$. 由极限的保号性得

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > c.$$

由此可得, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+p}| > c^p |a_n| \rightarrow +\infty, \quad p \rightarrow \infty.$$

这与已知条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 矛盾. 故 $|l| \leq 1$.

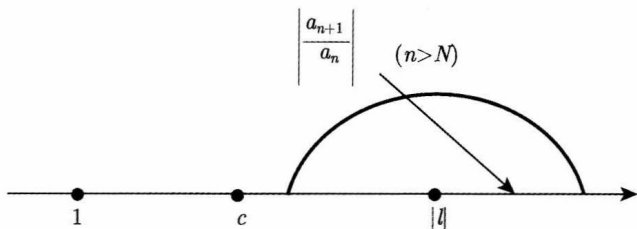


图 1.2

例 9 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$, $n \geq 2$.

① 若 $\{a_n\}$ 不是单调下降数列, 求证: $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时, $\{a_n\}$ 是单调上升数列;

② 试举出满足题设条件 $\{a_n\}$ 的例子:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 为有限数;

(ii) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow +\infty$;

(iii) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow -\infty$.

证明 ① 若 $\{a_n\}$ 是单调下降数列, 则是指对 $\forall n \geq 2$, 有

$$a_n \geq a_{n+1};$$

所以当 $\{a_n\}$ 不是单调下降数列时, 则是指 $\exists N \geq 2$, 使得 $a_{N+1} > a_N$.

为了证明当 $n > N$ 时, $\{a_n\}$ 是单调上升数列, 就是要证明, 对 $\forall n \geq 1$ 成立

$$a_{N+2} > a_{N+1},$$

$$a_{N+3} > a_{N+2},$$

.....

$$a_{N+n+1} > a_{N+n}.$$

采用数学归纳法. 首先假设 $a_{N+1} > a_N$, 则对 $n = 1$, 有

$$a_{N+1} < \frac{1}{2}(a_N + a_{N+2}) < \frac{1}{2}(a_{N+1} + a_{N+2}).$$

由此推出, $a_{N+2} > a_{N+1}$. 这说明 $a_{N+n+1} > a_{N+n}$ 对 $n = 1$ 成立.

现假设 $a_{N+k+1} > a_{N+k}$ 对 $k > 1$ 成立, 则有

$$a_{N+k+1} < \frac{1}{2}(a_{N+k} + a_{N+k+2}) < \frac{1}{2}(a_{N+k+1} + a_{N+k+2}),$$

由此推出, $a_{N+k+2} > a_{N+k+1}$. 这说明 $a_{N+n+1} > a_{N+n}$ 对 $n = k + 1$ 成立. 于是根据数学归纳法原理, $a_{N+n+1} > a_{N+n}$ 对 $\forall n \geq 1$ 成立. 这就证明了, 当 $n > N$ 时, $\{a_n\}$ 是单调上升数列.

② (i) 取 $a_n = \frac{1}{n}$.

$$\begin{array}{ccc} a_{n-1} + a_{n+1} & & \frac{2}{n} = 2a_n \\ \parallel & & \wedge \\ \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} & = & \frac{2}{n} \frac{n^2}{n^2-1} \end{array}$$

从此 U 形等式-不等式串的两端即知, $a_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$. 显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

(ii) 取 $a_n = n^2$.

$$\begin{array}{ccc} a_{n-1} + a_{n+1} & & 2n^2 = 2a_n \\ \parallel & & \wedge \\ (n-1)^2 + (n+1)^2 & = & 2n^2 + 2 \end{array}$$

从此 U 形等式-不等式串的两端即知, $a_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$. 显然当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow +\infty$.

(iii) 取 $a_n = -\sqrt{n}$.

对此 a_n , 要证 $a_{n-1} + a_{n+1} > 2a_n$, 容易归结为要证明下面的不等式:

$$\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}.$$

不等式两边同除以 \sqrt{n} , 就是要证明不等式:

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n-1}{n}} < 2. \quad (1)$$

根据平均值不等式, 有

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 1} < \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1} < \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

以上两个不等式相加得到不等式 (1). 显然当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow -\infty$.

例 10 设实数列 $\{a_n\}$ 和实数 A 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = A^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

求证: ① 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, a_n 有相同的符号;

② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -A$.

证明 ① 因为 $A \neq 0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{|A|} |a_n^2 - A^2| \\ \wedge & \quad \vee \\ ||a_n| - |A|| &= \frac{|a_n^2 - A^2|}{|a_n| + |A|} \end{aligned}$$

由极限的夹逼准则知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|.$$

因此, $\exists N_1$, 使得 $|a_n| > \frac{1}{2}|A|$, 只要 $n > N_1$; 又由题设, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) =$

0 , $\exists N_2$, 使得 $|a_{n+1} - a_n| < |A|$, 只要 $n > N_2$.

于是取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n| > \frac{1}{2}|A| \tag{1}$$

与

$$|a_{n+1} - a_n| < |A| \tag{2}$$

同时成立.

下面证明 ① 的结论. 如果不然, 即 $\exists n > N$, 使得 $a_n a_{n+1} \leq 0$, 则有

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1}| + |a_n|. \tag{3}$$

根据不等式 (2), $|a_{n+1} - a_n| < |A|$; 而根据不等式 (1), $|a_{n+1}| + |a_n| > |A|$, 矛盾.

② 若 $A = 0$, 则 $\lim_{h \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$, 即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0$, 使得当 $n > N_0$ 时,

$$|a_n^2| < \varepsilon^2 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = A$.

若 $A \neq 0$, 应用第 ① 小题的结果, 当 $n > N$ 时, 可以表达 $a_n = \sigma |a_n|$, 其中 $\sigma = \pm 1$. 也就是当 $n > N$ 时, 或 $a_n = |a_n|$ 或 $a_n = -|a_n|$ 二者必居其一. 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -A.$$

例 11 设函数 $f(x)$ 是具有不全为零的实系数的多项式, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1.$$

证明 设多项式 $f(x)$ 的最高次项为 $x^p (p \in \mathbb{N})$, 并假定其首项系数 $a_0 \neq 0$, 将 $f(x)$ 表示为

$$f(x) = a_0 x^p \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \right),$$

则有

$$f(n) \sim a_0 n^p, \quad f(n+1) \sim a_0 (n+1)^p,$$

故有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= 1 \\ &\parallel \parallel \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 (n+1)^p}{a_0 n^p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \end{aligned}$$

从此 U 形等式串的两端即知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1.$$

例 12 设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, α 是一任意实数.

求证: $x_n = \frac{[\alpha] + [2\alpha] + \cdots + [n\alpha]}{n^2}$ 收敛.

证明 根据函数 $[\cdot]$ 的定义, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $[x] \leq x < [x] + 1$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha - 1) + (2\alpha - 1) + \cdots + (n\alpha - 1)}{n^2} &\leq \frac{[\alpha] + [2\alpha] + \cdots + [n\alpha]}{n^2} \\ &\leq \frac{\alpha + 2\alpha + \cdots + n\alpha}{n^2}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{(1 + 2 + \cdots + n)\alpha - n}{n^2} \leq \frac{[\alpha] + [2\alpha] + \cdots + [n\alpha]}{n^2} \leq \frac{(1 + 2 + \cdots + n)\alpha}{n^2}.$$

在上面不等式的两端应用代数恒等式

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

得到

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}\alpha - n}{n^2} \leq \frac{[\alpha] + [2\alpha] + \cdots + [n\alpha]}{n^2} \leq \frac{\frac{n(n+1)}{2}\alpha}{n^2},$$

即

$$\frac{(n+1)\alpha}{2n} - \frac{1}{n} \leq \frac{[\alpha] + [2\alpha] + \cdots + [n\alpha]}{n^2} \leq \frac{(n+1)\alpha}{2n}.$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)\alpha}{2n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{\alpha}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}.$$

由极限的夹逼准则, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\alpha] + [2\alpha] + \cdots + [n\alpha]}{n^2} = \frac{\alpha}{2}.$$

例 13 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调, 又 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 使得

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证明 用反证法. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 不成立, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得