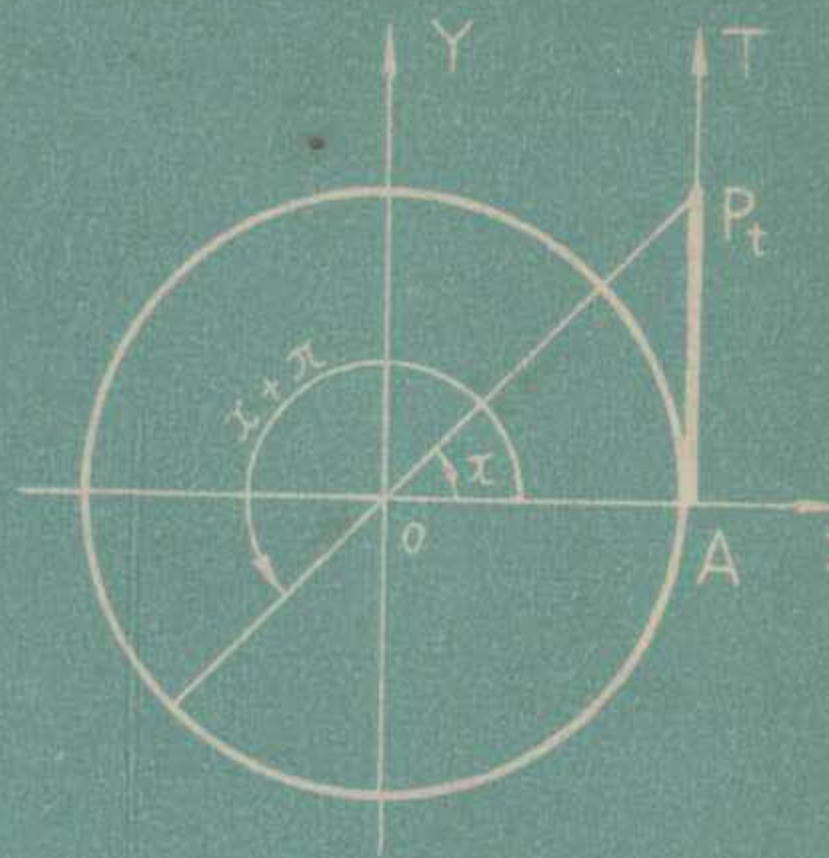


数学进修用书



邬耀宗

三角函数

ANJIAOHANSHU

浙江人民出版社

数学进修用书

三角函数

郭耀宗

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书详细地叙述了三角函数和反三角函数的定义、性质以及三角函数间、反三角函数间的关系，加法定理的推论，三角方程和三角方程组及其解法等基本内容，最后还联系实际，简要地介绍了三角函数在几个主要方面的应用。各章选有习题。可供中学师生、工农青年学习、进修。

数学进修用书 三 角 函 数 邬 耀 宗

*

浙江人民出版社出版
舟山地区印刷厂印刷
浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 4.125 字数 93,000

1979年7月第一版

1979年7月第一次印刷

印数：1—60,000

统一书号：7103·1057

定 价：0.35 元

目 录

第一章 基本知识	1
§ 1.1 函数的概念	1
§ 1.2 数区间	2
§ 1.3 函数的几种特性	3
§ 1.4 反函数	9
第二章 三角函数	14
§ 2.1 三角函数的定义	14
§ 2.2 三角函数的变数值和定义域	16
§ 2.3 三角函数的性质	20
§ 2.4 三角函数的超越性	28
§ 2.5 同角的三角函数间的关系	28
§ 2.6 任意角三角函数诱导公式	33
§ 2.7 三角函数的图象	39
练 习	47
第三章 加法定理和它的推论	49
§ 3.1 加法定理	49
§ 3.2 倍角和半角的三角函数	53
§ 3.3 积化和差与和差化积公式	63
练 习	69
第四章 反三角函数	72
§ 4.1 反正弦函数	72

§ 4.2	反余弦函数	77
§ 4.3	反正切函数	81
§ 4.4	反余切函数	85
§ 4.5	反三角函数间的关系	89
练 习		92

第五章 三角方程94

§ 5.1	三角方程	94
§ 5.2	最简三角方程	95
§ 5.3	有相同的三角函数值的两个弧之间的关系	98
§ 5.4	几种特殊类型的三角方程	100
§ 5.5	三角方程组	109
§ 5.6	三角方程的图解法	113
练 习		114

第六章 三角函数的应用117

§ 6.1	三角函数在几何问题中的应用	117
§ 6.2	三角函数在测量中的应用	120
§ 6.3	三角函数在物理和其他技术中的应用	124

第一章 基本知识

在这本书里，我们将要研究三角函数的一些理论，公式和解题方法。在研究这些理论的时候，需要涉及到一些函数重要性质，因此，在这一章里，我们先来研究这些性质。

§ 1.1 函数的概念

我们知道，函数的定义可以这样叙述：

设 M 和 N 是两个集合，这两个集合的元素可以是任何事物。如果集合 M 中的每一个元素 x ，有集合 N 中的某一元素 y 与它对应，这时就称 y 是 x 的函数。通常用 $y=f(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等等来表示，括号前的字母“ f ”或“ φ ”只表示 x 对 y 的对应规律。集合 M 称之为函数的定义域；而对应的集合 N ，称之为函数的值域。集合 M 中的元素 x 称为变数值；对应的集合 N 中的元素 y 称为函数值。

上述函数的基本概念，是基于对应和集合的概念上的，但这两个概念是被取作基本概念，即不再用另外的概念来说明它。

在函数的定义中“如果集合 M 中的每一个元素 x ，有集合 N 中的某一元素 y 与它对应”这句话应予以注意。它是说，取定一个元素 x ，就确定了一个元素 y 与之对应，并不要求对于不同的元素 x ， y 也取不同的元素。因此， $y=c$ （常数）也不违背定义，即 $y=c$ 是一个函数。

例1. 函数 $y=\sin x$ ，可以取所有实数的集合作为函数的定义域。函数的值域为 $|y|\leq 1$ 。

例2. 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

叫做狄利克来 (Dirichlet) 函数, 此函数如当 $x=-2, \frac{3}{2},$

$\frac{4}{7}$ 时, 函数值 y 为 1; 当 $x=\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ 时, 函数值为零。

因此, 函数的定义域是所有实数的集合, 函数的值域是两个元素所组成的集合, 记作 $\{0, 1\}$ 。

§ 1.2 数 区 间

数区间是指介于某两个实数之间的全体实数, 而那两个实数叫做数区间的端点。

设 a 与 b 是任意的两个实数, 而且 $a < b$. 我们称所有满足条件

$$a \leq x \leq b$$

的实数 x 的集合, 为以 a, b 为端点的闭区间。用符号 $[a, b]$ 来表示。其几何意义是数轴上介于两个已知点 a 及 b 中间所有点的集合, 连 a, b 本身也包括在内。如图 1.1 所示。



图 1.1

所有满足条件

$$a < x < b$$

的实数 x 的集合, 称之为 a, b 为端点的开区间。用符号 (a, b) 表示。它在数轴上表示为介于两个已知点 a 及 b 中间所有点的

集合, 但 a, b 本身不包括在内。如图1.2所示。



图 1.2

另外, 我们对满足

$$a < x \leq b \quad \text{或} \quad a \leq x < b$$

的实数 x 的集合叫做半开区间。用符号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示。其几何意义如图1.3所示。



图 1.3

下面我们引进两个符号 $+\infty$ (正无穷大) 和 $-\infty$ (负无穷大), 它们不是数, 可以认为 $+\infty$ 是大于任何实数, $-\infty$ 是小于任何实数。这样一来, 对于 x 能取任意实数, 就可以用不等式 $-\infty < x < +\infty$ 来表示。为与上述一致, 称所有实数的集合为从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的开区间, 以 $(-\infty, +\infty)$ 来表示。

同样, $[a, +\infty)$ 是表示 $x \geq a$ 的实数的集合; $(-\infty, b]$ 是 $x \leq b$ 的所有实数的集合。而 $(a, +\infty)$ 是 $x > a$ 的所有实数的集合; $(-\infty, b)$ 是 $x < b$ 的所有实数的集合。

在三角函数里, 主要用的是两种类型的数区间, 即: 开区间和闭区间。例如, 函数 $y = \cos x$ 的定义域可以是闭区间 $[0, \pi]$, 而函数 $\text{ctg } x$ 的定义域可以是开区间 $(0, \pi)$ 。

§ 1.3 函数的几种特性

现在我们从函数的变化过程来研究函数的几种特性。

一、单值函数和多值函数

如果变数值 x 在定义域 M 内每取得一确定值时, 只有唯一确定的函数值 y 与之对应, 则 y 就叫做 x 的单值函数。如果对应于每一个 x 值的 y 不止一个值, y 就叫做 x 的多值函数。

例如

$$y = x^3, \quad y = \sin x,$$

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

是单值函数。而

$$y^2 = x$$

是多值(双值)函数(图1.4), 它的定义域为 $[0, +\infty)$, 对于任何正数 $x_0 > 0$, 相应地可以得到两个 y 值 $\sqrt{x_0}$ 和 $-\sqrt{x_0}$ 。

多值函数可以分解为几个单值函数, 每一个单值函数叫做多值函数的单值支。如上面的函数 $y^2 = x$, 就可以分解为两个单值支

$$y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt{x}.$$

二、有界函数

若集合 M 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内集合, 如果对于集合 M 内所有的 x , 能够找到一个正数 k , 使得不等式

$$|f(x)| < k$$

成立, 则函数 $f(x)$ 在集合 M 上为有界。若 k 不存在, 便说函数 $f(x)$ 在集合 M 内是无界的。

设集合 M 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内集合, 如果对于集合 M 内所有的 x 存在一个数 P (不必是正的), 使得不等式

$$f(x) < P \quad (\text{或 } f(x) > P)$$

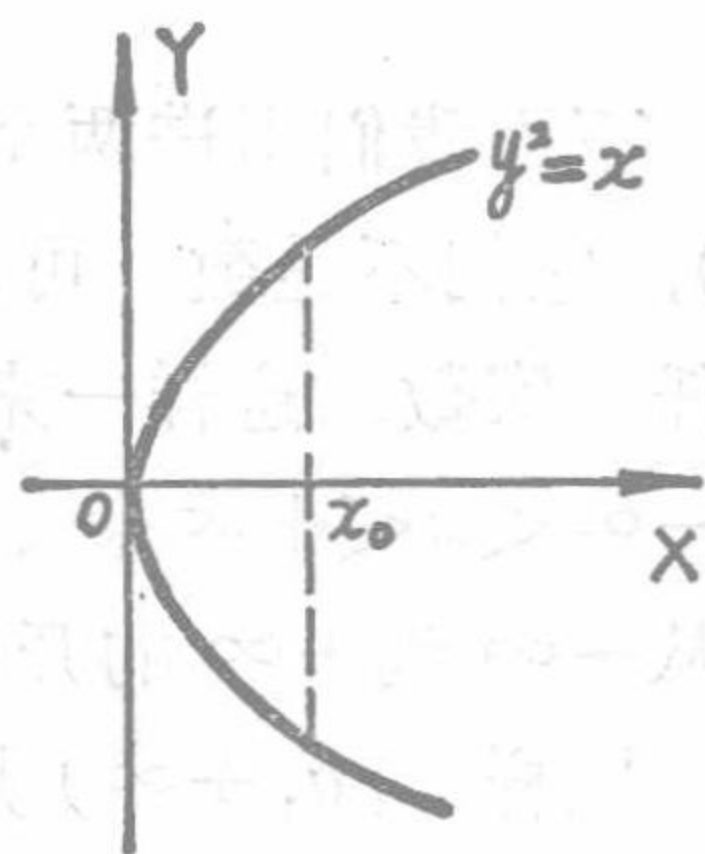


图 1.4

成立, 则称函数 $f(x)$ 在集合 M 上有上界 (或有下界)。

特别, 当集合 M 与函数 $f(x)$ 的定义域相一致时, 并且如果存在一个数 P , 使得对于函数 $f(x)$ 的定义域里的所有 x 都小于 P 时, 则称函数 $f(x)$ 有上界。

同样, 可以给出函数 $f(x)$ 有下界及有界的定义。

例3. 函数 $y = -\frac{1}{x^2}$ 为有上界. 如零就是一个上界. 这是因为它对于定义域内的所有 x 的值, 都成立不等式 $-\frac{1}{x^2} < 0$.

例4. 函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 为有下界. 据上例知道, 零就是一个下界。

例5. 函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 为有界. 显然, 2 是一个上界; 同时零是一个下界。

三、单调函数

若函数 $f(x)$ 在它的定义域里的集合 M 上, 取任意两个不同的变数值, 对应有两个不同的函数值, 并且较大的变数值, 对应着较大 (小) 的函数值, 则称此函数在此集合 M 内是增 (减) 函数。

即:

若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $f(x)$ 是增函数;

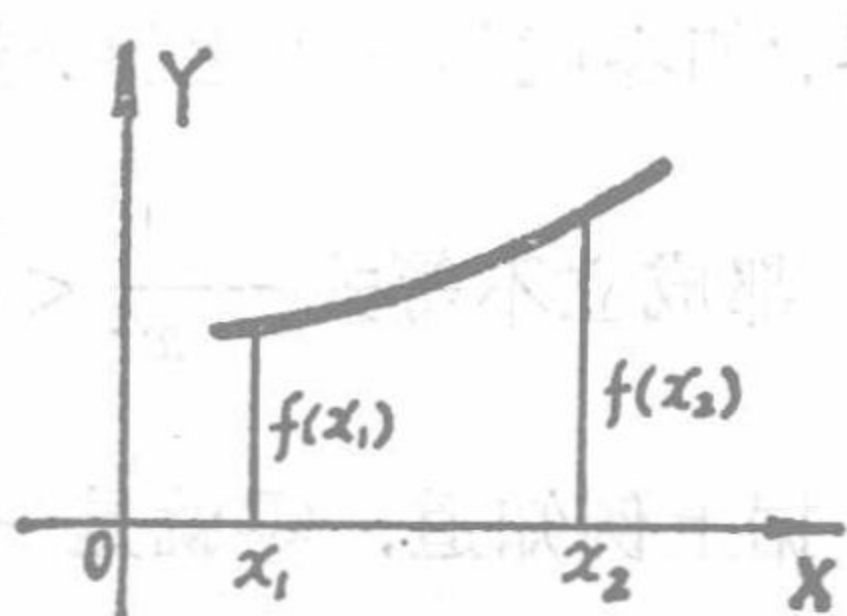
若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则 $f(x)$ 是减函数。

函数 $f(x)$ 在上述集合 M 上为增函数或减函数, 则称此函数是在此集合上的单调函数*。

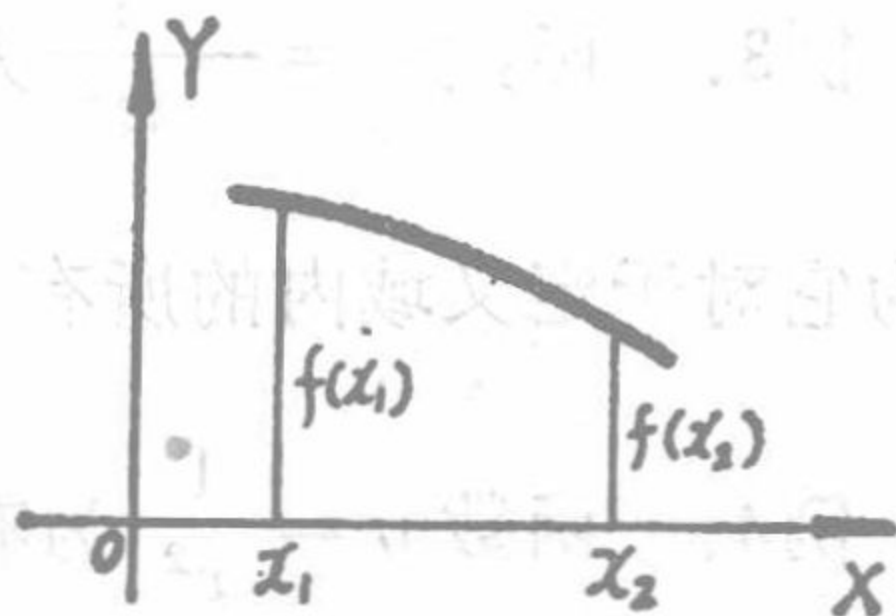
* 这里所述的单调函数, 即为通常所谓“狭义”的单调函数。如果 x_1, x_2 为 $f(x)$ 定义域中任意的值, 且 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 或 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为“广义”的单调函数。

我们也可以定义集合 M 与函数 $f(x)$ 的定义域相一致时的单调函数。

增或减函数的几何意义是这样的，增函数的图形是沿横轴正向上升的，如图1.5(a)所示；减函数的图形是沿横轴正向下降的，如图1.5(b)所示。



(a)



(b)

图1.5

例6. 试证函数 $y=2x+3$ 为增函数。

【证】 因为若 x_1 及 x_2 为任意两个变数值，且有 $x_1 < x_2$ ，
 则 $y_1 = 2x_1 + 3$, $y_2 = 2x_2 + 3$,
 由此 $y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2) < 0$.
 所以 $y_1 < y_2$.

例7. 函数 $y=3-2x$ 为减函数。(证明同上题)

例8. 函数 $y=x^2$ 在开区间 $-\infty < x < +\infty$ 内不是单调函数。但在区间 $-\infty < x \leq 0$ 内是减函数，而在区间 $0 \leq x < +\infty$ 内是增函数(图1.6)。

四、偶函数与奇函数

若不论 x 为函数 $f(x)$ 的定义域内什么值， $-x$ 也属于这定义域，并且对于这个函数的定义域内

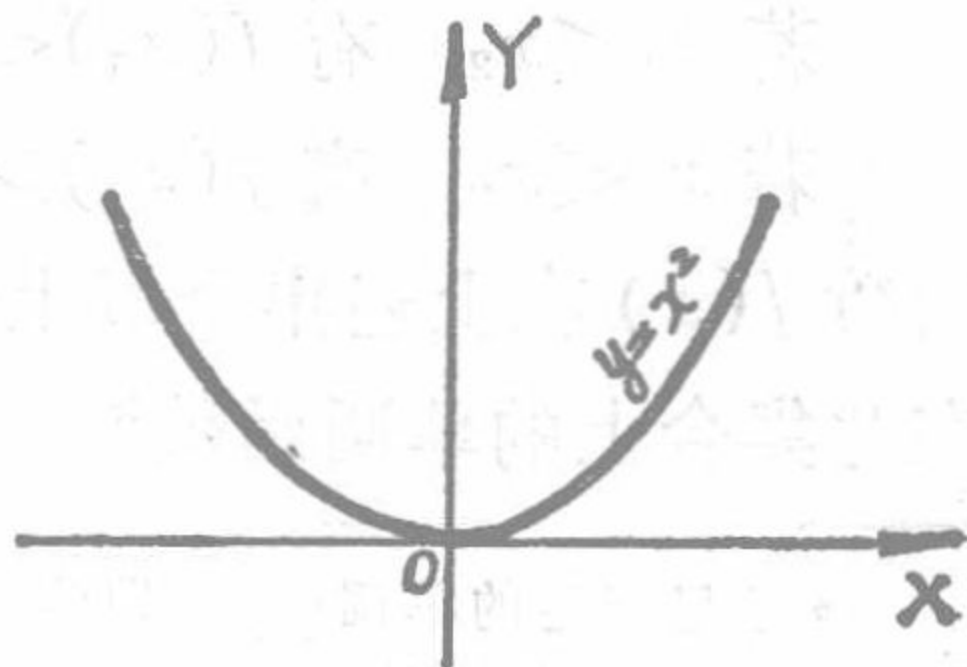


图1.6

所有 x ;

如果等式

$$f(-x) = f(x)$$

都成立时, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数;

如果等式

$$f(-x) = -f(x)$$

都成立时, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数。

例如, 函数

$$y = \cos x \quad \text{及} \quad y = |x|, \quad \text{都是偶函数;}$$

函数

$$y = \sin x \quad \text{及} \quad y = \frac{1}{x}, \quad \text{都是奇函数;}$$

函数 $y = \sin x + \cos x$ 及 $y = \sqrt{x}$,

既非奇函数, 也非偶函数。后者是因为如 $x=1$ 属于定义域, 而 $x=-1$ 则不属于定义域。

奇函数 $f(x)$ 的图形, 是关于原点成对称的。因为对于这个图形 (图 1.7)

上的每一个点 $M_1(x, f(x))$, 都对应着同一图形上的一点 $M_2(-x, f(-x))$, 它是关于原点与 M_1 成对称的。事实上, 这些点一对对地横坐标异号, 而纵坐标 $f(x)$ 及 $f(-x)$ 由于条件 $f(-x) = -f(x)$ 亦为异号, 于是, 线段

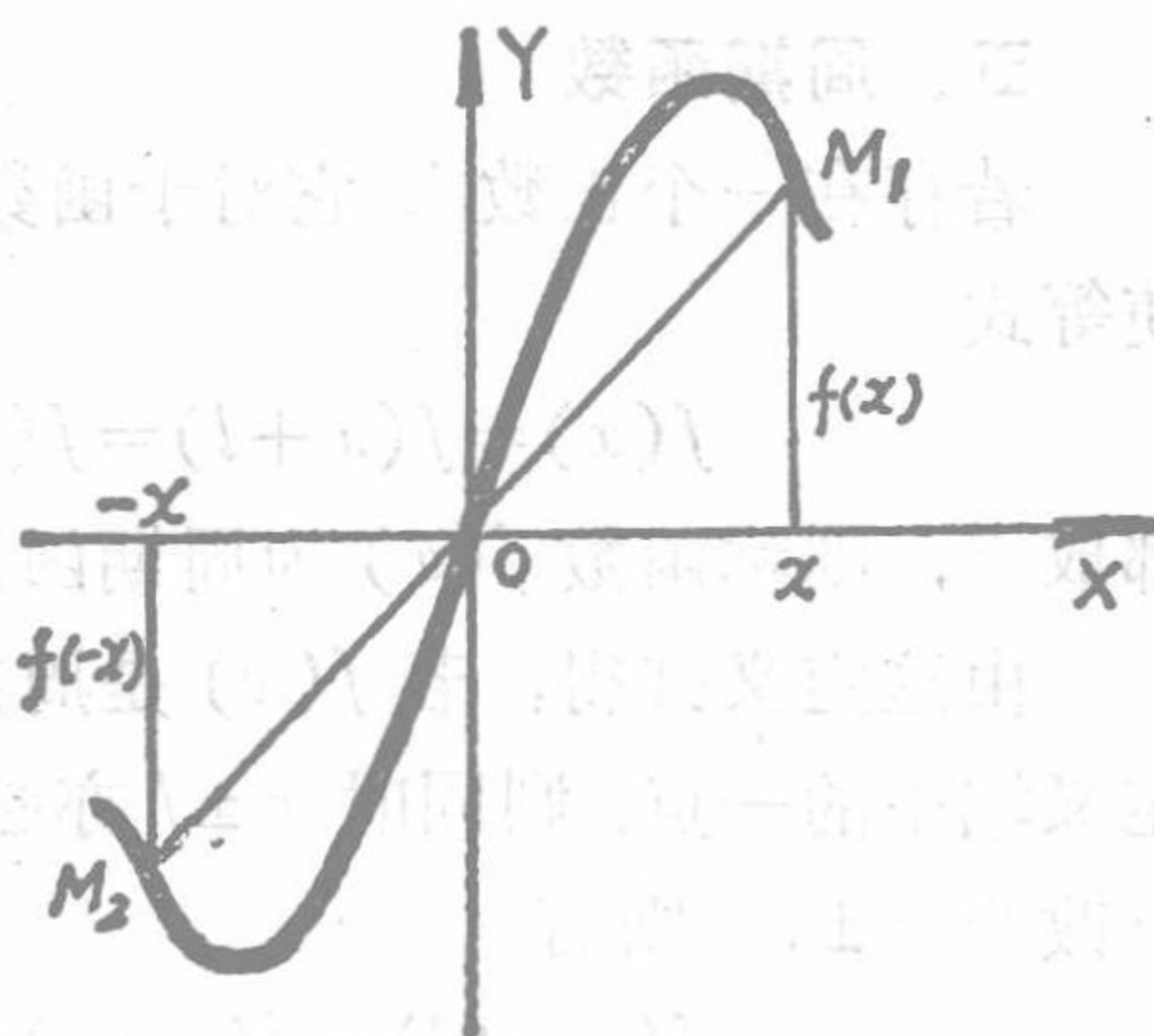


图 1.7

M_1M_2 的中点的坐标为

$$\frac{x+(-x)}{2}=0,$$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=0.$$

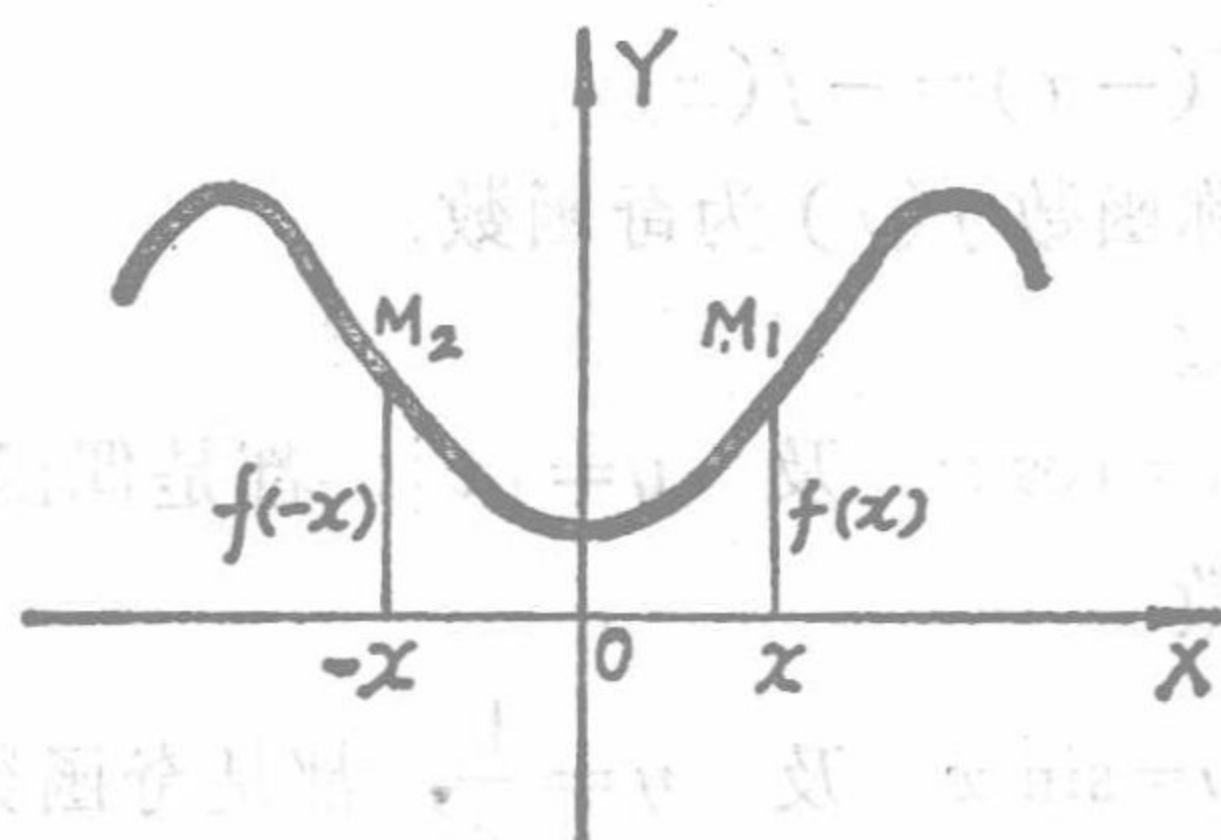


图 1.8

这与原点完全一致。

偶函数 $f(x)$ 的图形,是对称于 y 轴的。因为 $f(-x)=f(x)$,所以若 $M_1(x, f(x))$ 是图形上的点,则和它对称于 y 轴的点 $M_2(-x, f(-x))$ 也在图形上(图 1.8)。

五、周期函数

若存在一个正数 l ,它对于函数 $f(x)$ 的定义域里任意 x ,使等式

$$f(x)=f(x+l)=f(x-l)$$

都成立,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,而数 l 为它的周期。

由这定义推得:若 $f(x)$ 是周期为 l 的函数,而 x 为它的定义域中的一点,则同时 $x \pm l$ 亦必然属于该定义域。同理,把 x 改为 $x \pm l$,则有

$$f(x \pm 2l)=f(x \pm l)=f(x).$$

由此知 $x \pm 2l$ 也属于这定义域,而数 $2l$ 也为 $f(x)$ 的周期。

同样可推得, $x \pm kl$ (其中 k 是任意整数) 也和 x 一起属于函数 $f(x)$ 的定义域, 并且下列等式成立:

$$f(x+kl)=f(x),$$

其中 kl 与 l 同为周期。

如果 l 为函数 $f(x)$ 正周期中之最小的正数, 则称 l 为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称周期。知道了一个周期函数 $f(x)$ 的最小正周期, 如为 l , 则要求出这函数的定义域内所有的函数值, 只要求得在半开区间 $[0, l)$ 或 $(0, l]$ 上的函数值就够了。

另外, 要作出周期函数的图形, 也只要作出半开区间 $(0, l]$ 上的图形就行了, 其他每个半开区间 $(kl, (k+1)l]$ 的图形, 可由 $(0, l]$ 上已作好了的图形, 沿着 x 轴平移 kl 的距离而得到 (图 1.9)。

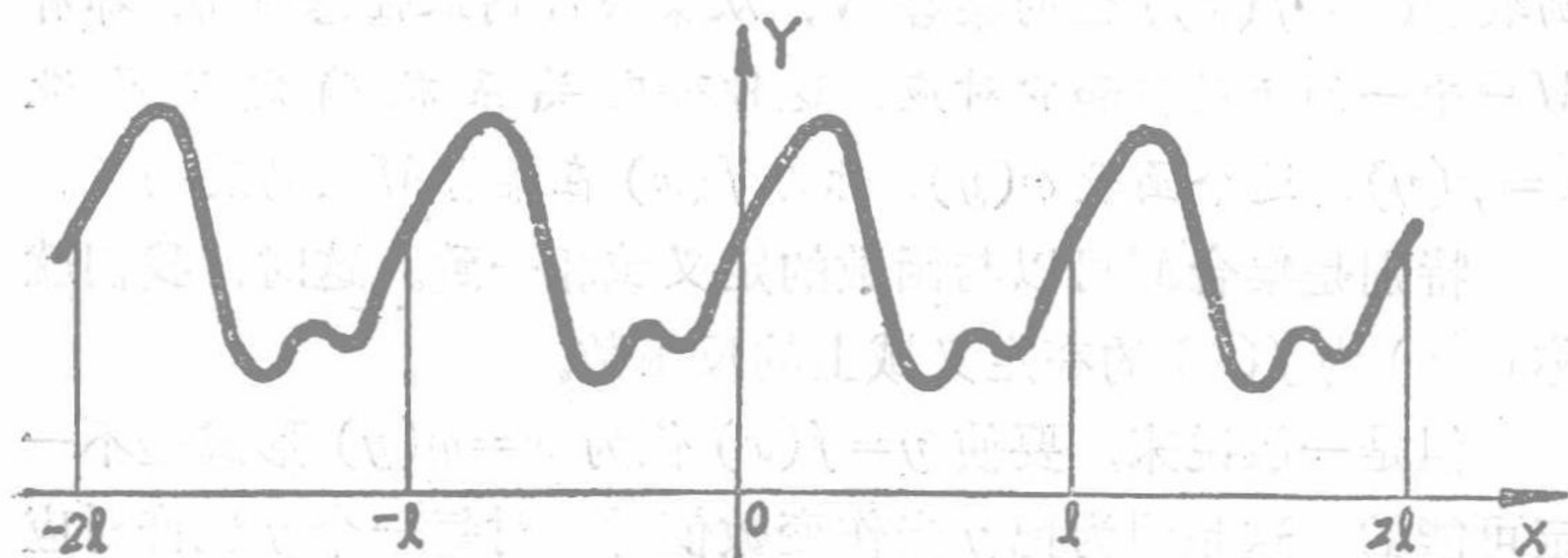


图 1.9

§ 1.4 反 函 数

设所给 y 是 x 的函数:

$$y=f(x)$$

在这个函数关系中, 按照函数的定义, 给定每一个变数值, 对应着唯一的一个函数值*。

* 本书不考虑多值函数。

反过来, 如果我们把 y 当作变数值, 也有对每一个 y , 仅对应着唯一的一个 x , 此时, x 就成为 y 的函数, 记作

$$x = \varphi(y),$$

我们称这样的函数 φ 为原来函数 f 的反函数; 而 f 称为直接函数。反过来说也可以, 所以可认为这两个函数互为反函数。

要找出 $\varphi(y)$, 须从 $y = f(x)$ 中解出 x 来。例如,

若 $y = f(x) = x^3,$

则 $x = \varphi(y) = \sqrt[3]{y}.$

下面我们给出反函数的一般定义:

设集合 M 是包含于函数 $f(x)$ 的定义域内的一个集合, 在集合 M 上来考察 $f(x)$, 对于变数值的集合 M , 对应地得到一个函数 $y(y = f(x))$ 值的集合 N , 从集合 N 内取任意值 y , 都有 M 中唯一的 x 的值和它对应, 这种对应关系就确定了函数 $x = \varphi(y)$, 这个函数 $\varphi(y)$, 称为 $f(x)$ 在集合 M 上的反函数。

特别是集合 M 可以与函数的定义域相一致。这时, 我们就称 $\varphi(y)$ 为 $f(x)$ 的在定义域上的反函数。

但是一般说来, 要使 $y = f(x)$ 化为 $x = \varphi(y)$ 形式是不一定可能的。这是因为把 y 当作变数值时, 对每一个 y 也许对应着几个或者无限多个 x 。例如函数 $y = x^2$, 当 $y = 4$ 时, 有两个变数值: $x_1 = 2$, 及 $x_2 = -2$ 。函数 $y = \sin x$, 当 $y = 0$ 时, 有无限多个变数值: $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。

在怎样的条件下, 函数 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(y)$ 才能是单值的呢? 对这个问题, 我们有下面两个定理。

定理 单调函数有反函数。

【证】 为了确定起见, 命 $y = f(x)$ 是增函数, 则根据增函数定义, 较大的变数值, 对应于较大的函数值。即 $x_1 < x_2$,

有 $y_1 < y_2$. 若给定一个 y_1 , 一定有一个变数值 x_1 和它对应, 使 $f(x_1) = y_1$. 因为 $y = f(x)$ 是增函数, 可见 x 的不同值 x_1 与 x_2 , 不可能有同一个值 $y = y_1$ 和它们对应 (如果 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) < f(x_2) \neq y_1$; 如果 $x_1 > x_2$, 则 $f(x_1) > f(x_2) \neq y_1$). 因此, 反对应是单值的, 就可以定义 x 是 y 的函数.

减函数情况的证明, 与此类似.

定理 增(减)函数的反函数, 仍为增(减)函数.

【证】 若 $y = f(x)$ 是增函数, 讨论其反函数 $x = \varphi(y)$.

设 $y_1 < y_2$, 又 $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$, 则依函数 $\varphi(y)$ 本身的定义, 必同时有

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2),$$

于是, 如果 $x_1 > x_2$, 则根据函数 $f(x)$ 的增大性, 必有 $y_1 > y_2$, 违反了原来的假定.

其次, 也不能 $x_1 = x_2$, 因为这样就有 $y_1 = y_2$, 也是违反原来假设的.

因此, 只有 $x_1 < x_2$ 是可能的, 这就说明 $\varphi(y)$ 确定单调增大.

对于减函数的证明, 与此相仿.

由上述两定理可知, 要使函数 $f(x)$ 在集合 M 上的反函数也为单值, 只要 $f(x)$ 在集合 M 上具有单调性就行了. 这样的集合 M , 我们通常称之为 $f(x)$ 的单调性区域.

例如, 对函数 $y = x^2$, 我们只讨论 x 不小于零的值, 则在半开区间 $0 \leq x < +\infty$ 内, $y = x^2$ 是增函数, 每一个 y , 对应于唯一的一个不小于零的 x , 所以它有反函数

$$x = \sqrt{y}.$$

而半开区间 $[0, +\infty)$ 为函数 $y = x^2$ 的单调区域.

非常明显，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$ ，它们两者都是以 x 为横坐标， y 为纵坐标，作起图来完全是一样的，不过在 $y=f(x)$ 中， x 是变数值，而在 $x=\varphi(y)$ 中的变数值却是 y 。

但是习惯上，我们常常用字母 x 表示变数值，而用字母 y 表示函数。因此，为了与习惯一致，将 $x=\varphi(y)$ ，改记为 $y=\varphi(x)$ ，亦称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数。

最后，我们来讨论一下反函数的图形。在同一坐标系中，反函数的图形与直接函数的图形有如下关系：

定理 反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$ (或第 I 与第 III 象限角 XOY 的平分线 l)。

【证】 设 $P(a, b)$ 是直接函数 $y=f(x)$ 的图形上的任意一点(图1.10)，从反函数的定义知道， $P'(b, a)$ 是反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形上的一点。连接 P, P' ， PP' 与直线 l 交于 M ，过点 P 作 $PQ \perp OX$ ，过点 P' 作 $P'Q' \perp OY$ 。因为 $\triangle POQ \cong \triangle P'OQ'$ (两直角边对应相等)，所以 $OP=OP'$ ，

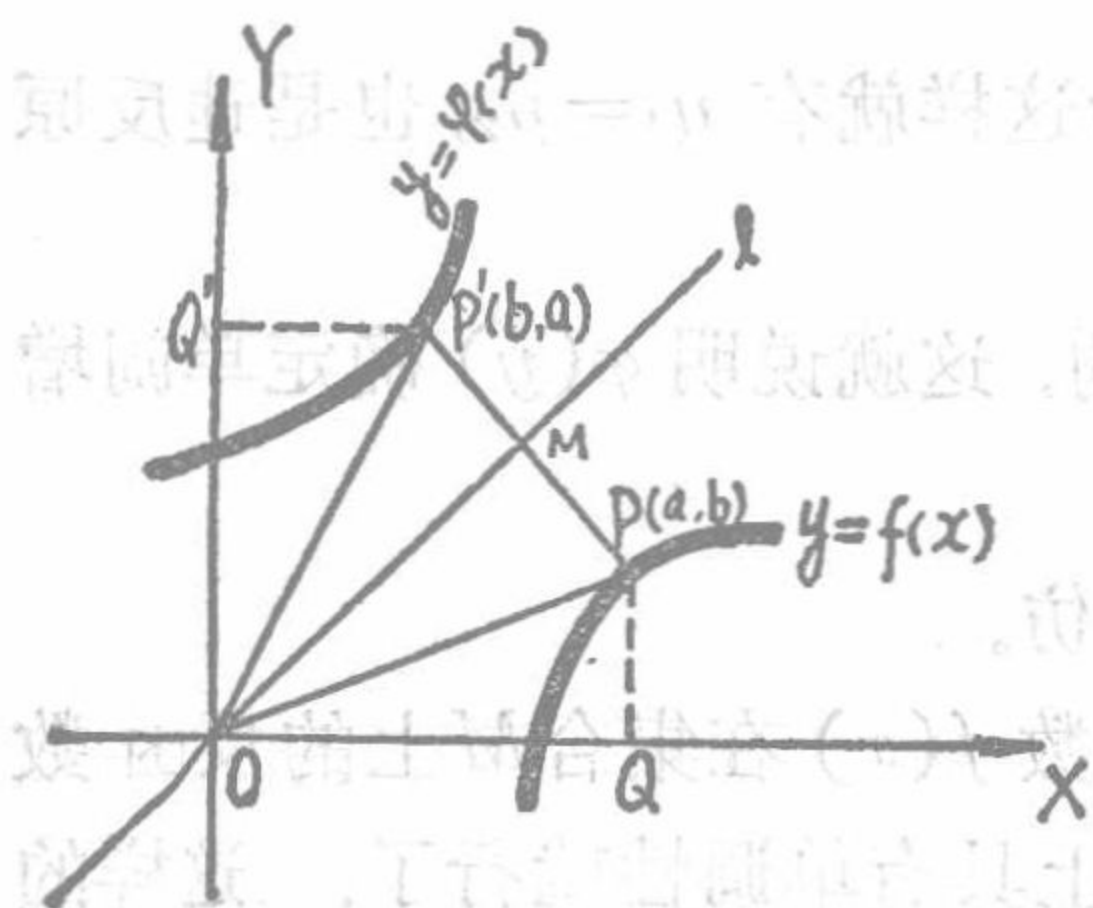


图 1.10

($\angle POQ = \angle P'OQ'$ ；又因为 $\angle MOQ = \angle MOQ' = 45^\circ$ ，所以 $\angle MOP = \angle MOP'$ ，即 OM 是 $\angle POP'$ 的平分线。对于等腰三角形 POP' ，顶角 POP' 的平分线就是它们的对称轴。因此，点 P 和 P' 对称于直线 $y=x$ 。

反过来，如果 $P(a, b)$ 是直接函数的图形上的任意一点，过点 P 作关于直线 $y=x$ 的对称点 P' ，则有 $\triangle POM \cong \triangle P'OM$ ，