萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

代數方程及函數概念

密勒　白黎斯著
鄭太朴譯

商務印書館發行

代數方程及函數概念

密勒　白黎斯著
鄭太朴譯

算學小叢書

王雲五主編
萬有文庫
第一集一千種

代數方程及函數觀念

密勒 [illegible]斯著
鄭太朴譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館
發行所　上海及各埠　商務印書館
中華民國十九年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

THE ALGEBRAIC EQUATION, by S. A. MILLER
THE FUNCTION CONCEPT, by G. A. BLISS
Translated by
CHÊNG T'AI P'O

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

目　次

代 數 方 程

S. A. Miller 著

I. 引 言

1. 本篇之目的。 本篇目的,在略述有幾個最爲根本的方法,於中代數方程占一中心的地位,因而較之一短篇方程理論爲能使注意更完全的集中於其下的思想及歷史的來歷上。但本篇用意在於補充這種短的篇,而非欲代之。由歷史的敘述有許多簡易事實上,希望其中數部分,能對於僅有初等代數學之方程智識者,亦有些用處。

2. 如何讀法。 讀者須知在沒有讀到其下文以前,不能求每一所說者均得明白了解。對於有許多讀者,"有理性之領域","代屬"(*substitution group*),及"ρ 值有理函數" 等諸概念或倘未知道,因而簡單的一說殊以爲未足。但稍明白這些重要的概念及其應用,較之全不知實好的多,而倘使本篇能引

人去求此重要的方面之智識,則其目的亦不虛了。

3. 所假定的數學程度。 為避免冗長計,看來有許多處所須假定一些簡易的定列式(*determinants*)之智識,以及單變數函數之第一次引生函數(*derivative*)之智識,但既不能假定一些格老司(*Galois*)氏方程論之簡易智識,故有許多根本方法,實不能述之完備。然希望所採用的觀點,能作此通論之先引;而所用解三次及四次方程之法,則尤能如此。至方程的智識之公路,引過許多問題,故有時似可廣研究歷史的來歷及在其下的原理,俾引起新刺激及較深的見解。很希望本篇能於作此項研究上有幫助。

4. 所研究的問題之格式。 於方程通論中,$x^n=1$ 形式的方程,實占重要地位。因這些方程之根本屬性,於本叢書第 25 種數論篇,28 及 29 節中已論之,故本篇中不再及。因 $x^n=\pm a$ 之諸根,可自正數 a 之算術的 n 次根,乘 $x^n=\pm 1$ 之諸根上得之,故 $x^n=1$ 形式的方程之理論,與二係數非為零

的方程之理論差不多同其價值。對於有許多目的上，自係數之數目(假定其非爲零者)的觀點上研究方程較爲便利,而於此數目不超過3者尤便,但本篇內則照未知數之次數分類。自假定係數繼續的代表數目之序(*sequence*)之各項上,所生可注意的屬性,因篇幅關係祇可從略。

II. 歷史的略述及定義

5. 引言. 英國物理學者洛奇(*Oliver Lodge*)氏曾說:"方程是數學上最利害且最重要的東西"。論其來歷,實亦是最古的數學概念中之一,因計算之根本法，其本身是建立在所計算的事物間之一種相等性的觀念上。 卽簡易的代數方程,其來亦已很古;大約紀元前一千七百年,有埃及人名阿姆斯(*Ahmes*)者,其所著書中已有此項例:"堆積之七分之一,加其全部,得 19";"堆積之三分之二,加二分之一,又加七分之一,又加其全部,得 33"。 由這些例,及有許多相類的例上,可知古埃及人之"堆積",其意義與近代的 x 同,而以上的二例,實卽等

於以下的二方程：

$$\frac{x}{7}+x=19,\ \frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{7}+x=33.$$

近今考得古埃及所遺下的斷編零簡（或者較阿姆斯之著作尤古）上，有與現在相當的二同局方程：

$$x^2+y^2=100, \qquad y=\frac{3}{4}x.$$

卽特別的 n 個未知數的 n 同局方程，古時亦已有解之者。有一希臘人名德馬利達斯 (*Thymaridas*) 者，曾作出一規例，用以解以下的諸同局方程：

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=s$$

$$x_1+x_2=a_1,\ x_1+x_3=a_2,\ \cdots\cdots x_1+x_n=a_{n-1}.$$

所可注意者，"已知"與"未知"這二個專門用語，此古的規例中已包含之。紀元後六世紀時，有一印度人名阿拉巴他 (*Aryabhata*) 者，亦曾解過類此的同局方程，惟解普通 n 個未知數的 m 同局方程，則其法之來比較的還在後，通言之，古代數學家及中世紀之數學家，祇知求諸方程中未知數之數目上的值，但不列出用係數表出未知數的式。

6. 定義。 作以下形式的一方程：

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots\cdots+a_nx_n=k,$$

於此 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n, k$ 假定其爲已知數，而 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 爲未知數，名爲一個"一次方程"(或亦稱"線的方程")。方程中有須設條件，卽須設所有的未知數有特別的值，才能用者，名爲有條件方程"。倘使一方程對於任何指定給未知數的值均通用，或祇是已知數間之眞實的關係，則此方程名爲"自方程。" 例如$2\cdot3+4\cdot7=34, 3m-2m=m$ 爲自方程，而 $2x+3y=1, 5x-2y=12$ 則爲有條件方程。[註：自方程內之符號＝，每用≡代之。照克朗納格(*Kronecker*)氏"數目論講演"中所說，此符號作目前的意義用，實創自黎孟(*Riemann*)。高斯(*Gauss*)於"相合理論"中用此符號，其意義與目前者不同，例如 $10\equiv3\,(mod.\,7)$，(見本叢書 數論篇)時候較黎氏早些，在 1801。因此，現在用此符號時，其所表者有時較＝所表者爲強，有時則較弱。克氏以爲此符號≡所表較之＝所表者爲強，意義上似稍自然些，但使用上則卻多用較弱的方面。]

倘假定方程內之未知數有一級數目可取，則此項未知數，即名爲"變數。" 方程內之字母所表者爲未知常數或變數，此則自隨觀點而異，但這些概念間之分別，則不可不留意。 字母意義之變換上，可見出方程之完全意義及用處。

一方程倘使沒有帶有分數指數的未知數在內，而至少有一項，於中其未知數指數之和爲 n，此外亦無未知數指數之和超過 n 的項，則此方程名爲"n 次"者。倘一方程之一切項(非同爲零)其次數均等，則名爲"齊次"方程。例如 $x+y=0$ 爲一次齊次方程，而 $x^2-xy+7y^2=0$ 則爲二次齊次方程。

因古時幾何上的解釋，二次方程通常稱爲"平方方程，"三次方程則爲"立方方程。" 倘將數目代入未知數處而使此方程成爲自方程，則此項數目稱爲此方程之"根，"此項根能滿足方程者。決定此項根的方法，名爲"解"此方程。 倘二或更多的方程，其未知數假定其有同值者，則這些方程名爲"同局"方程。

7. 根本問題。 方程理論中有二根本問題,即 n 次一未知數的普通方程之解法,以及 n 未知數的 m 同局方程之解法是。雖然前者是後者之一特例,其重要幷困難,則直可視爲方程理論中之根本問題。這些問題,祇是其特例,古代及中世紀數學家已有解之者,而由其心核所生出的較廣的理論,則目前尚在發展中。第一問題特例之解法,前所述阿姆斯之"堆積"問題已見其一例。至其他例中,則有以下者可述:平方根之求法,如

$$\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}, \quad \sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

輓近於一埃及古紙上見之,現存柏林博物院中;幾何的表象次數不大的方程之諸根,古希臘人,歐几里得(*Euclid*)亦在內,已用之,而亞拉伯人尤用此;地哇范士司(*Diophantus*)已知求二次方程之一正的有理根;而印度人與亞拉伯人則已知至少有幾個數目的二次方程有二根。

由這樣的特例出發,數學家漸漸能知道每一 n 次一未知數的方程恰恰有 n 個根。此雅緻的定

理，平常卽稱爲"代數學上之根本定理"(其證可參觀本叢書代數幾何之基本附錄二)。法國方面此定理亦稱爲"德亞萊伯(*D'Alembert*)定理，"因德氏於1746年曾發表其證，那時大家以爲此證嚴格可用。惟第一個可滿足的證，則高斯於1799年時所發表。向此證之漸漸的進步，經數百年，足可使人知數學智識進化過來之遲，以及此項定理四圍之可注意的歷史。

前述的第二個根本問題，近代由此亦得了許多結果。倘祇限於 n 未知數的 m 個同局一次方程，此問題引至數學上一重要的部分，卽"定列式，"而定列式理論則轉對於此問題多有所供獻。古埃及人及希臘人之離散的同局方程，實表出人心上之需要，此已大部滿足，然藉此又引出更深的感覺，求其仍向前發展，并希望此項發展將得到。在此短篇中，對於一未知數的方程，將多些篇幅研究之，因此項方程，亦爲 n 未知數的 m 同局方程理論之基礎。

8. 符號。 古時及中世紀的數學家，於一方程之兩端間，尋常寫一"等"字，未有等號。然此亦非普遍的如是者，有許多數學家已曾各用過符號於方程兩端之間，以代此等字。阿姆斯用(≷)爲等號，地哇范士司則用(l)以代等字，而西亞拉伯人所用等號，則類J字。十六世紀時，等號大多用∝。目前我們所用的號＝是1557年時黎考(*Record*)所創出，其所以特作此號的理由，則是"沒有兩件事物能較二平行線更相等。"十七世紀時，每用二平行的縱線代＝，而尤其是法國方面如此，蓋後者用以表二數目間之絕對的差。中世紀的文稿中幷通用此號代"*est*"一字。

方程中最重要者是未知數。事實上，未知數實表出一有條件的方程之特色，而決定未知數之一列值，則爲方程之重要職務(註：此係就初等的見地而言。若自他方面言之，亦可說已知的係數最占重要，幷決定未知數之可能的值)。各種用過的單一未知數之符號中，看來其清晰暢達，莫過於紀

元前 1700 年阿姆斯所用的那一個；蓋"堆積"一語自然含有其各個之數目尙未知的意義。地哇范土司用 ς 表未知數；而印度人婆羅馬古太 (*Brahmagupta*) 則用"*yávat távat*"表第一未知數，倘未知數多於一，則用顏色名，黑，靑，黃，等等，以表其餘的未知數。著名的亞拉伯人亞爾加利斯米 (*Alkarismi*)，現在所用"亞爾格伯拉"(卽代數學)一語卽從他的書上得來，而他的名字則後來變成"亞爾各利塞姆"(*algorithm*) 一語（譯者按歐洲古時用一種器具類似算盤者供計算，其後此亞拉伯人之算法傳入，於是卽生出一種新的算法，而卽以此人之名字名之，以與舊者相對待。惟目今 *algorithm* 一語之用法，與原意義已不同)，稱未知數爲"事物"或"根，"中世紀時，此二語頗通用。1637 年時，法人笛卡士(*Descartes*)始創用現在的習慣，將字母之末數字 (x, y, z) 代未知數，而開首數字 (a, b, c 等) 代已知數。

9. 有理性之領域。 關於代數方程方面，近代有

一最有用的概念，即是"有理性之領域"(*domain of rationality*)。倘使一服從尋常代數學上定律的符號 R 用加，減，乘，除(但不得用 0 除)儘可能的與其自己連結，并與所得連結之結果連結，則得一個各種式之總，此總有此重要屬性，卽，倘用這四種演算法之任何一種以連結總內之式，則不能再得外此的式。這些演算法，統名"代數學上之有理演算法，"而所得的總，稱爲 R 所構成的"有理性領域，"用(R)表之(參觀本叢書尺規作圖篇第 4 節)。如 R 爲數目 1，而用代數學上之有理演算法將此數目并所得結果的數目儘可能的演算之，則所得的總乃是一切有理數目。倘使 R 爲任何一其他有理數目，但不得爲 0，則所得結果的總仍是此。此卽是，$(1)\equiv(n)$，於此 n 爲任何有理數，但不得爲 0。

欲了解此種有理性領域之意義，須觀察其所包者爲一總，對於代數學上之有理演算法而言，乃是封鎖的。於此關係上，頗可注意，單位一之 n 個 n 次根，對於乘與除而言乃是一封鎖的總，但對於