


# 显式模型预测控制 理论与应用

Theories and Applications of  
Explicit Model Predictive Control

◎ 张聚 / 著

 中国工信出版集团

 电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

浙江工业大学专著与研究生教材出版基金资助

# 显式模型预测控制理论与应用

## Theories and Applications of Explicit Model Predictive Control

张 聚 著



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书系统地阐述显式模型预测控制的理论和应用,分为4个部分,共13章。第一部分介绍基础知识,包括凸优化问题、多参数规划理论、PWA系统;第二部分介绍约束线性系统,包括约束线性系统的显式模型预测控制、约束线性系统显式模型预测控制应用仿真研究;第三部分介绍约束PWA系统,包括PWA系统的显式模型预测控制、PWA系统预测控制的仿真研究;第四部分对显式模型预测控制的控制实验平台和具体实现方法进行讨论,包括显式模型预测控制系统半实物仿真实验、基于ARM-Linux平台的显式模型预测控制算法实现、显式模型预测控制在线计算中的点定位算法、三自由度直升机的显式模型预测控制、多胞体近似显式模型预测控制等。

本书可供学习、研究和应用显式模型预测控制的高等学校自动化类专业的研究生、预测控制理论研究者和工程技术人员阅读、参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

显式模型预测控制理论与应用/张聚著. —北京:电子工业出版社,2015.7  
ISBN 978-7-121-25145-0

I. ①显… II. ①张… III. ①预测控制—系统建模—高等学校—教材  
IV. ①TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第295505号

策划编辑:王羽佳

责任编辑:周宏敏

印 刷:北京中新伟业印刷有限公司

装 订:北京中新伟业印刷有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:16.5 字数:423千字

版 次:2015年7月第1版

印 次:2015年7月第1次印刷

定 价:59.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

# 前 言

模型预测控制技术是处理多变量约束系统最优控制问题最有效的方法之一，并且已经在石油、化工等流程工业领域获得了广泛应用，取得了巨大的经济效益与社会效益（如节能降耗减排）。基于在线反复优化的传统模型预测控制技术的主要不足是：由于模型预测控制的反复在线优化计算特点，使得模型预测控制技术只能适用于系统的动态变化较慢的场合（如过程控制系统），难以适用于采样速率较高的系统和动态变化较快的系统，如电机系统、电力系统、电力电子系统、机械振动控制、汽车电子控制等。

最近几年，国际上对于减少模型预测控制的在线计算时间、提高在线计算速度和扩大模型预测控制技术适用范围的研究非常活跃，特别是 Bemporad 等学者在显式模型预测控制（Explicit Model Predictive Control）方面所做的开创性工作。Bemporad 等学者把多参数规划理论引入到线性约束二次优化控制问题的求解中，对系统的状态区域（即参数区域）进行凸划分，离线计算得到对应每个状态分区上的状态反馈最优显式控制律，并建立了显式模型预测控制系统。显式模型预测控制分为离线计算和在线查找两个步骤，即：离线计算时，应用多参数规划方法对系统的状态区域（即参数区域）进行凸划分，并离线计算得到对应每个状态分区上的状态反馈最优控制律（为状态的线性控制律）；在线计算时，只需确定当前时刻的系统状态处在状态区域的哪个分区，并按照该分区上的最优控制律计算当前时刻的最优控制量。

显式模型预测控制由于在线时无须做反复的优化计算，因而相比基于反复在线优化计算的传统（隐式）模型预测控制，其在线计算时间大为减少。此外，由于对应于每个状态分区上的最优控制律是状态的简单线性关系，因而控制律的软件实现简单、可靠。在工程实际中，显式模型预测控制算法有望用单片微控制器或者嵌入式系统来实现。显式模型预测控制不仅在理论和学术上对丰富和发展模型预测控制理论具有研究价值，对于扩大模型预测控制在工程实际中的适用范围（用于采样速率较高或动态变化很快的场合）和简化预测控制算法在工程中的实现都具有实际意义。

本书将系统地就显式模型预测控制的理论和应用进行阐述，是作者和研究生们最近几年在相关领域研究工作的总结。本书主要内容包括四部分：第一部分介绍基础知识，包括凸优化问题、多参数规划理论以及分段仿射系统 PWA。这些内容是分析和研究显式模型预测控制理论的必备基础。多参数规划理论是显式模型预测控制的核心和关键，它进行系统状态的分区，并计算得到对应每个状态分区上的控制律，为在线计算做好了准备。多参数规划内容对于控制专业的研究生和研究人员是不太熟悉的，这里做了系统全面的论述。第二部分和第三部分分别针对约束线性系统和约束 PWA 系统，应用多参数规划理论，建立相应的显式模型预测控制算法，并对显式模型预测控制在汽车电子控制、电子电子、电力系统、电机、网络控制等动态变化较快的场合做了应用仿真分析，而基于在线反复优化计算的传统模型预测控制在这些领域是很难适用的（在采样周期的间隔内，难以完成优化问题的求解）。第四部分对显式模型预测控制的控制实验平台和具体实现方法也做了系统的讨论。分别论述了基于 ARM-Linux 的显式模型预测控制实验平台的构建和显式模型预测控制实验研究，三自由度直升机的显式模型预测控制实验研究，为显式模型预测控制解决工程实际问题提供了可能。

本书可供学习、研究和应用显式模型预测控制的高等学校自动化类专业的研究生，以及

预测控制理论研究和工程技术人员阅读参考。

参与本书内容组织与研究工作的研究生有：程鑫滢、丁靖、谢作樟、马艳芳、谢碧锋、蔡文豹、秦婷、张海华、王槲华等。本书的研究工作得到国家自然科学基金“低复杂度显式模型预测控制研究”、“基于显式自治 PWA 模型预测控制系统的性能分析、综合及后处理技术研究”等项目的资助。本书的出版得到了浙江工业大学专著与研究生教材出版基金资助，本书的写作参考了国外一系列相关文献和有关研究生的学位论文，在此一并表示感谢！

张 聚



# 目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 模型预测控制概况	1
1.2 模型预测控制的可行性和稳定性分析	5
1.3 显式模型预测控制概况	6
参考文献	9

## 第一部分 基础知识

第 2 章 凸优化问题	12
2.1 凸集	12
2.2 多胞形	16
2.3 函数	28
2.4 凸优化	29
2.5 总结	33
参考文献	33
第 3 章 多参数规划理论	35
3.1 概述	35
3.2 多参数非线性规划	35
3.3 多参数线性规划	36
3.4 多参数二次规划	47
3.5 多参数混合整数线性规划	54
3.6 多参数混合整数二次规划	56
参考文献	58
第 4 章 PWA 系统	59
4.1 概述	59
4.2 不变集理论	60
4.3 稳定性分析	67
4.4 总结	77
参考文献	78

## 第二部分 算法及应用：线性系统

第 5 章 约束线性系统的显式模型预测控制	80
5.1 概述	80
5.2 多参数规划在控制上的有效计算	81

5.3 约束系统的鲁棒低复杂度反馈控制 .....	91
5.4 有效隶属集测试 .....	98
5.5 总结 .....	107
参考文献 .....	108
<b>第 6 章 约束线性系统显式模型预测控制应用仿真研究 .....</b>	<b>111</b>
6.1 板球系统 .....	111
6.2 直线倒立摆系统 .....	112
6.3 车辆四轮转向系统 .....	118
参考文献 .....	123

### 第三部分 算法及应用: PWA 系统

<b>第 7 章 PWA 系统的显式模型预测控制 .....</b>	<b>126</b>
7.1 概述 .....	126
7.2 PWA 系统稳定化控制器的构造 .....	127
7.3 PWA 系统最优控制器的计算 .....	129
7.4 PWA 系统的低复杂度反馈控制 .....	134
7.5 总结 .....	141
参考文献 .....	141
<b>第 8 章 PWA 系统预测控制的仿真研究 .....</b>	<b>143</b>
8.1 DC-DC 降压型变换器显式模型预测控制 .....	143
8.2 电机系统显式模型预测控制 .....	159
8.3 网络控制系统的丢包问题 .....	168
参考文献 .....	173

### 第四部分 实 验

<b>第 9 章 显式模型预测控制系统半实物仿真实验 .....</b>	<b>176</b>
9.1 引言 .....	176
9.2 EMPC 算法在 xPC 半实物仿真平台上实现的整体架构 .....	176
9.3 建立 EMPC 控制系统的 Matlab 控制模型与 Simulink 控制模型 .....	177
9.4 系统状态分区及对应分区上的显式线性规律结构 .....	179
9.5 S_Function 接口函数的结构 .....	179
9.6 EMPC 算法 xPC 半实物仿真目标可执行文件编译流程 .....	180
9.7 控制效果 .....	180
参考文献 .....	182
<b>第 10 章 基于 ARM-Linux 平台的显式模型预测控制算法实现 .....</b>	<b>183</b>
10.1 引言 .....	183
10.2 选择 ARM-Linux 平台作为实物仿真平台的原因 .....	183

10.3	建立 Matlab 控制模型 .....	184
10.4	EMPC 算法在 ARM-Linux 平台实现的整体架构 .....	184
10.5	系统状态分区及其对应分区上的显式线性规律的数据结构 .....	186
10.6	接口函数 mpt_getInput 的结构 .....	188
10.7	ARM-Linux 平台下的实际控制程序结构 .....	190
10.8	控制效果 .....	191
	参考文献 .....	192
<b>第 11 章</b>	<b>显式模型预测控制在线计算中的点定位算法 .....</b>	<b>194</b>
11.1	点定位算法简介 .....	194
11.2	点定位算法基础 .....	195
11.3	点定位经典算法与优化算法 .....	195
11.4	算法实验对比分析 .....	207
	参考文献 .....	208
<b>第 12 章</b>	<b>三自由度直升机的显式模型预测控制 .....</b>	<b>210</b>
12.1	引言 .....	210
12.2	Quanser 三自由度直升机系统结构和数学模型 .....	210
12.3	三自由度直升机的显式模型预测控制 .....	214
12.4	调节 .....	218
12.5	跟踪 .....	227
	参考文献 .....	234
<b>第 13 章</b>	<b>多胞体近似显式模型预测控制 .....</b>	<b>235</b>
13.1	引言 .....	235
13.2	双描述法 .....	235
13.3	重心函数法 .....	240
13.4	多胞体近似显式模型预测控制的控制律 .....	242
13.5	多胞体近似显式模型预测控制算法的性能分析 .....	244
13.6	三自由度直升机的多胞体近似显式模型预测控制 .....	251
13.7	总结 .....	255
	参考文献 .....	255



# 第 1 章 绪 论

## 1.1 模型预测控制概况

所有实际的控制问题都会受到各种类型约束的限制，而且很多问题的约束都是作用在状态变量上的。虽然在某些控制问题的初始设计阶段中可以忽略这些约束，但是由于大部分系统在约束边界附近运行（比如，很多的过程控制问题中，最优稳定状态的工作点就是在约束边界上），所以这些约束还是会给系统带来不可避免的影响。在这种情况下，需要在控制器设计时就考虑在内。

处理约束的一种常用方法是抗积分饱和（anti-windup）法。这种方法能够适用于简单的系统，比如 SISO 系统。虽然通过改进，抗积分饱和法也能够处理某一类 MIMO 问题，但是对于复杂的 MIMO 问题——特别是同时存在输入约束和状态约束时，抗积分饱和就显得捉襟见肘。

这时候，模型预测控制（Model Predictive Control, MPC）就应运而生。这是现代控制应用的一个典型的成功范例。MPC 作为处理多变量约束控制问题的一种有效手段出现在过程工业——特别是石油化工工业中已经有 30 年之久了，该技术的理论基础已经趋于成熟。而近几年，MPC 开始越来越多地用于电力电子和机电系统，其主要优势在于：MPC 为带约束的 MIMO 问题提供了“一站式服务（one-stop-shop）”；MPC 能够便捷地处理状态约束。

先用一个例子来说明模型预测控制（MPC）的特点：早上 9:00 开始工作，希望利用 MPC 完成对一个水箱系统的控制。工作的规则是：我们总是在整点的时候计划完未来 8 小时的任务，但是只执行第一小时的计划，而在下一个整点会根据上一次计划执行的结果和其他外界信息重新安排计划，直到整个工作顺利完成。

首先，量测水箱系统的参数（液位等），并考虑外界存在的干扰和约束条件，开始规划未来 8 小时内的工作，那么第一次规划完从上午 9:00 到下午 5:00 的所有工作安排。然后执行第一小时（9:00~10:00）的安排。到上午 10:00 的时候，重新量测系统参数，考虑信息的变化，并重新安排下一个 8 小时（即上午 10:00~下午 6:00）的工作计划。而同样只执行 10:00~11:00 的计划安排，在 11:00 的时候再次重新测量，重新计划另一个 8 小时（即上午 11:00 到晚上 7:00）的安排。这样不断重复，直至达到控制目标。

在整个控制过程中，有三个关键点：首先要预测会发生什么（模型）；其次在每次计划前，要得到所需要的信息（量测）；最后，在每次执行计划时用某种方式努力达到最优（控制方式）。

因此，模型预测控制是一种基于求解在线最优化控制问题的算法。MPC 也称为滚动时域控制（Receding Horizon Control, RHC），其主要特点如下。

① 在  $k$  时刻对当前状态  $x(k)$ ，考虑当前和未来约束，在线求解一个开环的最优控制问题；

- ② 对于求得的最优控制序列，仅应用序列的第一个元素；
- ③ 在下一个  $k+1$  时刻，利用新的状态  $x(k+1)$ ，重复以上过程。

令状态  $x(k)$  的量测值为当前状态，那么最优解就构成一个闭环策略。如果不直接测量  $x(k)$  值，而是用状态观测器得到的一个估计值代替状态  $x(k)$  值，也能构成一个闭环策略。总之，假设  $x(k)$  是可以量测的。图 1-1-1 给出了 RHC 算法的主要原理。

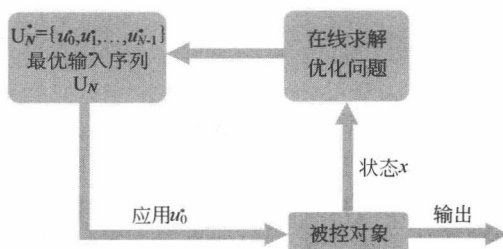


图 1-1-1 模型预测控制原理

MPC 既可以用多项式模型描述，也可以用状态空间模型描述。本书采用的模型形式主要是状态空间模型。MPC 系统一般采用线性模型描述，以解决在线优化的可行性、稳定性及性能问题。虽然非线性系统中对这些问题的研究已经有了长足的进展，但在实际应用时还是存在很多问题，其中包括在线计算方案的可实现性及有效性。

虽然滚动时域控制（RHC）和模型预测控制（MPC）的思想可以追溯到 20 世纪 60 年代<sup>[1]</sup>，但是在 20 世纪 80 年代，随着动态矩阵控制（Dynamic Matrix Control, DMC）以及广义预测控制（Generalized Predictive Control, GPC）思想的提出，人们才真正开始广泛研究该问题。看上去 DMC 和 GPC 这两种方法的基本思想非常相似，但是 DMC 和 GPC 发展形成的控制目标却相差甚远。DMC 用于处理石化工业中的多变量约束控制问题。在 DMC 未出现之前，一般都是利用变量选择器、优先级规则、分离器和时滞补偿器等构成一个单回路控制器，来处理多变量约束控制问题，其效果并不明显。DMC 所采用的模型多为时域模型（即有限脉冲响应模型或阶跃响应模型）。而 GPC 既吸收了自适应控制适用于随机系统、在线辨识等优点，又保持了预测控制算法滚动优化等特点。GPC 多采用输入/输出模型（即传递函数模型），并允许对象是随机的、不确定的。而 DMC 的对象必须是确定的，不存在显式干扰的。另外，GPC 并不适用于多变量约束问题的控制。

如今在 MPC 的研究中多采用状态空间模型。考虑如下线性离散时间模型：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \tag{1.1.1}$$

其中， $x(k) \in \mathbb{R}^s$  和  $u(k) \in \mathbb{R}^s$  分别表示状态和控制输入。通过引入以下的开环最优化问题来构造一个滚动时域控制形式：

$$J_{(n,m)}(x_0) = \min_u \left[ x^T(n)P_0x(n) + \sum_{k=0}^{n-1} x^T(k)Qx(k) + \sum_{k=0}^{m-1} u^T(k)Ru(k) \right] \tag{1.1.2a}$$

$$\text{s.t. } Ex + Fu \leq \psi \tag{1.1.2b}$$

其中， $n$  表示预测时域（或输出时域）的长度， $m$  表示控制时域（或输入时域）的长度，且

$n \geq m$ 。当  $n = \infty$  时, 称该问题为无限时域问题, 否则称为有限时域问题。另外, 假设原点 ( $x=0, u=0$ ) 在可行域的内部。

式 (1.1.2) 定义了一个二次规划问题。令  $u_{(n,m)}^*(i|x(k)), i=0, \dots, m-1$  为性能指标  $J_{(n,m)}(x(k))$  的最优化控制序列。RHC 仅应用该序列的第一个元素  $u_{(n,m)}^*(0|x(k))$ , 得到下一个时刻的状态  $x(k+1) = Ax(k) + Bu_{(n,m)}^*(0|x(k))$ , 并舍弃其他元素  $u_{(n,m)}^*(i|x(k))$ 。新的状态  $x(k+1)$  作为下一步优化计算的初始值。然后再次在线计算一个优化解, 得到最优控制序列, 仅应用第一个元素得到新的状态变量。通过这样不断地反复在线优化, 直至完成控制目标。一般来说, 控制时域  $m$  和预测时域  $n$  都可以是无限的。

当问题 (1.1.2) 不存在约束时, 求解的是一个标准线性二次调节 (LQR) 问题: 先求解代数 Riccati 方程, 找到反馈增益矩阵, 可以得到所需要的静态状态反馈控制律, 产生最优控制序列。该反馈律能够保证, 对于任何的半正定权值矩阵  $Q$  和任何正定矩阵  $R$ , 系统是闭环稳定的。

**例 1.1.1** 考虑一个连续时间双积分器系统, 其采样间隔  $T_s = 0.1s$ , 那么其离散时间模型可以写成:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1.1.3a)$$

$$y(k+1) = Cx(k) \quad (1.1.3b)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

利用无限时域 LQR 方法设计控制器。选择权重矩阵为  $Q_x = I, Q_u = 0.1$ , 我们希望最后输出能够接近参考值  $r = 10$ 。

首先求解一个无约束问题, 图 1-1-2 显示了无约束情况下输出变量和输入变量的变化曲线。

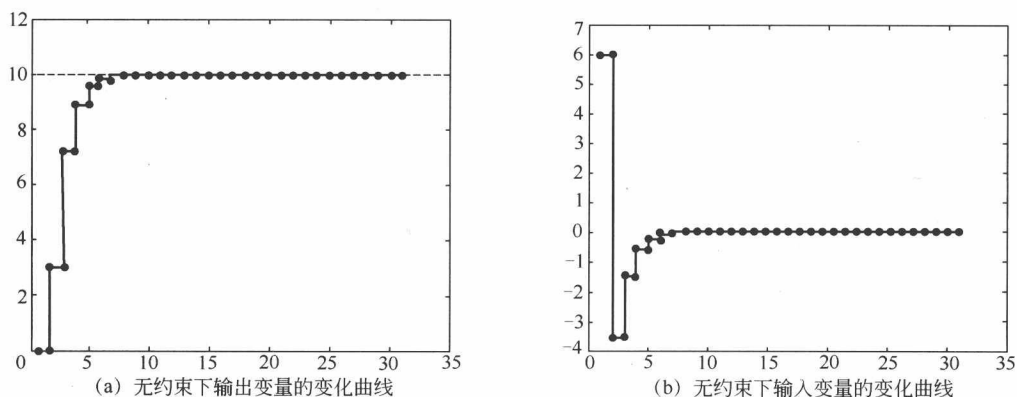


图 1-1-2 无约束情况下系统的输出变量和输入变量变化曲线

接下来, 将输入变量限定在  $|u(k)| \leq 5$  内, 利用 MPC, 得到如图 1-1-3 所示的输出变量和输入变量的变化曲线。从图 1-1-3 (b) 中可以看出, 该输入曲线被约束在  $[-5, 5]$  的区间

内，而图 1-1-3 (a) 中的输出变量并未受到很大的影响。

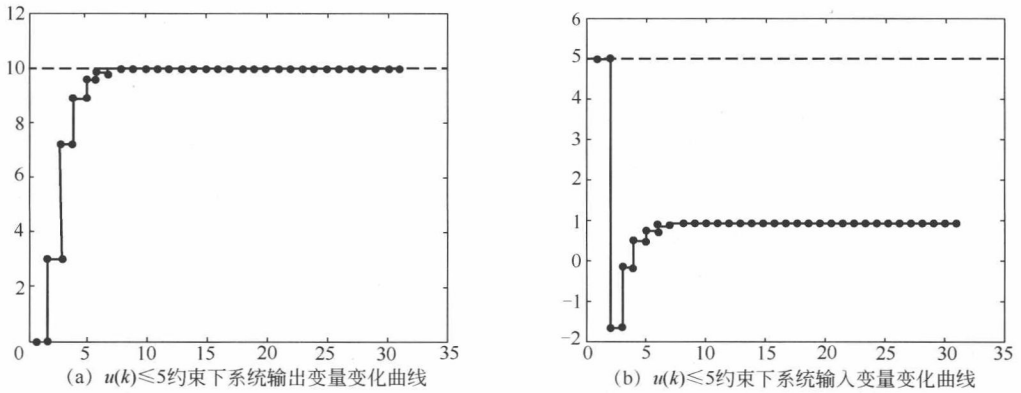


图 1-1-3 约束  $|u(k)| \leq 5$  情况下系统的输出变量和输入变量变化曲线

若将约束限制得更严厉一点，如  $|u(k)| \leq 1$ ，应用 MPC，输入变量也能满足约束条件。

由本例可见，在满足输入约束条件的情况下，MPC 得到的输出变化平稳，响应时间和稳定时间短。

在实际应用中，MPC 还存在以下 3 个问题：

- ① 如何构造一个可行问题，能够使得算法产生可执行的控制动作；
- ② 如何保证系统的闭环稳定性；
- ③ 如何从开环最优控制问题的解得到所需要的闭环性能。

由于仅求解有限时间最优控制问题不能保证全局满足约束，即 RHC 策略可能会将状态带入到可行集之外。另外，RHC 不能保证稳定性，除非在最优问题上强加一个特殊的结构。下节会阐述如何构造一个有限最优控制问题，能够使相关的 RHC 保证稳定性和可行性。

以上讨论的关于 RHC 原理和方法同样也适用于非线性模型预测控制。所谓非线性模型预测控制<sup>[2]</sup>，就是说其动态系统是非线性的（可以是微分方程、Wiener 模型或者是神经网络等）。和上面介绍的线性 MPC 不同，在非线性 MPC 中，还没能解决可行性问题，以及开环性能与实际闭环性能之间的失配问题。非线性 MPC 的另一个难点在于，非线性 MPC 在线最优化求解的是一个非线性规划，可能无法保证会收敛到一个全局最优值。而线性 MPC 求解的是一个二次规划，能够保证得到一个全局最优值。另外，即使可以通过局部最优化保证系统的稳定性，系统的性能也会明显恶化。

参考文献[3]的作者提出了一种利用无限预测时域或无限控制时域的方法，能够将离散系统的状态驱使到平衡点。参考文献[4]将这种方法推广到连续时间系统。对线性系统而言，在每个采样间隔都需要找到一个全局最优值，以保证稳定性。如果时域是无限的，那么在某个采样间隔上的可行性就意味着全局的可行性。但是对于非线性系统，无法通过数值求解无限时域问题。虽然理论上可以求解一个带终端约束的最优化问题，但在实际求解中，约束的计算非常复杂，而且仅能够保证系统的渐近稳定性。另外，即使存在一个可行解，也无法保证系统的全局收敛性。

为了保证全局最优性和全局可行性，并且能够处理一个带终端约束问题，参考文献[5]的作者提出混杂模型预测控制的方法。在混杂模型预测控制中，终端约束被一个“终端域”

所代替，而系统状态必须在时域的终点进入这个终端域。在该域内存在另一个控制器，能够使得系统渐近稳定。但这种方法需要确定该终端域是不变的，因此还是要求解一个全局最优化问题。

## 1.2 模型预测控制的可行性和稳定性分析

考虑以下离散时间线性时不变系统：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1.2.1)$$

现在求解如下形式的约束有限时间最优控制（Constrained Finite-Time Optimal Control, CFTOC）问题：

$$J_N^*(x(0)) = \min_{u_0, \dots, u_{N-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (u_k^T Q_u u_k + x_k^T Q_x x_k) + x_N^T Q_{xN} x_N \right\} \quad (1.2.2a)$$

$$\text{subj.to } x_k \in \mathbb{X}, u_{k-1} \in \mathbb{U}, \forall k \in \{1, \dots, N-1\} \quad (1.2.2b)$$

$$x_N \in \mathcal{T}_{\text{set}} \quad (1.2.2c)$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, x_0 = x(0) \quad (1.2.2d)$$

$$Q_x \geq 0, Q_{xN} \geq 0, Q_u \geq 0, \quad (1.2.2e)$$

其中， $U_N \in \mathbb{R}^n$  是最优化变量，而  $x \in \mathbb{R}^n$  是参数，且  $Q_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ， $Q_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $Q_{xN} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

**定义 1.2.1（可行性）** 如果存在一个输入序列  $U_N$ ，满足约束 (1.2.2b)，那么对最优化问题 (1.2.2) 来说，系统状态  $x$  是可行的。

因此，当且仅当  $x \in \mathcal{X}_N$  时，最优化问题 (1.2.2) 是可行的。

**定义 1.2.2（无限时间可行性）** 如果根据最优化问题 (1.2.2) 对  $x(0)$  的可行性得到最优化问题的全局可行性，即对所有的  $x(k)$ ， $k \geq 0$ ，问题 (1.2.2) 是可行的，那么受到滚动时域控制的系统状态  $x(0)$  是无限时间可行的。

因此，当且仅当  $x(0)$  包含在可行集  $\mathcal{X}_N$  的任意控制不变子集  $\mathcal{S}_{\text{inv}}$  内，系统 (1.2.1) 的 RHC 控制器仅是无限时间可行的：

$$\mathcal{S}_{\text{inv}} = \{x(0) \in \mathcal{X}_N \mid \forall x(0) \in \mathcal{S}_{\text{inv}}, \exists u(0) \in \mathbb{U}, \text{s.t. } Ax(0) + Bu(0) \in \mathcal{S}_{\text{inv}}\}$$

注意，RHC 可能可以（也可能不可以）得到子集  $\mathcal{S}_{\text{inv}}$  的不变性，即，如果当构建控制问题 (1.2.2) 时采取另外的测量，那么  $x_0 \in \mathcal{S}_{\text{inv}}$  仅表示 RHC 的无限时间可行性。例如，问题 (1.2.2) 中的额外约束  $Ax(0) + Bu(0) \in \mathcal{S}_{\text{inv}}$ ，对得到无限时间可行性并没有什么帮助。但是，大多数保证无限时间可行性的普遍方法是在问题 (1.2.2) 中增加一个终端约束  $x_N \in \mathcal{O}_\infty^{\text{LQR}}$ ，即  $\mathcal{T}_{\text{set}} \in \mathcal{O}_\infty^{\text{LQR}}$ 。如果一个可行序列  $U_N = [u_0^T, \dots, u_{N-1}^T]^T$  是在  $k$  时刻得到的，那么它是根据终端集约束  $x_N \in \mathcal{O}_\infty^{\text{LQR}}$  得到的，并且  $U_N = [u_1^T, \dots, u_{N-1}^T, Kx_N]^T$  在  $k+1$  时刻也是一个可行序列。这样就能够保证全局可行性。

为了保证无限时间可行性，终端集  $\mathcal{T}_{\text{set}}$  没有必要等于集合  $\mathcal{O}_\infty^{\text{LQR}}$ 。但是如果  $\mathcal{T}_{\text{set}}$  等于任意控制不变集，那么肯定能够保证无限时间可行性。

终端集  $\mathcal{T}_{\text{set}}$  (1.2.2c) 对可行集  $\mathcal{X}_N$  大小有显著的影响。如果  $\mathcal{T}_{\text{set}}$  是控制不变的 (比如,  $\mathcal{T}_{\text{set}} = \mathcal{O}_{\infty}^{\text{LQR}}$ ), 那么  $\mathcal{X}_N \in \mathcal{X}_{N+1}$ 。另一方面, 如果  $\mathcal{T}_{\text{set}} = \mathbb{X}$ , 那么  $\mathcal{X}_N \supseteq \mathcal{X}_{N+1}$ 。

注意, 无限时间可行性并不能说明系统的指数稳定性。也就是说, 如果应用了 RHC, 不能保证状态会进入终端集  $\mathcal{O}_{\infty}^{\text{LQR}}$ , 因为输入需要在每个时间步长内重新计算。

为了保证 RHC 的指数稳定性, 一般需要通过修改开环最优化控制问题 (1.2.2) 的形式来实现。大部分普遍使用的方法是强加一个不变终端集约束 (如  $\mathcal{O}_{\infty}^{\text{LQR}}$ ) 和一个等价于局部指数 Lyapunov 函数的终端代价  $x_N^T P x_N$ , 即 Lyapunov 函数的衰退率必须由阶段代价限定, 以此来保证 RHC 的指数稳定性。如果  $x \in \mathcal{O}_{\infty}^{\text{LQR}}$  和输入  $u = Kx$  作用于系统, 那么有:

$$x_N^T P x_N = x_N^T Q_x x_N + x_N^T Q_u x_N + x_{N+1}^T P x_{N+1} \quad (1.2.3)$$

对  $Q_x \geq 0$ , 可以从式 (1.2.2a) 中得到  $\exists \rho > 0$ , 使得

$$\begin{aligned} J_N^*(x_1) - J_N^*(x_0) &= \left( \sum_{k=1}^N (u_k^T Q_u x_k + x_k^T Q_x x_k) + x_{N+1}^T P x_{N+1} \right) - \\ &\quad \left( \sum_{k=0}^{N-1} (u_k^T Q_u x_k + x_k^T Q_x x_k) + x_N^T P x_N \right) \\ &= \underbrace{-x_0^T Q_x x_0 - u_0^T Q_u u_0}_{\leq -\rho \|x_0\|_2^2} + \underbrace{x_{N+1}^T P x_{N+1} + x_N^T Q_x x_N + x_N^T Q_u x_N - x_N^T P x_N}_{=0} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

所以, 如果终端代价选择为 ARE 的解, 并且终端集约束  $x_N \in \mathcal{O}_{\infty}^{\text{LQR}}$  加入到问题 (1.2.2) 中, 那么函数  $J_N^*(x)$  是一个 Lyapunov 函数, 且闭环系统是指数稳定的。

本节假设 RHC 用于二次型性能指标中。如果控制目标是线性的, 那么可以通过选择终端权矩阵  $P$ , 使得

$$-\|Px\|_p + \|PAx\|_p + \|Qx\|_p \leq 0$$

来保证 RHC 的渐近稳定性。这里, 下标  $p$  表示线性范数 (如  $p=1$  或  $p=\infty$ ), 且矩阵  $P$  必须是列满秩的。

下面总结终端集约束  $x_N \in \mathcal{T}_{\text{set}}$ , 反馈律  $\kappa(x)$  (对  $x \in \mathcal{T}_{\text{set}}$ ) 和保证 RHC 指数稳定性的终端代价  $V(x_N)$  的一般条件:

① 约束满足性:  $\mathcal{T}_{\text{set}} \in \mathbb{X}$ ,  $\kappa(x) \in \mathbb{U}$ ,  $\forall x \in \mathcal{T}_{\text{set}}$ 。

② 不变性:  $x \in \mathcal{T}_{\text{set}} \Rightarrow x^+ \in \mathcal{T}_{\text{set}}$ 。

③ 稳定性: 存在  $\rho > 0$  使得  $V(x^+) - V(x) \leq -\ell(x, u)$ , 其中  $\ell(\cdot)$  表示阶段代价 (这里  $\ell(x, u) = x^T Q_x x + u^T Q_u u$ )。

保证稳定的第二种广泛使用的方法是收缩约束。在开环系统 (1.2.2) 上增加一个约束, 使得某种范数的状态减小 (如,  $\|x_{k+1}\| \leq \|x_k\|$ )。如果能够适当地选择约束, 可以保证指数稳定性。但是收缩约束不能保证无限时间可行性。

### 1.3 显式模型预测控制概况

模型预测控制基于滚动时域在线反复优化的思想来求解无限时间约束最优控制问题。由



于采用了预测模型、滚动优化、反馈校正和多步预测等新的控制策略, 获取了更多的系统运行信息, 使得模型预测控制具有良好的控制性能, 并能在一定的程度上有效地抑制系统模型的不精确和外界干扰对于系统控制性能的影响。模型预测控制技术已在石油、化工等流程工业领域获得了广泛应用, 取得了巨大的经济效益与社会效益(如节能减排)。

由于传统模型预测基于反复, 因此主要有如下不足之处:

(1) 由于模型预测控制的反复在线优化计算特点, 使得模型预测控制技术只能适用于问题规模不大或者系统的动态变化较慢的场合(如过程控制系统), 难以适用于采样速率较高的系统和动态变化较快的系统, 如电机系统、电力系统、电力电子系统、机械振动控制、汽车电子控制等。

(2) 从工程实践中逐步发展起来的模型预测控制技术由于需要反复在线优化计算, 在理论研究方面(系统的性能分析和综合)存在明显的滞后。闭环模型预测控制系统在本质上属于一类隐性的非线性系统, 系统的主要设计参数都蕴含在闭环传递函数中, 因而很难对于闭环模型预测控制系统进行理论上的分析。

(3) 实际系统的模型总是具有一定的非线性特性、时变特性和一定的外部干扰, 模型的结构与参数总是具有一定的摄动特性。通常用一定的线性标称模型来近似实际模型, 然后基于标称模型建立预测控制算法。因此, 必须要分析模型误差和外部干扰存在时的标称模型预测控制系统的实际控制性能。由于理论上的分析很困难, 对于按标称模型设计的模型预测控制系统, 实际运行前, 还不能对它的控制性能做出一个较为准确的估计与评价。虽然鲁棒模型预测控制在设计阶段就考虑模型不确定和外部扰动的影响, 但是在线计算复杂, 保守性大, 难以应用。

最近几年, 国内外对于减少模型预测控制的在线计算时间、提高在线计算速度和扩大模型预测控制技术适用范围的研究非常活跃, 特别是 Bemporad 等学者在显式模型预测控制(Explicit Model Predictive Control)方面所做的开创性工作。

优化问题(1.1.2)中的最优决策向量 $U^*(x(0))$ 取决于 $x(0)$ , 即当 $x(0)$ 的值改变时 $U_N^*(x(0))$ 也随之改变。通常, 当改变 $x(0)$ 的值时, 都是重新求解优化问题(1.1.2)。因而模型预测控制通常应用在问题规模不是很大或问题的动态行为变化不是很快(或采样速率不是很高)的场合。如果把系统的状态 $x(0)$ 看作优化问题(1.1.2)的参数向量, 设法求得当 $x(0)$ 在我们感兴趣的区域内改变时最优决策向量 $U_N^*(x(0))$ 的变化规律, 或设法得到 $U_N^*$ 与 $x(0)$ 之间的显式函数关系, 那么就可以避免模型预测控制算法的反复在线优化计算, 就可以对模型预测控制的作用机制有更深入的了解。

Bemporad 等学者把多参数规划理论引入到线性时不变对象的约束二次优化控制问题的求解中, 对系统的状态区域(即参数区域)进行凸划分, 离线计算得到对应每个状态分区上的状态反馈最优显式控制律, 并建立了显式模型预测控制系统。这样就把基于反复在线优化计算的闭环模型预测控制系统(本质上是属于一类隐性的非线性系统)转化为与之等价的显式 PWA 系统(显式模型预测控制系统), 其主要意义在于:

(1) 闭环模型预测控制系统本质上属非线性系统, 通常很难建立其显式表达式。PWA 系统是典型的非线性系统模型, 有助于对闭环模型预测控制系统的认识。

(2) 建立与闭环预测控制系统的 PWA 系统, 有助于简化在线计算工作量。在线计算量简化为: 确定当前系统的状态 $x(t)$ 属于哪个多面体集 $CR^i$ , 而对应 $CR^i$ 的最优控制, 已由离线计算得到, 在线无须反复优化计算。

(3) 基于闭环预测控制系统的 PWA 模型，可以建立系统的性能分析方法（如稳定性分析、吸收域分析）。

显式模型预测控制分为离线计算和在线查找两个步骤，主要过程如图 1-3-1 所示。即：离线计算时，应用多参数规划方法对系统的状态区域（即参数区域）进行凸划分，并离线计算得到对应每个状态分区上的状态反馈最优控制律（为状态的线性控制律），如图 1-3-2 所示；在线计算时（图 1-3-1 中的虚线箭头），只需确定当前时刻的系统状态处在状态的哪个分区，并按照该分区上的最优控制律计算当前时刻的最优控制量。

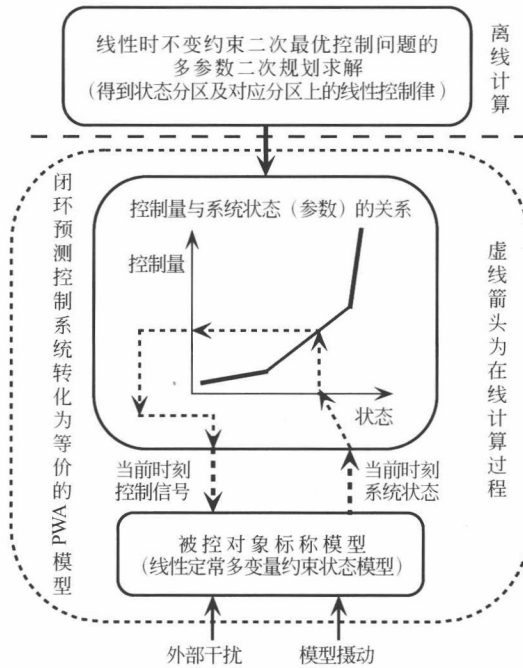


图 1-3-1 显式模型预测控制的主要过程

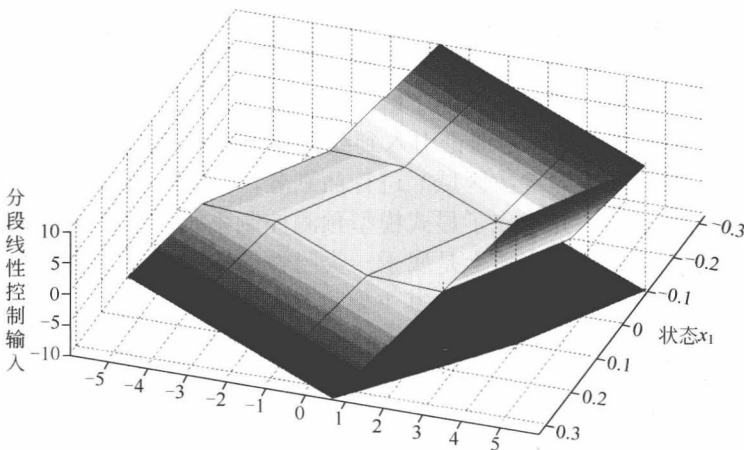


图 1-3-2 状态区域划分状态分区上的状态反馈最优控制律

## 参 考 文 献

- [1] García, C. E., Prett, D. M., & Morari, M. *Model predictive control: theory and practice—a survey*[J]. *Automatica*, 1989, 25 (3), 335–348.
- [2] Li, W. Ch., Biegler, L. *Process control strategies for constrained non-linear systems*[J]. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 1988, 27, 1421–1433.
- [3] Keerthi, S., Gilbert, E. *Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: stability and moving-horizon approximations*[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1988, 265–293.
- [4] Mayne, D., Michalska, H. *Receding horizon control of nonlinear systems*[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35, 814–824.
- [5] Michalska, H., Mayne, D. Q. *Robust receding horizon control of constrained non linear systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(11), 1623–1633.
- [6] Andersen, H. W., Kummel, M. *Evaluating estimation of gain directionality—Part 2: a case study of binary distillation*. *Journal of Process Control*, 1992, 2(2): 67–86.
- [7] Breiman, L. *Hinging hyperplanes for regression, classification and function approximation*. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1993, 39, 999–1013.
- [8] Chikkula, Y., Lee, J. H., & Okunnaike, B. *Dynamically scheduled model predictive control using hinging hyperplane models*. *AIChE Journal*, 1998, 44, 2658–2674.
- [9] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, P. O. M. Scokaert. *Constrained model predictive control: Stability and optimality*. *Automatica* 36 (2000) 789–814.