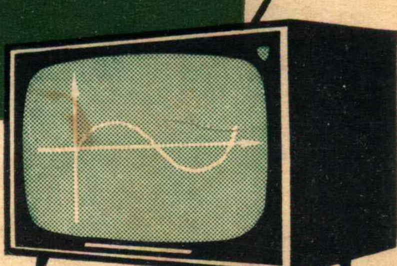
无线电应用数学

下册

WUXIANDIAN YINGYONG SHUXUE



〔日〕石上彦一 著

科学普及出版社

无线电应用数学

下册

〔日〕石上彦一　著

黄宗成　译

科学普及出版社

内 容 提 要

本书是针对无线电专业的实际需要而编写的。内容以初等数学为起点，由浅入深，直到微分方程和富里埃级数，讲述较细，紧密联系无线电技术的实际，每章有适量的例题及习题，并附有答案。

本书可供我国从事无线电专业的读者及无线电业余爱好者和广大知识青年学习参考。

無線工学のための応用数学
石上彦一 著
財団法人無線從事者教育協会

* * *

无线电应用数学
下 册
〔日〕石上彦一 著
黄宗成 译

*

科学普及出版社出版（北京西郊友谊宾馆）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：5 9/16 字数：124千字
1980年5月第1版 1980年5月第1次印刷
印数：1—80,500册 定价：0.44元
统一书号：13051·1056 本社书号：0062

目　　录

第 5 章　微　　分

微分学在电子学和电工学领域里，是根据瞬时变化现象来推察整体情况，以及求已知函数的极大极小值所必备的知识。

这里，将函数微分法、极大极小的求法以及函数式的展开等加以介绍。

5·1　函数的极限

设有函数 $f(x)$，若自变量 x 无限逼近于常数 a，则函数 $f(x)$ 无限逼近于常数 b。这时说，当 x 趋向于 a 时，$f(x)$ 的极限为 b，表示如下：

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

例如，

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-3}{6x+5} = \frac{6-3}{18+5} = \frac{3}{23}.$$

当自变量 x 由比常数 a 大的数无限逼近于 a 时，若函数 $f(x)$ 无限逼近于 b，则表示为

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b,$$

这时 b 可用 $f(a+0)$ 表示，叫做 $f(x)$ 在点 a 的**右极限**（值）。

当自变量 x 由比常数 a 小的数无限逼近于 a 时，若函数

$f(x)$ 无限逼近于 b，则表示为

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

这时 b 可用 $f(a-0)$ 表示，叫做 $f(x)$ 在点 a 的左极限（值）.

当自变量 x 无限逼近常数 a 时，若函数 $f(x)$ 的值无限增大，则说 x 逼近于 a 时，函数 $f(x)$ 的极限为正无限大，表示为

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

当自变量 x 无限逼近常数 a 时，若函数 $f(x)$ 的值为负的无限增大，则说 x 逼近于 a 时，函数 $f(x)$ 的极限为负无限大，表示为

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

例如，

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

设有函数 $f(x)$，当自变量 x 趋向正无限大时，如果函数 $f(x)$ 的值随着逼近于某一个常数 b，则说 x 为正无限大时，函数 $f(x)$ 有极限为 b，表示为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

当自变量 x 趋向负无限大时，如果函数 $f(x)$ 的值随着逼近于某一个常数 b，则说 x 为负无限大时，函数 $f(x)$ 有极限为 b，表示为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

根据以上的说明，可以解释下列各式的意义：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

关于函数的极限，有以下的关系式：若

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \qquad \lim_{x \to a} g(x) = c.$$

则

$$\lim_{x \to a} kf(x) = kb \text{（}k\text{ 为常数），} \tag{5·1}$$

$$\lim_{x \to a} \left\{ f(x) \pm g(x) \right\} = b \pm c, \tag{5·2}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) g(x) = bc, \tag{5·3}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (g(x) \neq 0,\ c \neq 0), \tag{5·4}$$

$$f(x) \leqq g(x) \text{ 推得 } b \leqq c. \tag{5·5}$$

【例 5·1】 试求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ 的值.

【解】 用 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 乘分母和分子，得

$$\frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{1 + x - 1 + x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

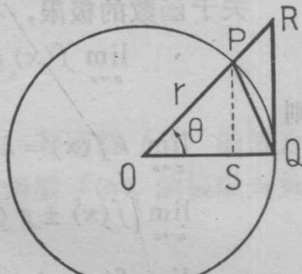
$$= \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1。$$

【例 5·2】 试求 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}$的极限值.



第5·1图

【解】 在第 5·1 图所示的圆心角为θ半径为r的扇形 OPQ 中，设 Q 点的切线与半直线 OP 的交点为 R，则$\triangle OPQ<$ 扇形$OPQ<\triangle ORQ$，它们的面积为：

$$\triangle OPQ\text{的面积}=\frac{1}{2}OQ\cdot PS$$

$$=\frac{1}{2}OQ\cdot OP\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta\ （因\ OQ=OP=r），$$

$$\text{扇形的面积}=\frac{1}{2}OQ\cdot OP\cdot\theta=\frac{1}{2}r^2\theta,$$

$$\triangle ORQ\text{的面积}=\frac{1}{2}OQ\cdot QR=\frac{1}{2}\ OQ\cdot OQ\tan\theta$$

$$=\frac{1}{2}r^2\tan\theta,$$

所以有

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta<\frac{1}{2}r^2\theta<\frac{1}{2}r^2\tan\theta,$$

从而有

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),$$

将上式除以 $\sin\theta$，得

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta},$$

取其倒数得

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta\ .$$

由于 $\lim\limits_{\theta\to+0}\cos\theta=1$，所以在 1 和 $\cos\theta$ 之间的 $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ 只能为

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.$$

另一方面，如果 θ 为负的，并且趋向于 0，则设 $\theta=-\theta'$，于是

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\sin(-\theta')}{-\theta'}=\frac{-\sin\theta'}{-\theta'}=\frac{\sin\theta'}{\theta'},$$

而且，$\theta\to-0$ 时 $\theta'\to+0$，因此

$$\lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta'\to+0}\frac{\sin\theta'}{\theta'}=1.$$

所以

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1. \tag{5·6}$$

【例 5·3】 试求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$ 的值。

【解】 根据二项式定理（详见第5·7节的〔例5·24〕），有

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

$$=1+nx\cdot\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots, \quad ①$$

在 ① 式的两边取 $n\to\infty$ 时的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x=\lim_{n\to\infty}\left\{1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}\right.$$

$$\left.+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\right\}$$

得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots, \quad ②$$

此处，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，由②式得

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots, \quad ③$$

对 ③ 式取 $x\to 0$ 的极限得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)=1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1。\tag{5·7}$$

【例 5·4】 试求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-5}{5x^3-3x+1}$ 的值.

【解】 将分母、分子用 x^3 除即得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-5}{5x^3-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{5-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{0}{5}=0。$$

5·2 微 分 法

函数 $y=f(x)$，设 $x=x_1$ 时，$y=y_1$，$x=x_2$ 时，$y=y_2$：

$$y_1=f(x_1),\quad y_2=f(x_2).$$

现在，自变量 x 从 x_1 变化到 x_2 时，函数的变化量为

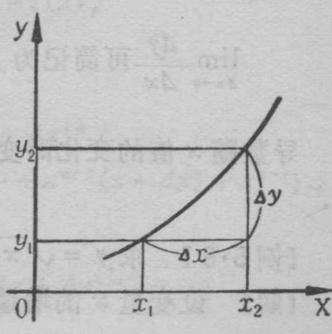
$$y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1),$$

在第5·2图中我们记

$$x_2-x_1=\Delta x,$$

$$y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)=\Delta y,$$

由图看到，当 x_1 增加 Δx 变为 x_2时，y_1 相应地增加 Δy 变为 y_2。因此，通常把 Δx 叫做 x 的增量。



第5·2图

把 Δy 叫做 y 的增量。

所以，x 从 x_1 变化到 x_2 时，函数 $f(x)$ 的增量和自变量 x 的增量之比为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

上式称为：自变量 x 从 x_1 变化到 x_2 时的函数 $f(x)$ 的平均变化率。

换句话说，若自变量 x 从 x_1 变化到 $x_1+\Delta x$ 时，函数 $y=f(x)$ 从 y_1 变化到 $y_1+\Delta y$：

$$y_1=f(x_1),$$
$$y_1+\Delta y=f(x_1+\Delta x),$$

则它的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}.$$

现在，设 Δx 趋向于 0，如果它的平均变化率存在，则把这个极限值叫做：在 $x=x_1$ 时的 $y=f(x)$ 的导数（或瞬时变化率），用下式表示：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}.$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 可简记为 $f'(x_1)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}$ 或 y'。

导数随 x 值的变化而变化，所以，它也是自变量 x 的函数。

【例 5·5】 求 $y=\sqrt{x}$ $(x>0)$ 的导数。

【解】 设变量 x 的增量为 Δx，对应函数 y 的增量为 Δy，则

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x\ (\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta x\ (\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

所以

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5·3 微分法的定理和公式

5·3·1 幂函数的导数

设 $y=x^n$（n 为正整数），且设 x 的增量为 Δx，相应的 y 的增量为 Δy：

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

所以

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$
$$=\{(x+\Delta x)-x\}\{(x+\Delta x)^{n-1}$$
$$+x(x+\Delta x)^{n-2}+\cdots+x^{n-2}(x+\Delta x)+x^{n-1}\},$$

故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\{(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\cdots$$
$$+x^{n-2}(x+\Delta x)+x^{n-1}\},$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\cdots$$

$$+x^{n-2}(x+\Delta x)+x^{n-1}\}$$

$$=x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}=nx^{n-1},$$

所以

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{5·8}$$

5·3·2 y＝kf（x）的导数（k为常数）

因为

$$\Delta y=kf(x+\Delta x)-kf(x)=k\{f(x+\Delta x)-f(x)\}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{k\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}$$

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}k\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=k\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=kf'(x),$$

因此

$$(kf(x))'=kf'(x). \tag{5·9}$$

【例5·6】 试求 $y=8x^4$ 的导数.

【解】 $y'=(8x^4)'=8(x^4)'=8\cdot 4x^3=32x^3$.

5·3·3 函数和的导数

设 $y=f(x)\pm g(x)$，则

$$\Delta y=\{f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x)\}-\{f(x)\pm g(x)\},$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\{f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x)\}-\{f(x)\pm g(x)\}}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x},$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\}$$

$$=f'(x)\pm g'(x),$$

因此

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x). \tag{5·10}$$

【例 5·7】 试求 $y=5x^3-4x$ 的导数.

【解】 $y'=(5x^3-4x)'=(5x^3)'-(4x)'=5(x^3)'-4(x)'$

$$=5\times 3x^2-4=15x^2-4.$$

5·3·4 两个函数乘积的导数

设 $y=f(x)g(x)$，则

$$\Delta y=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x},$$