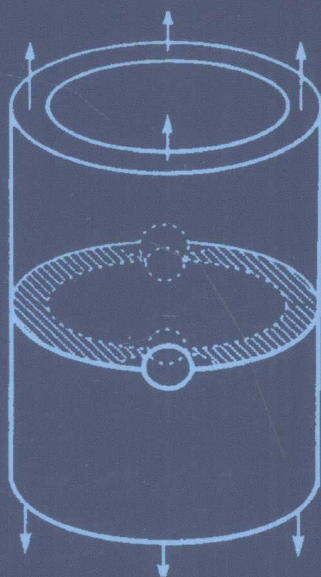


THE METHODS OF SOLUTIONS FOR
STRESS INTENSITY FACTOR IN
FRACTURE MECHANICS

断裂力学中 应力强度因子的解法

(下册)

■ 张 行 著



科学出版社

断裂力学中应力强度因子的解法 (下册)

张 行 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是作者在从事断裂力学应力强度因子解法研究工作的成果基础上写成的。全书共 21 章,内容可分为三类。第一类是二维与三维的应力强度因子解析——变分解法。第二类是三维应力强度因子能量差率闭了解法。第三类则是二维与三维应力强度因子的广义刚度导数解法以及广义守恒积分解法。前两类内容是作者首创的,后一类内容是作者对已有方法的进一步发展。本书所提供的方法均具有计算效率高以及适用范围广的特点。第一类内容见于本书上册;第二、三类内容载于下册。

本书读者对象为固体力学、飞行器、车辆、地面设施、船舶与离岸结构设计等方面的研究生、教师、工程师与研究人员。

图书在版编目 (CIP) 数据

断裂力学中应力强度因子的解法(下册)/张行著. —北京:科学出版社, 2016.12

ISBN 978-7-03-051350-2

I. ①断… II. ①张… III. ①断裂力学—应力强度因子—问题解答
IV. ①O346.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 001094 号

责任编辑:赵敬伟 / 责任校对:张凤琴
责任印制:张 伟 / 封面设计:耕者工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 1 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2017 年 1 月第一次印刷 印张:16 1/4

字数:316 000

定价:98.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

断裂力学是研究含裂纹构件强度与寿命的一门固体力学新分支,是结构损伤容限设计的理论基础。断裂力学可分为线弹性断裂力学与弹塑性断裂力学两大类别,前者适用于裂纹尖端附近小范围屈服的情况;后者适用于裂纹尖端附近大范围屈服的情况。就目前情况而言,弹塑性断裂力学发展很快,但是线弹性断裂力学在结构损伤容限设计中仍居重要地位。

在线弹性断裂力学中,最重要的力学参量是应力强度因子,它是裂纹扩展的驱动力,控制着裂纹尖端附近的应力场与位移场。因此,应力强度因子可以用于预估含裂纹结构在单调载荷作用下的剩余强度以及在重复载荷作用下的剩余寿命,作为结构与机械损伤容限设计基础。

目前,确定应力强度因子的方法大体可以分为解析法与数值法两大类。解析法的优点是所需的计算工作少;数值法的优点是所能解决的问题多。而前者的缺点是所能解决的问题少;后者的缺点是所需的计算工作多。

本书目的在于介绍作者及其合作者在应力强度因子解法方面所取得的研究成果。此成果获国家级科技进步三等奖,曾成功地用于“歼十”前翼耐久性设计,使该部件重量减轻 10 kg。其部分系统结果为本书上下册大量采用。

本书第 1 章至第 8 章介绍确定含裂纹二维与三维有限大体应力强度因子的解析变分方法。这是一种半解析半数值方法,兼有解析法与数值法的优点而克服了它们各自的缺点,即所需计算工作少而所能解决的问题多。当然,边界配置法与边界元素法也属于半解析半数值方法,但前者不能解决三维问题,而后者所需机时约比本方法所需机时大一个数量级。

本书第 9 章至第 16 章介绍确定含裂纹三维有限大体应力强度因子的能量差率封闭解法。这个方法的优点表现在它可以充分利用已有的二维应力强度因子结果确定三维应力强度因子。特别是这个方法是一种封闭解法,具有解析方法的优点,非常节省机时。由本方法所得结果与由有限元法所得结果的差别在工程允许范围之内,但本方法的计算工作量约为有限元法的千分之一到万分之一的数量级。

本书第 17 章至第 21 章介绍应力强度因子的广义刚度导数解法与广义守恒积分解法,它们发展了已有的刚度导数解法与守恒积分解法,拓宽了这两种解法的应用范围。

本书上、下两册分别介绍第 1 至 8 章与第 9 至 21 章内容。

书中如有不当之处,敬请读者批评与指正。

作 者

2016 年 5 月

目 录

第 9 章 三维有限大体张开型裂纹的应力强度因子能量差率法封闭解

——单自由度情况 陈志刚 张行

9.1 裂纹张开位移的基本微分方程——裂纹的虚比例扩展 (1)

9.2 裂纹张开位移与 I 型应力强度因子的封闭解法 (4)

9.3 三维裂纹张开位移模态的表示方法 (6)

9.4 三维张开型裂纹问题的典型情况 (7)

附录 9A 二维裂纹张开位移的总位能差率解法 (13)

参考文献 (18)

第 10 章 三维有限大体剪切型裂纹的应力强度因子能量差率法封闭解

——单自由度情况 王奇志 张行

10.1 裂纹剪切位移与 II、III 型应力强度因子 (19)

10.2 裂纹剪切位移微分方程及其封闭解法 (20)

10.3 三维裂纹剪切位移模态的表示方法 (22)

10.4 三维剪切型裂纹问题典型情况 (24)

参考文献 (32)

第 11 章 圆管三维裂纹应力强度因子的能量差率法封闭解 王奇志 张行

11.1 张开型裂纹问题 (33)

11.2 剪切型裂纹问题 (42)

参考文献 (51)

第 12 章 三维有限大体张开型非对称裂纹应力强度因子能量差率法封闭解

——多自由度情况 王奇志 张行

12.1 单轴向偏心裂纹——二自由度情况 (53)

12.2 双轴向偏心裂纹——三自由度情况 (62)

12.3 偏轴裂纹 (68)

12.4 能量差率法封闭解的高级理论 (77)

附录 12A 二维裂纹张开位移的模态与幅值 (85)

参考文献 (93)

第 13 章 三维有限大体剪切型非对称裂纹应力强度因子能量差率法封闭解	
——多自由度情况	王奇志 张行
13.1 单轴向偏心裂纹——二自由度情况	(95)
13.2 双轴向偏心裂纹——三自由度情况	(102)
参考文献	(108)
第 14 章 三维有限大体复合型裂纹应力强度因子的能量差率法封闭解	王奇志 张行
14.1 裂纹表面受法向力时的基本微分方程	(109)
14.2 裂纹表面受切向力时的基本微分方程	(112)
14.3 裂纹表面受复合力时的基本微分方程	(114)
14.4 基本微分方程组的简化及其封闭解法	(116)
附录 14A 二维斜裂纹的裂纹面位移模态与幅值	(117)
参考文献	(124)
第 15 章 界面裂纹(层板层间分层)二维与三维应力强度因子的能量差率	
封闭解法	胡伟平 孟庆春 白静 张行
15.1 层合直梁二维分层问题的解析解法与分层力学分析	(125)
15.2 层合板三维分层问题的能量解法与分层力学分析	(129)
参考文献	(153)
第 16 章 蜂窝夹芯板脱胶问题应力强度因子的能量差率解法	缪长青 张行
16.1 二维断裂力学含穿透裂纹夹芯梁能量差率与应力强度因子的关系 ..	(154)
16.2 三维断裂力学含椭圆形脱胶区夹芯板能量差率分布	(160)
16.3 分析含椭圆脱胶区蜂窝夹芯板的片条合成能量法	(166)
16.4 算法、算例及结果分析	(179)
参考文献	(185)
第 17 章 应力强度因子的广义刚度导数解法	程暑敏 张行
17.1 变厚度板单纯型裂纹应力强度因子的广义刚度导数法	(186)
17.2 等厚度板复合型裂纹应力强度因子的广义刚度导数解法	(198)
参考文献	(203)
第 18 章 应力强度因子的广义守恒积分解法	范秀昌 邓小敏 夏焜 张行
18.1 二维单纯型广义守恒积分及其在求解应力强度因子中的应用	(204)
18.2 二维复合型广义守恒积分及其在求解应力强度因子中的应用	(212)

18.3 三维广义守恒积分及其在求解应力强度因子中的应用	(219)
参考文献	(222)
第 19 章 应力强度因子的加权守恒积分解法	吴绍富 张行
19.1 守恒积分的建立——权函数法	(224)
19.2 含 V 型缺口板缺口顶端附近应力场分析	(226)
19.3 权函数的确定与守恒积分收敛性的证明	(229)
19.4 含 V 型缺口板缺口顶端应力强度因子的加权守恒积分——有限元解法	(231)
参考文献	(233)
第 20 章 平面复合型界面裂纹问题的解析变分——广义加权双场守恒 积分解法	孟庆春 张行
20.1 位移场和应力场的本征展开	(234)
20.2 广义加权双场守恒积分的表达式	(236)
20.3 权函数的确定	(240)
20.4 变分解法	(241)
20.5 计算例题	(242)
参考文献	(244)
第 21 章 测定应力强度因子的守恒积分——光弹性法	郭明洁 张行
21.1 基本原理	(245)
21.2 实验、计算与验证	(248)
参考文献	(250)

第 9 章 三维有限大体张开型裂纹的应力强度因子 能量差率法封闭解——单自由度情况

陈志刚 张 行

工程上,部分穿透厚度裂纹的三维问题是很常见的。由于这种问题的复杂性,只有对于无限大体,才能获得精确解。对于有限大体,现有的近似解法大体如下:

- (1) 交替法;
- (2) 有限元法;
- (3) 边界元法;
- (4) 有限元—交替法。

所有以上方法在断裂力学发展中均曾起过重要作用,但这些方法在不同程度上都是比较花费人工与机时的。本章目的在于给出适用于较大范围的三维有限大体裂纹应力强度因子的封闭解法。

9.1 裂纹张开位移的基本微分方程——裂纹的虚比例扩展

为了决定图 9.1 所示三维含裂纹体的应力强度因子,需要建立强度因子与裂纹张开位移的关系。

裂纹张开位移的平方可被假设成

$$v^2(x, z) = v_0^2 H(x, z) \quad (9.1)$$

这里, $H(x, z)$ 被假设为已知函数, v_0 是未知的位移场幅值。 $H(x, z)$ 满足以下要求

$$\begin{aligned} H(0, 0) &= 1 \\ H(x_1, z_1) &= 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

式中, (x, z) 是裂纹表面上任意点, 而 (x_1, z_1) 则是裂纹前缘上的任意点 A , 如图 9.1 所示。

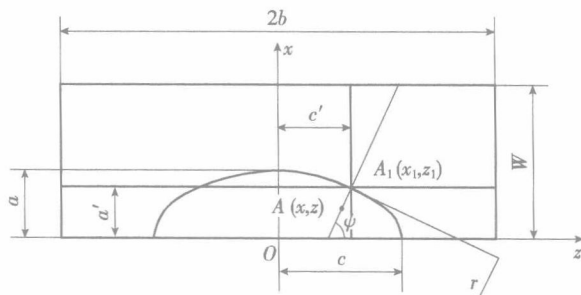


图 9.1 含裂纹三维有限大体的含裂纹截面
(以含半椭圆表面裂纹矩形截面杆为例)

在裂纹前缘点 $A(x_1, z_1)$ 附近, 用泰勒级数展开式并略去高阶小量, 可得法向切片的裂纹张开位移平方如下

$$v^2(x, z) = v_0^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{x_1, z_1} (x - x_1) + \frac{\partial H}{\partial z} \bigg|_{x_1, z_1} (z - z_1) \right\} \quad (9.3)$$

或

$$H(x, z) = \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{x_1, z_1} (x - x_1) + \frac{\partial H}{\partial z} \bigg|_{x_1, z_1} (z - z_1) \quad (9.4)$$

过点 $A(x_1, z_1)$ 作平行于 x 轴的纵截面与平行于 z 轴的纵截面, 它们都垂直于 xz 平面。在点 A 的邻域中, 以上两种截面的裂纹张开位移分别为

$$v^2(x, z_1) = v_0^2 \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} (x - x_1) \quad (9.5)$$

或

$$H(x, z_1) = \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} (x - x_1) \quad (9.6)$$

同时

$$v^2(x_1, z) = v_0^2 \frac{\partial H}{\partial z} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} (z - z_1) \quad (9.7)$$

或

$$H(x_1, z) = \frac{\partial H}{\partial z} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} (z - z_1) \quad (9.8)$$

于是, 由式(9.3)~式(9.8)可知, 在裂纹前缘的 A 点附近, 法向切片裂纹张开位移的平方为

$$v^2(x, z) = v^2(x, z_1) + v^2(x_1, z) = v_0^2 \{ H(x, z_1) + H(x_1, z) \} \quad (9.9)$$

上式可被称为裂纹张开位移的勾股弦定理。进一步, 在法向切片上, 距裂纹前缘为 r 的一点的坐标为

$$x = x_1 - r \sin \psi, \quad z = z_1 - r \cos \psi \quad (9.10)$$

将式(9.10)代入式(9.4), 可得在法向切片上裂纹前缘附近裂纹张开位移如下

$$v^2 = -v_0^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \sin \psi + \frac{\partial H}{\partial z} \cos \psi \right\}_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} r \quad (9.11)$$

假定法向切片在裂纹前缘附近的裂纹张开位移与应力强度因子具有如下关系

$$v^2(x, z) = \frac{8}{\pi} \frac{K_I^2}{E_n^2} r \quad (9.12)$$

这里, E_n 被称为广义弹性模量, 它可被表示成

$$E_n = E + (E_1 - E)R(\psi), \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (9.13)$$

对于深埋裂纹,法向切片处于平面应变状态,可以取

$$R(\psi) = 1, \quad E_n = E_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (9.14)$$

对于表面裂纹,法向切片从 $\psi = 0$ 处平面应力状态过渡到 $\psi = \pi/2$ 处平面应变状态。从而,可以取

$$R(\psi) = \sin\psi, \quad E_n = E - (E_1 - E)\sin\psi \quad (9.15)$$

由式(9.11)与式(9.12),可得法向切片的应力强度因子与裂纹张开位移的关系如下

$$K_1^2 = -\frac{\pi}{8} E_n v_0^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \sin\psi + \frac{\partial H}{\partial z} \cos\psi \right\}_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} \quad (9.16)$$

法向切片的总位能差率 G 为

$$G = \frac{1}{E_n} K_1^2 = -\frac{\pi}{8} E_n v_0^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \sin\psi + \frac{\partial H}{\partial z} \cos\psi \right\}_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} \quad (9.17)$$

假定椭圆裂纹做虚比例扩展

$$da = a df, \quad dc = c df \quad (9.18)$$

则法向切片的虚裂纹扩展量 dr 与切片在裂尖厚度 ds 分别等于

$$\begin{aligned} dr &= (da) \sin\varphi \sin\psi + (dc) \cos\varphi \cos\psi \\ &= \frac{a \sin^2 \varphi df}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi}} + \frac{c \cos^2 \varphi df}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{a df}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dz_1)^2} = c \sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (9.20)$$

于是,含裂纹有限大体的总位能增量 $d\Pi$ 为

$$d\Pi = -\oint_s G dr ds = -\oint_{\varphi} G a c d\varphi df \quad (9.21)$$

将式(9.17)代入式(9.21),有

$$d\Pi = -\frac{\pi}{8} E_1 v_0^2 a c \left(\frac{I}{a} + \frac{J}{c} \right) df \quad (9.22)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} I &= a \int_{\varphi} \frac{E_n}{E_1} \frac{\partial H}{\partial x} \sin\psi d\varphi \\ J &= c \int_{\varphi} \frac{E_n}{E_1} \frac{\partial H}{\partial z} \cos\psi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

根据叠加原理,可将物体边界的载荷转化为裂纹表面的载荷,并可该载荷表示如下

$$\sigma = \sigma_0 t(x, z) \quad (9.24)$$

这里 σ_0 是广义载荷, $t(x, z)$ 是相关载荷分布函数。物体总位能 Π 也可用以上载荷表示如下

$$\Pi = - \int_A \sigma(x, z) v(x, z) dA \quad (9.25)$$

将式(9.24)代入式(9.25),有

$$\Pi = - \frac{\sigma_0}{2} \pi a c v_0 K \quad (9.26)$$

这里,考虑到式(9.1),

$$K = \frac{1}{\pi a c} \int_A 2t(x, z) H^{1/2}(x, z) dA \quad (9.27)$$

式中, A 是裂纹面积, K 是一个与 a/c 无关的量,由式(9.26),总位能增量等于

$$d\Pi = - \frac{\pi}{2} \sigma_0 a c v_0 K \left\{ 2 + \frac{1}{v_0} \frac{dv_0}{df} + \frac{1}{K} \frac{dK}{df} \right\} df \quad (9.28)$$

对比式(9.22)与式(9.28),可得关于 v_0 的 Bernoulli 微分方程如下

$$\frac{dv_0}{df} + \left(2 + \frac{1}{K} \frac{dK}{df} \right) v_0 = \frac{E_1}{4\sigma_0 K} \left(\frac{I}{a} + \frac{J}{c} \right) v_0^2 \quad (9.29)$$

以上方程的通解为

$$\frac{1}{v_0} = e^{2f} K \left\{ - \frac{E_1}{4\sigma_0} \int_0^f \frac{1}{K^2} \left(\frac{I}{a} + \frac{J}{c} \right) e^{-2f^*} df^* + \Delta \right\} \quad (9.30)$$

式中, Δ 是积分常数。

9.2 裂纹张开位移与 I 型应力强度因子的封闭解法

为了得到封闭解,考虑以下两种极端情况。

9.2.1 $a/c \rightarrow 0, c \rightarrow \infty$

令

$$I_1 = \lim_{\frac{a}{c} \rightarrow 0} I, \quad v_{01} = \lim_{\frac{a}{c} \rightarrow 0} v_0, \quad \Delta_1 = \lim_{\frac{a}{c} \rightarrow 0} \Delta \quad (9.31)$$

于是,式(9.30)变成如下形式

$$\frac{1}{v_{01}} = e^{2f} K \left\{ - \frac{E_1}{4\sigma_0} \int_0^f \frac{1}{K^2} \frac{I_1}{a} e^{-2f^*} df^* + \Delta_1 \right\} \quad (9.32)$$

在这种极端情况下,三维非穿透裂纹问题变为二维穿透裂纹问题,如图 9.2(a)所示。

由附录 9A 式(9A.29),可知

$$dv_{01} = \lambda_1 \left(\frac{a}{W} \right) v_{01} \frac{da}{a} = \lambda_1 \left(\frac{a}{W} \right) v_{01} df \quad (9.33)$$

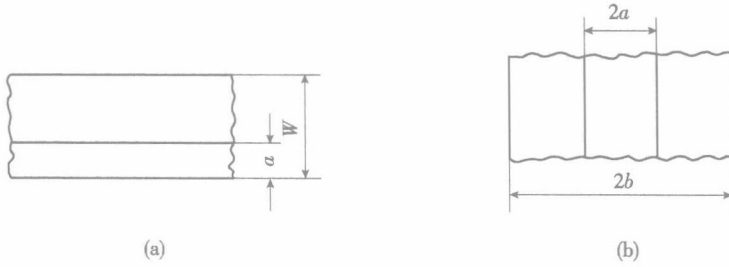


图 9.2 部分穿透裂纹的极端情况

(a) 穿透宽度裂纹; (b) 穿透厚度裂纹

由图 9.2(a) 可见, 对于具有表面裂纹的板, λ_1 应由含边缘裂纹的板的结果得到。将式(9.33)代入式(9.29), 有

$$v_{01} = 4 \frac{\sigma_0 a}{E_1 I_1} \left\{ (2 + \lambda_1) K + \frac{dK}{df} \right\} \quad (9.34)$$

9.2.2 $c/a \rightarrow 0, a \rightarrow \infty$

令

$$J_2 = \lim_{\frac{c}{a} \rightarrow 0} J, \quad v_{02} = \lim_{\frac{c}{a} \rightarrow 0} v_0, \quad \Delta_2 = \lim_{\frac{c}{a} \rightarrow 0} \Delta \quad (9.35)$$

于是, 式(9.30)将变成如下形式

$$\frac{1}{v_{02}} = e^{2f} K \left\{ -\frac{E_1}{4\sigma_0} \int_0^f \frac{1}{K^2} \frac{J_2}{c} e^{-2f^*} df^* + \Delta_2 \right\} \quad (9.36)$$

在这种情况下, 三维非穿透裂纹问题仍然变为二维穿透裂纹问题, 如图 9.2(b) 所示。由附录 9A 式(9A.17), 可知

$$dv_{02} = \lambda_2 \left(\frac{c}{b} \right) v_{02} \frac{dc}{c} = \lambda_2 \left(\frac{c}{b} \right) v_{02} df \quad (9.37)$$

由图 9.2(b) 可见, 无论对于具有深埋裂纹的板, 还是对于具有表面裂纹的板, λ_2 均应由具有中心裂纹的板的结果所得。将式(9.37)代入式(9.29), 有

$$v_{02} = 4 \frac{\sigma_0 c}{E_1 J_2} \left\{ (2 + \lambda_2) K + \frac{dK}{df} \right\} \quad (9.38)$$

对于一般具有非穿透裂纹的板, I 与 J 可被假设为如下分离变量的形式

$$I = m \left(\frac{a}{c}, \frac{W}{b} \right) I_1, \quad J = n \left(\frac{c}{a}, \frac{b}{W} \right) J_2 \quad (9.39)$$

由上式可见, m 与 n 是与 f 无关的量。从而, 将式(9.39)代入式(9.30), 可知

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_0} = e^{2f} K \left\{ -\frac{E_1}{4\sigma_0} m \int_0^f \frac{1}{K^2} \frac{I_1}{a} e^{-2f^*} df^* \right. \\ \left. - \frac{E_1}{4\sigma_0} n \int_0^f \frac{1}{K^2} \frac{J_2}{c} e^{-2f^*} df^* + \Delta \right\} \end{aligned} \quad (9.40)$$

考虑到式(9.32)与式(9.36),可将式(9.40)改写如下

$$\frac{1}{v_0} = \frac{m}{v_{01}} + \frac{n}{v_{02}} + (\Delta - m\Delta_1 - n\Delta_2)e^{2f}K \quad (9.41)$$

进一步知道, v_0 是一个与 f 无关的状态函数。从而,由式(9.41),可得

$$\Delta = m\Delta_1 + n\Delta_2 \quad (9.42)$$

同时,

$$\frac{1}{v_0} = \frac{m}{v_{01}} + \frac{n}{v_{02}} \quad (9.43)$$

将式(9.34)与式(9.38)代入式(9.43),并考虑到式(9.39)有

$$\frac{1}{v_0} = \frac{E_1}{4\sigma_0} \left\{ \frac{\frac{I}{a}}{(2+\lambda_1)K + \frac{dK}{df}} + \frac{\frac{J}{c}}{(2+\lambda_2)K + \frac{dK}{df}} \right\} \quad (9.44)$$

因此,如果已知 $H(x, z)$, 则应力强度因子可由式(9.16)求得如下

$$K_1^2 = -\frac{\pi}{8} E_n^2 v_0^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \sin\psi + \frac{\partial H}{\partial z} \cos\psi \right\}_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}} \quad (9.45)$$

于是,式(9.44)与式(9.45)给出裂纹张开位移与应力强度因子的封闭解。

9.3 三维裂纹张开位移模态的表示方法

为此,以下确定裂纹张开位移的模态,即 $h(x, z_1)$, $h(x_1, z)$ 与 $h(x, z)$ 。过 $A(x_1, z_1)$ 点横截面与纵截面的裂纹张开位移分别为

$$v(x, z_1) = v_0 h(x, z_1), \quad v^2(x, z_1) = v_0^2 H(x, z_1) \quad (9.46)$$

$$v(x_1, z) = v_0 h(x_1, z), \quad v^2(x_1, z) = v_0^2 H(x_1, z) \quad (9.47)$$

可以假定,三维含裂纹体的以上任意一种截面的裂纹张开位移模态与具有相同几何形状、相同最大裂纹张开位移与相同载荷分布形式的二维含裂纹板的裂纹张开位移模态相同。如果 $v_1(x, z_1)$ 与 $v_2(x_1, z)$ 分别是用以表示三维含裂纹体横截面与纵截面裂纹张开位移的二维裂纹张开位移,则根据上述假定,有(参考图 9.1)

$$v(x, z_1) = v_1(x, z_1) = v_{01}(z_1)h_1\left(\frac{a'}{W}, x\right) \quad (9.48)$$

$$v(x_1, z) = v_2(x_1, z) = v_{01}(x_1)h_2\left(\frac{c'}{b}, z\right) \quad (9.49)$$

这里, $v_{01}(z_1)$ 与 $v_{02}(x_1)$ 分别为过 $A(x_1, z_1)$ 点的横截面与纵截面的最大裂纹张开位移, h_1 与 h_2 则分别为相应的二维裂纹张开位移的模态函数,它们可由本章附录 9A 得到。

为了保证横截面与纵截面裂纹张开位移沿 x 轴与 z 轴的协调性,以下两个等式应该成立

$$v_{01}(z_1) = v_2(0, z_1) = v_{02}(0)h_2\left(\frac{c}{b}, z_1\right) = v_0h_2\left(\frac{c}{b}, z_1\right) \quad (9.50)$$

$$v_{02}(x_1) = v_1(x_1, 0) = v_{01}(0)h_1\left(\frac{a}{W}, x_1\right) = v_0h_1\left(\frac{a}{W}, x_1\right) \quad (9.51)$$

这里, v_0 是原点裂纹张开位移, 即最大裂纹张开位移。

将式(9.50)与式(9.51)分别代入式(9.48)与式(9.49), 并将所得结果与式(9.46)和式(9.47)进行比较, 可得

$$H(x, z_1) = h_2^2\left(\frac{c}{b}, z_1\right)h_1^2\left(\frac{a'}{W}, x\right) \quad (9.52)$$

$$H(x_1, z) = h_1^2\left(\frac{a}{W}, x_1\right)h_2^2\left(\frac{c'}{b}, z\right) \quad (9.53)$$

裂纹区内其他任意点的裂纹张开位移可被考虑作如下平均值(参考图 9.3)

$$v(x, z) = \frac{1}{2}\{v_1(x, z) + v_2(x, z)\} \quad (9.54)$$

于是, 由式(9.46)、式(9.47)与式(9.54), 并考虑到式(9.1), 有

$$H^{1/2}(x, z) = \frac{1}{2}\{h_2\left(\frac{c}{b}, z\right)h_1\left(\frac{a'}{W}, x\right) + h_1\left(\frac{a}{W}, x\right)h_2\left(\frac{c'}{b}, z\right)\} \quad (9.55)$$

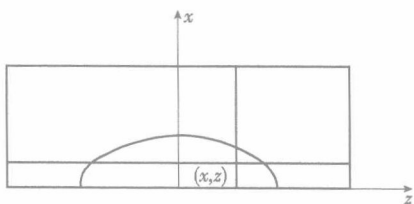


图 9.3 裂纹区任意点裂纹张开位移图解表示

9.4 三维张开型裂纹问题的典型情况

下面应用以上方法研究图 9.4 所示在远端承受均匀拉应力 σ 的五种含裂纹体。对这些情况, 根据 9.3 节, 横纵截面裂纹张开位移的模式函数可被写成如下统一形式

$$\left. \begin{aligned} h_1\left(\frac{a}{W}, x_1\right) &= n_i a_i \left(\frac{a}{W}\right) \beta_i^{1/2}\left(\frac{x_1}{a}\right) + \left[1 - n_i a_i \left(\frac{a}{W}\right)\right] \beta_i^{3/2}\left(\frac{x_1}{a}\right) \\ h_1\left(\frac{a'}{W}, x\right) &= n_i a_i \left(\frac{a'}{W}\right) \beta_i^{1/2}\left(\frac{x}{a'}\right) + \left[1 - n_i a_i \left(\frac{a'}{W}\right)\right] \beta_i^{3/2}\left(\frac{x}{a'}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9.56)$$

$$\left. \begin{aligned} h_2\left(\frac{c}{b}, z_1\right) &= n_j a_j \left(\frac{c}{b}\right) \beta_j^{1/2}\left(\frac{z_1}{c}\right) + \left[1 - n_j a_j \left(\frac{c}{b}\right)\right] \beta_j^{3/2}\left(\frac{z_1}{c}\right) \\ h_2\left(\frac{c'}{b}, z\right) &= n_j a_j \left(\frac{c'}{b}\right) \beta_j^{1/2}\left(\frac{z}{c'}\right) + \left[1 - n_j a_j \left(\frac{c'}{b}\right)\right] \beta_j^{3/2}\left(\frac{z}{c'}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9.57)$$

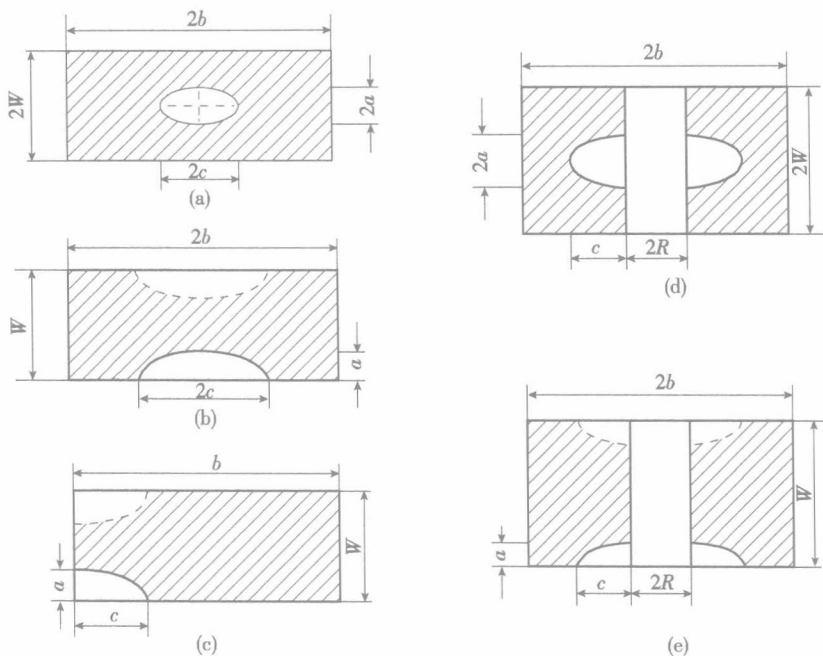


图 9.4 三维裂纹典型情况

(a)深埋全椭圆裂纹;(b)表面半椭圆裂纹;(c)边角 1/4 椭圆裂纹;

(d)孔边半椭圆裂纹;(e)孔边 1/4 椭圆裂纹

这里, $i, j=1, 2, 3$ 分别表示中心裂纹、边缘裂纹与孔边裂纹。由图 9.1 可见

$$a' = x_1 = a \sin \varphi, \quad c' = z_1 = c \cos \varphi \quad (9.58)$$

$$x = x_1 - r \sin \psi, \quad z = z_1 - r \cos \psi \quad (9.59)$$

对于含深埋椭圆裂纹的矩形截面,横、纵截面均为中心裂纹情况。于是, $i=j=1$ 。这时, n_1, a_1 与 β_1 可由本章附录 9A 得到。同时,可以假定所有法向切片处于平面应变状态,因此

$$R(\psi) = 1, \quad E_a = E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} \quad (9.60)$$

于是,由式(9.56)~式(9.59)、式(9.52)、式(9.53)与本章附录 9A 有关各式,可得

$$I = 32 \int_0^{\pi/2} \left\{ 2a_1 \left(\frac{c}{b} \right) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right\}^2 \frac{a_1^2 \left(\frac{a}{W} \right) \sin \varphi \sin^2 \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi}} d\varphi \quad (9.61)$$

$$J = 32 \int_0^{\pi/2} \left\{ 2a_1 \left(\frac{a}{W} \right) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right\}^2 \frac{a_1^2 \left(\frac{c}{b} \right) \cos \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (9.62)$$

显然,载荷分布函数为

$$t(x, z) = 1 \quad (9.63)$$

从而,由式(9.52)、式(9.53)与式(9.55),可将式(9.27)写成

$$K = \int_0^{\pi/2} \left\{ a_1 \left(\frac{c}{b} \right) \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right\} \times \left\{ \frac{3}{2} + a_1 \left(\frac{a}{W} \sin \varphi \right) \right\} \sin^3 \varphi d\varphi \\ + \int_0^{\pi/2} \left\{ a_1 \left(\frac{a}{W} \right) \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right\} \times \left\{ \frac{3}{2} + a_1 \left(\frac{c}{b} \cos \varphi \right) \right\} \cos^3 \varphi d\varphi \quad (9.64)$$

同时,在裂纹作比例扩展的情况下,有

$$\frac{dK}{df} = \frac{\partial K}{\partial a} \frac{da}{df} + \frac{\partial K}{\partial c} \frac{dc}{df} = \frac{\partial K}{\partial a} a + \frac{\partial K}{\partial c} c \quad (9.65)$$

进一步,由附录9A可知

$$\lambda_1 = 1 + \frac{F'_1 \left(\frac{a}{W} \right)}{F_1 \left(\frac{a}{W} \right)} \cdot \frac{a}{W}, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{F'_1 \left(\frac{c}{b} \right)}{F_1 \left(\frac{c}{b} \right)} \cdot \frac{c}{b} \quad (9.66)$$

将式(9.60)~式(9.63)各式代入式(9.44)与式(9.45)后,即可求得裂纹张开位移 v_0 与应力强度因子 K_I 。

关于含深埋裂纹的矩形截面计算结果示于图9.5。在该图中也给出了有限元法计算结果,二者非常一致。但能量法要比有限元法大为节省机时,有限元法结果系由纽曼^[1]得到。

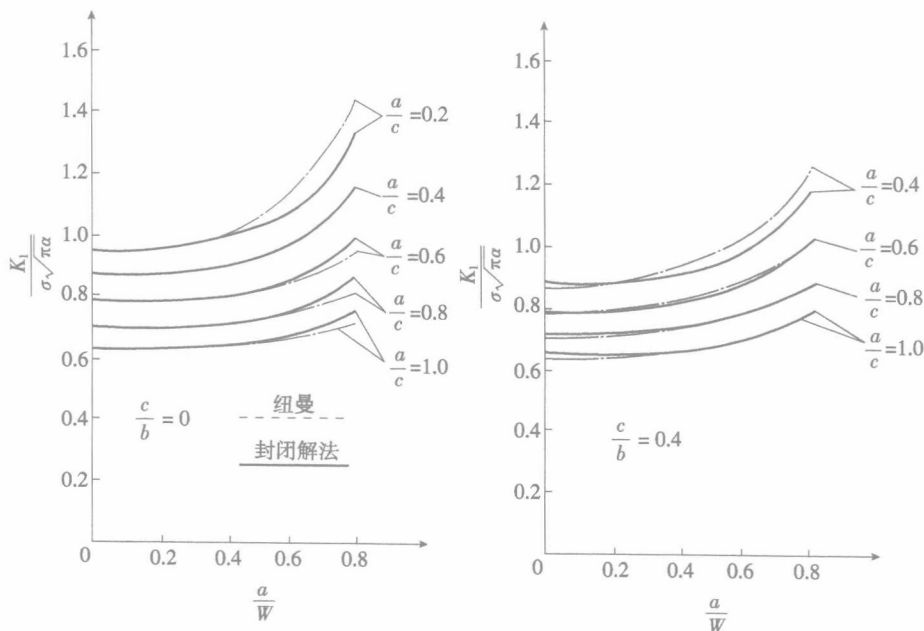


图9.5 深埋全椭圆裂纹的应力强度因子

对于其他四种含裂纹体,也可以采用类似步骤求得裂纹张开位移与应力强度因子,计算结果示于图 9.6~图 9.9。在这些图中,也给出了纽曼的有限元解。在大多数情况下,两者是比较一致的。只有在深而扁的表面裂纹情况下,两者差别较大,如图 9.6 所示。为此,又给出了交替法的解^[2]。图 9.6 表明,根据能量法得到的解在以上两者之间。

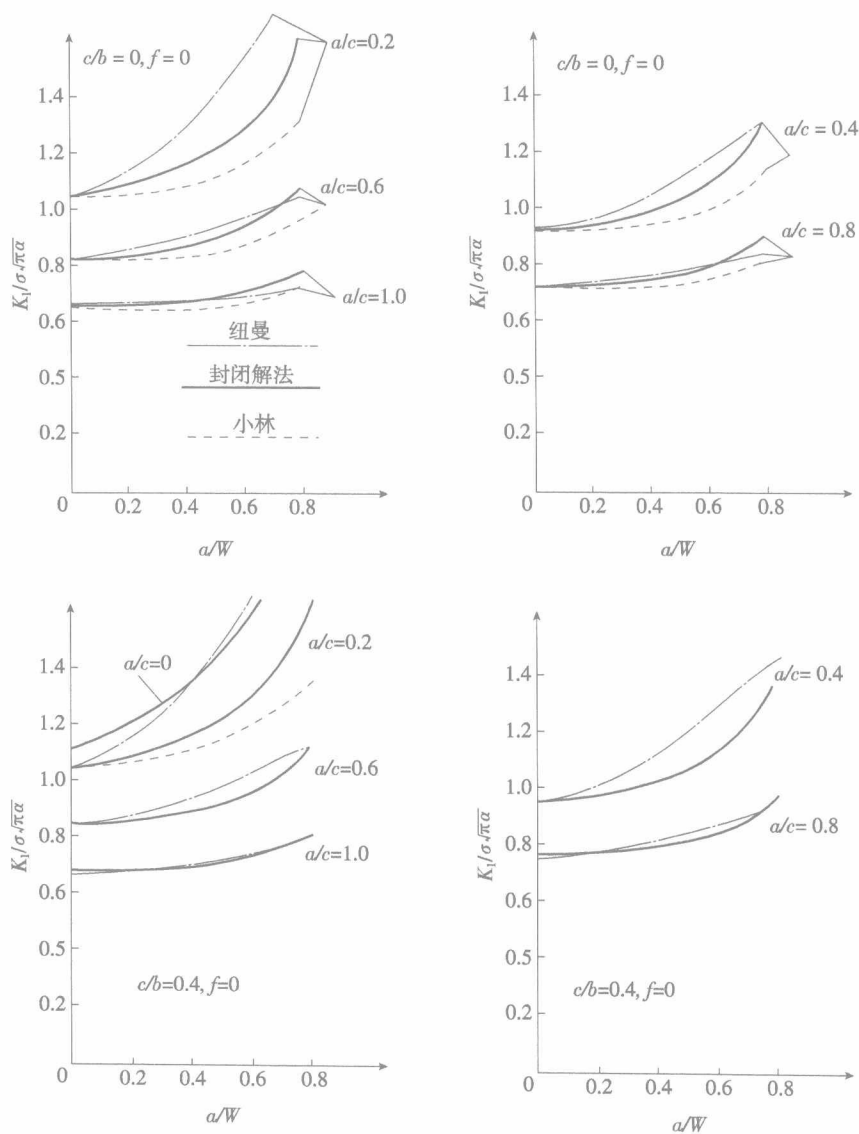


图 9.6 表面半椭圆裂纹的应力强度因子