固体火箭发动机设计的理论基础

〔苏〕Б.Т.叶罗辛 著

张中钦 冯文澜 译

国防工业出版社

第一章　准则的选择。
优化的数学方法

1.1　概况。对发动机装置的基本要求

固体火箭发动机工作过程的特点是：压强较高；燃烧产物的温度、气流的速度和其它参数都具有较高的数值；在非稳态工况下，这些参数变化极快。这就使发动机各零部件产生特殊的载荷条件，这些条件在设计和加工固体火箭发动机时是必须加以考虑的。发动机的构造应适应发动机的任务，并且首先在下列基本参数方面必须满足战术-技术要求：

发动机装置的构造质量和固体推进剂质量；

地面和真空中的推力比冲；

固体推进剂每秒总消耗量的积分平均值；

进入稳态工况的时间；

推力向量控制机构所产生的操纵力和力矩的数值。

此外，在发动机的使用过程中，上述参数相对于额定值的偏离量不能超过战术-技术要求所规定的范围。

发动机及其部件（元件）的构造必须简单，工艺性好而又是可靠的；必须最大限度地利用现行标准和规范；在制造过程中必须便于质量检验。

固体火箭发动机构造的完善性及其工作的可靠性在很大程度上决定于各部件和元件（特别是固体推进剂装药、喷管和控制机构等）和整个发动机构造上解决方法的正确，也决

定于固体推进剂类型（牌号）选择的正确，以及发动机装置各元件的构造材料、热防护和抗烧蚀材料选择的正确。

但是必须指出，提高发动机装置的可靠性又关系到提高各元件在使用条件下的构造强度和刚度安全裕量的要求。为了要制造能满足这些更高要求的构造，自然要消耗更多的时间和资金。此外，强度安全裕量的增加会导致发动机装置构造质量的增加。在为发动机装置的设计编制战术-技术要求时，只有对上述因素进行综合分析后，才能在各种具体情况下确定出构造的最佳可靠性水平。

发动机装置的设计-弹道参数和特性只能靠计算来确定。发动机装置的参数和特性计算在方法上可以分为两个阶段：第一阶段包括近似选定各级发动机装置的基本设计-弹道参数；第二阶段则对各构造的元件（部件）和整体发动机装置进行精确化设计。选择发动机装置参数时必须将飞行器和发动机装置一起进行考虑，也即必须和飞行器的其它发动机以及飞行弹道互相联系起来。研制的发动机装置在其基本特性方面，必须满足能反映固体推进剂基本条件的技术任务书要求。

在选择发动机装置基本参数和特性时，规定的发动机装置研制期限和作为某一具体飞行器组成部分的使用条件具有很大意义。

在一般情况下，发动机装置参数的合理数值决定于：飞行器的构造和气动方案，固体推进剂的能量特性，物理-化学特性和机械特性，所采用的构造材料、热防护材料和抗烧蚀材料，以及经济-生产因素和使用因素（构造的工艺性、制造过程自动化的可能性、国内是否有原料及工业基地等）等。设计时必须力图取得上述参数的最佳值。

原则上，发动机装置的设计-弹道参数的优化必须遵循综合质量准则，即同时考虑到发动机装置的能量质量特性、可靠性特性、使用和时间特性及其目的任务。在有些情况下，发动机装置的尺寸特性具有决定性的意义；在另一些情况下，时间特性等等却是决定性的。这就是说，根据飞行器任务的不同，其中某些特性（准则）是主要的，另外一些却是辅助的。

1.2 优化准则

在选择发动机装置参数和特性时的主要准则是：能量质量准则，可靠性准则和成本准则。第一个准则表征了发动机装置的能量质量完善性；第二个准则表征了可靠性水平；第三个准则表征了成本水平。

随着发动机装置所应完成的目的功用不一样，这些准则的意义也可能不同。例如，假定发动机的质量特性和尺寸特性是决定性的，那末，能量质量准则就成为主要的准则。相反，如果对能量质量特性和尺寸特性没有提出严格的要求，那末，成本准则就成为主要的准则了。而可靠性准则往往是给定的。

在考虑到能量质量准则、可靠性准则和成本准则以后，发动机装置的设计任务可这样制定：

为了保证装有固体火箭发动机的多级飞行器以给定的概率将必需的有效载荷质量送达所要求的射程，应确定各级发动机装置的最佳设计-弹道参数，以符合飞行器的最小起飞质量，并满足所提出的可靠性和成本方面的限制。

1.2.1. 能量质量准则

用来表征发动机装置完善程度的局部准则是：

质量完善性系数α，它等于发动机装置的结构质量和固体推进剂装药质量之比；

发动机的推力比冲I_y。

然而，在一般情况下，质量完善性系数和推力比冲均不能单独地表征发动机的完善性。

根据能量质量准则，发动机装置的完善性可以作为飞行器的组成部分或在技术任务书要求的范围内最可靠地加以确定。而且，作为飞行器的组成部分，发动机装置的完善性可以在固定起飞质量$M_{\text{нач}}$值和有效载荷质量$M_{\text{п.н}}$值的情况下，根据飞行器射程（速度）L的极值来确定；或者在固定L值和$M_{\text{п.н}}$值的情况下，根据起飞质量的极值来确定；或者在固定L值和$M_{\text{нач}}$值的情况下，根据有效载荷质量$M_{\text{п.н}}$的极值来确定。

在技术任务书要求的范围内，例如，当发动机推力R、工作时间t和外部尺寸（发动机直径和总长度）给定时，发动机装置的最佳参数和特性必须相应于固体火箭发动机的最小质量。

在一般情况下，按能量质量准则优化的发动机装置最佳参数可以根据发动机装置随同某一具体飞行器（某一级）一起工作的弹道分析结果来确定。

为了确定发动机装置最佳设计-弹道特性，要选定的各级原始独立参数可以是：

固体推进剂装药的外径；

固体推进剂装药圆柱段的相对长度；

燃烧室中的压强；

喷管扩张比；

固体推进剂的单位燃烧速度。

为了确定发动机装置的最佳参数，必须列出若干关系式(方程式)，可以用来计算推力特性、能量特性、几何特性、质量特性、弹道特性和其它特性。

在对发动机装置（级）随飞行器一起工作进行弹道分析时，必须有轨道主动段的运动方程组，必须给定运动程序、飞行器构造的气动特性、以及所有的限制条件。这些条件能否实现在轨道计算的过程中来验证。

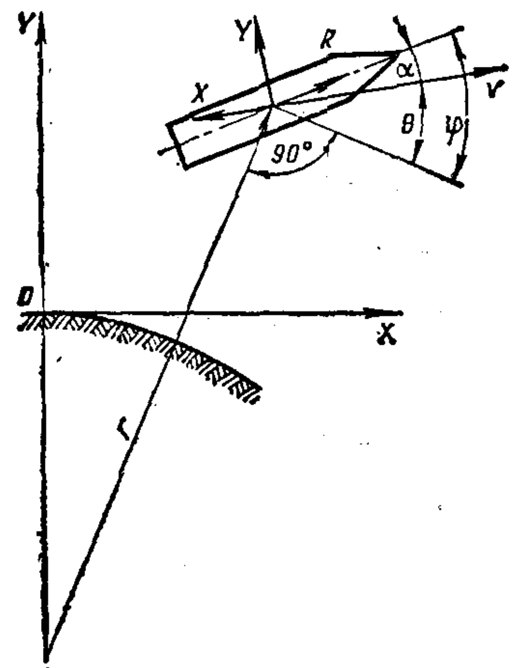

图 1　飞行器运动的运动学简图

弹道计算。物体在轨道主动段的运动方程组。借助于下列 XOY 平面（图 1）内的简化方程组，可以计算出在起飞坐标系中的火箭飞行轨道

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M}(R-X)\cos\alpha - g\sin\theta - g\frac{x}{r}\cos\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{v}\left[\frac{\alpha}{M}(R+Y) - g\cos\theta + g\frac{x}{r}\sin\theta\right] \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

$$\frac{dx}{dt}=v\cos\theta;\qquad \frac{dy}{dt}=v\sin\theta$$

式中　v——飞行速度；X——火箭的气动阻力；Y——升力；M——飞行器质量的当时值；x、y——飞行器坐标；α——攻角；θ——速度向量和当地地平线之间的夹角；g——自由落体加速度。

按照下面相应的关系式，可以确定第 i 级发动机的推力和推力比冲。

$$R=I_{yi}G_i-F_a p_H \tag{1.2}$$

$$I_y=I_{y.п}\varphi_\Sigma-\frac{\overline{F}_a p_H\beta}{p_{c0}} \tag{1.3}$$

式中　φ_Σ——考虑燃烧室和喷管中总损失的系数；$\overline{F}_a=F_a/F_{кр}$——喷管扩张比；$F_a$、$F_{кр}$——分别为喷管出口截面和临界截面面积；$p_{c0}$——喷管前燃烧室容积内的滞止压强；$\beta$——流量组合参数；$p_H$——高度$H$上的大气压强；$I_{y.п}$——发动机的真空热力学冲量。

飞行器当时质量的表达式为

$$M(t)=M_{нач}-M(t-t_{нач}) \tag{1.4}$$

式中　$t_{нач}$——该级工作开始的时间；$M_{нач}$——飞行器的起始质量。

小攻角时的气动阻力可用下式确定：

$$X=C_x\rho v^2S_м/2 \tag{1.5}$$

式中　ρ——大气密度；$S_м$——该级的最大横截面积；C_x——该级的气动阻力。

升力的表达式为

$$Y=C_Y^{(\alpha)}\rho S_м v^2/2 \tag{1.6}$$

式中　$C_Y^{(\alpha)}$——升力系数。

可按下式确定法向过载

$$n_{Y}=C_{n}^{(\alpha)}qS_{\text{м}}\alpha/(Mg) \tag{1.7}$$

式中　$q=\rho v^{2}/2$——速度压头；$C_{n}^{(\alpha)}$——法向力系数。

飞行器轴线对OX轴的倾斜角（俯仰角）等于$\varphi=\theta+\alpha$。

在所采用的假设范围内，方程组（1.1）及方程式(1.2)至（1.7）描述了物体在轨道主动段的运动。

假设地球是一个不旋转的球体、发动机的攻角和相对于飞行器轴线的发动机轴线倾斜角又很小，则火箭的运动方程式可写作

$$dv/dt=(R-X)/M-g\sin\theta \tag{1.8}$$

积分后可得火箭（级）主动段飞行的终点速度$v_{\text{кон}}$，其中考虑了地球引力和大气阻力：

$$v_{\text{кон}}=\sum_{i=1}^{n}\left[gI_{yi}\ln\mu-g\int_{0}^{t_{\text{кон}}}\sin\theta\,dt-\int_{0}^{t_{\text{кон}}}\frac{X}{M}dt\right] \tag{1.9}$$

式中　$\mu=M_{\text{нач}}/M_{\text{кон}}$；$g_{1}=9.8066\text{m/s}$；$M_{\text{кон}}$——火箭的终点质量，kg。

（1.9）式中的第一项代表火箭的飞行速度，可由齐奥考夫斯基公式来确定；第二项给出由于地心引力所引起的速度损失Δv_{g}；第三项是由于火箭气动阻力引起的速度损失Δv_{cx}。

引起损失的积分值可写成下列形式：

$$\Delta v_{g}=\int_{0}^{t_{\text{кон}}}g\sin\theta_{\text{cp}i}dt_{i}=g\sin\theta_{\text{cp}i}t_{\text{кон}i}$$

式中　$\theta_{\text{cp}i}$——轨道切线倾斜角的平均轨道值；$t_{\text{кон}i}$——第i级发动机总的工作时间。

计算表明，开始几级的$\sin\theta_{\text{cp}}$值在1.00至0.95的范围

内。对于个别飞行器的后面几级，根据具体的俯仰运动程序的不同，此值可在 0.3～0.5 的范围内。

由于气动阻力引起的飞行器速度损失平均值经过变换后可写成

$$\Delta v_{Cx}=\overline{C}_x\frac{S_M}{M_{\text{нач}}}\int_0^t\frac{g\rho v^2}{2(1-tn/I_y)}dt \quad (1.10)$$

式中　$t=(M_{\text{нач}}-\mu M_{\text{нач}})/G$；$dt=-M_{\text{нач}}/Gd\mu$；$n=R/(M_{\text{нач}}g)$——飞行器的轴向过载；$\overline{C}_x$——迎面阻力系数的平均值；$G$——推进剂的每秒质量流量。

假设 Δv_{Cx} 是稳定的，则对于第 i 级来说，方程式(1.9)可写成

$$v_i=I_{yi}g\ln\left[1+\frac{1}{(M_{\text{п.н}})_i/\omega_i+\alpha_i}\right]-g\sin\theta_{\text{ср}i}t_{\text{кон}i} \quad (1.11)$$

式中　$(M_{\text{п.н}})_i$——第 i 级的有效载荷质量，包括随后各级的质量。

$$(M_{\text{п.н}})_i=M_{\text{нач}i}-\omega_i(\alpha_i+1) \quad (1.12)$$

ω_i——第 i 级发动机装置的推进剂质量；$t_{\text{кон}i}$——第 i 级的工作时间。

由关系式（1.11）可见，当 $(M_{\text{п.н}})_i$ 及 ω_i 为常值时，飞行器的终端速度是 I_{yi}、α_i 和 t_i 的函数。

1.2.2　可靠性准则

固体火箭发动机的可靠性是在给定条件下保证发动机无故障地工作的技术性能的总合。

在设计阶段，发动机无故障工作的概率 P 根据各元件无故障工作概率 P_i 的计算结果来确定。发动机各元件的所有故障可以归纳为两种类型：机械故障和参数故障。

由于发动机机械完整性遭受破坏而引起的机械故障会导致固体火箭发动机的破坏。机械故障的原因可能是由于压强升高超过许可值，发动机壳体强度不够等等。

参数故障是由发动机输出参数和发动机特性（推力、消极质量、尺寸等）偏离规定值而引起的。参数故障会导致飞行器不能完成预定任务。

通常，机械可靠性和参数可靠性相互有影响[11]。

发动机工作的无故障概率P(在缺乏实物试车统计数据的情况下）可按下式确定：

$$P=P_{\text{м}}P_{\text{п}}+(P_{\min}-P_{\text{м}}P_{\text{п}})K \qquad (1.13)$$

式中　$P_{\text{м}}$——机械可靠性；$P_{\text{п}}$——参数可靠性；$1-P_{\text{м}}$、$1-P_{\text{п}}$各为产生机械故障和参数故障的概率；$P_{\min}$——发动机第i个元件工作无故障概率值中的最小值；K——考虑到各元件工作无故障概率相互影响的一个系数。系数K的确定方法可参阅参考文献[11]。在没有相互影响的情况下$K=0$。

发动机机械可靠性可表示为各元件机械可靠性的乘积：

$$P_{\text{м}}=\prod_{i=1}^{n} P_i \qquad (1.14)$$

式中　P_i——元件i的机械可靠性；n——元件数。

关系式（1.14）可写成

$$P_{\text{м}}=P_{\text{к}}P_{\text{тзп}}P_{\text{с.б}}P_{\text{о.у}}P_{\text{зтт}}P_{\text{в.у}}P_{\text{о.т}} \qquad (1.15)$$

式中　$P_{\text{к}}$、$P_{\text{тзп}}$、$P_{\text{с.б}}$、$P_{\text{о.у}}$、$P_{\text{зтт}}$、$P_{\text{в.у}}$、$P_{\text{о.т}}$分别为壳体、热防护层、喷管组件、推力向量控制机构、固体推进剂装药、点火机构及推力截止机构的无故障工作概率。

发动机第i元件（参数）的工作能力条件可以用概率安全系数来考虑：

$$k_i=\Pi_{i\,\text{кр}}/\Pi_i \qquad (1.16)$$

这是一个统计变量，以随机的形式决定于工作能力函数的自变量。

上式中 $\Pi_{i\kappa p}$——第 i 个参数的极限（临界）值；Π_i——该参数的值（应力、变形等）；$i=1\sim m$；m——所采取的工作能力条件数。

当解决与发动机构造可靠性分析有联系的复杂问题时，广泛采用统计模拟法，或称作蒙特·卡洛(Monte-Carlo)法。

统计模拟法的实质在于：根据电子计算机对应的算法给出自变量的随机值，由此进行由函数关系式所规定了的演算，并确定必须的统计变量-概率安全系数。在执行了大量计算，也即从总体中抽样以后，在数学统计法和概率理论的基础上可以确定相应于总体的形状和参数（分布规律的特征和形状）。

确定发动机元件（应力、变形等）安全系数值 k_i 的数字值可按照理论-概率模型，通过方程组的积分来计算。这方程组用来描述固体火箭发动机的室内过程、热防护层消蚀速度、固体推进剂装药内的应力和变形等。

用作随机自变量的有：

固体推进剂、热防护层和发动机壳体结构材料的物理-化学特性及机械特性；

发动机壳体、喷管组件、固体推进剂装药、推力向量控制系统的构造参数；

表征固体火箭发动机燃烧室中工作过程各个方面的参数、火箭使用条件等。

固体火箭发动机壳体承载能力的概率特征必须考虑到诸如制造和构造材料强度性质方面的工艺偏差量，也应预见到在生产和使用过程中可能会出现不明显的构造缺陷。可以通

过试验室试车或试车台试车来确定固体推进剂装药和热防护层的大部分概率特征，以及能表征发动机壳体、喷管组件、推力向量控制系统和点火装置工作条件的大部分参数。

为了使方法简便，可将随时间变化的系数 $k_i(t)$ 计算为 $k_i(\bar{e})$，其中 $\bar{e}=e/e_0$ 为装药燃去肉厚的无因次厚度。在计算过程中（在发动机工作时间的函数中），选择系数 k_i 的极小值 $k_i=k_{i_{\min}}$，此值在以后看作相应于工作能力条件的积分统计变量。系数 k_i 的极小值的统计总体（样本）形成的特点是，在一般情况下，系数 k_i 对应于不同的时间瞬间，因此属于不同离散的全部总体，并需要仔细分析概率安全系数 k_i 的分布规律。

如果假设系数 k_i 符合正态分布规律，则统计模拟法的问题归结为确定积分统计变量 k_i 的数学预期值和均方偏差 σ_{ki}，而这里的 k_i 可确定对应于工作能力条件下的概率特征。在这种情况下，实现固体火箭发动机可靠性结构方案中元件工作能力条件的概率可确定为

$$P_{ij}=\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{k_{ij}-1}{\sigma_{kij}\sqrt{2}}\right)\right] \tag{1.17}$$

式中 $i=(1,2,\cdots,m)$；$j=(1,2,\cdots,n)$；m——所采用的工作能力条件数；n——发动机数；

$$\Phi(h)=2\pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{h}\exp(-x/2)^2dx \tag{1.18}$$

上式为拉普拉斯函数（概率积分）。

发动机可靠性结构方案中第 j 个元件的工作能力计算函数。根据独立事件概率相乘原理可确定为

$$P_j=\prod_{i=1}^{m}P_{ij}$$

在一般情况下，不能忽略不同元件同时发生故障的概率，这是因为这些元件的工作能力函数中出现共同的自变量，实际上这些自变量经常是互相关连的。假如认为工作能力条件间的相关系数为正号，则由于没有考虑到各个工作能力条件间的相关性而产生的误差在 P_i 增加的一方发生。

上述固体火箭发动机基本元件工作能力条件的计算，是通过对描述固体火箭发动机室内过程及以下各参数随时间变化的方程组的积分进行的。这些参数有热防护层带走速度、变形、固体推进剂装药中的法向和切向应力。

固体火箭发动机整体的设计可靠性由其主要分系统的工作能力保证条件所决定。主要分系统有：壳体、热防护层、固体推进剂装药等。

1.2.3 成本准则

发动机元件的成本在很大程度上决定于发动机各种零部件的生产量、掌握的品级和生产过程的调度。制造发动机的费用原则上可利用扩展计算法来估算工厂成本费。例如：按预计的成本核算来计价（预算-财政计算）；以确定某一成本核算项目的耗费作为基础来计价；按新产品各单个元件的成本来计价；以相对基本成本系数为基础来计价。

可按下式决定发动机的成本：

$$C_{дв}=A\sum_{i=1}^{n_1} q_{ki}^{\alpha_i}\,\overline{C}_{кi}+B\sum_{i=1}^{n_2}\omega_{зi}^{\beta_i}\,\overline{C}_{зi} \qquad (1.19)$$

式中 q_{ki}——发动机构造元件的质量；$\omega_{зi}$——装药元件质量；$\overline{C}_{кi}$——发动机结构元件的相对成本；n_1、n_2——分别为发动机和装药的元件（部件）数；A、B、α_i、β_i——按相关性分析结果确定的统计系数。

固体推进剂装药的相对成本决定于推进剂牌号、装药类型、装药制造工艺和发动机装备工艺、生产量和其它因素，并可用下式确定：

$$\overline{C}_{з}=\alpha_{пр1i}\sum_{j=1}^{m_1}\overline{C}_{зij}q_{зij}+\alpha_{пр2i}\sum_{j=1}^{m_2}\overline{C}_{бpij}q_{бpij} \quad (1.20)$$

式中 $\overline{C}_{зij}$、$\overline{C}_{бpij}$——分别为固体推进剂和包覆层的第 i 组元中第 j 个成分的相对成本；$q_{зij}$、$q_{бpij}$——分别为固体推进剂装药和包覆层的第 i 组元中第 j 个成分的质量分数；$\alpha_{пр1i}$、$\alpha_{пр2i}$——考虑生产量（单件、成批、大量）的系数；m_1、m_2——确定装药第 i 个组元总成本的成分数。

发动机（部件）结构的相对成本为

$$\bar{q}_{кi}=\alpha_{прi}\sum_{j=1}^{n}\overline{C}_{кi}g_{кij} \quad (1.21)$$

其中 $\overline{C}_{кi}$——发动机中第 i 个结构元件（部件）的第 j 个零件的相对成本；$q_{кij}$——发动机中第 i 个元件（部件）的第 j 个零件的质量分数；$\alpha_{прi}$——考虑生产量的系数；n——确定发动机总成本的发动机元件（部件）的零件数。

按上述关系式所进行的计算，能说明成本随发动机特性变化的规律，并能按最小经济耗费来选择发动机的最佳参数。

1.3 发动机装置优化的数学方法

发动机装置的优化问题只能用数值计算方法才能求得其精度可满足实际需要的解。这是因为确定质量特性、能量特性、几何特性和固体火箭发动机其它特性的关系式并不是以解析的形式加以积分的。此外，对于参数本身和某些函数都施加有一系列重要的约束。

对于变量数目很多的、带有非序列方案矩阵和在全部可行解中搜索的问题，可以按照变量试探方法的不同，将数值计算方法有条件地分为两组：

基于系统状态的可调试探——调优法；

利用随机选择——随机非决策法。

调优法属于搜索的决策方法，然而在选择初始点以及选择作为确定搜索逻辑和算法收敛性的起始数据和系数时，在这种方法中也存在有随机元素。

随机法属于解决多参量问题的直接方法。这种方法不要求将问题全部表达为解析的形式，也不要求函数本身及其导数的连续性，而能在大量优化参数和不同约束的情况下得到问题的解。

现在无论是调优数值计算法，还是随机法，都被用来解决优化方面的各种问题。

为了解释清楚，下面以简要的形式来说明调优法和随机法中的几种优化数值计算方法的实质。

单纯形选择法是为了在可能的相对极点中断定绝对（主要）点，所以对于在不同变量可行值（组合）的情况下所获得的函数值，进行单纯形调整试验。盲目搜索法的特点及其优点是搜索与函数的形式及特性无关。

选择网络在优化过程中有很大帮助。初始网络可以断定各个参数对所研究的函数的影响、准确地选择变量的增值、建立搜索边界。选择网络的电子计算机计算程序是复杂循环的一个典型例子，并可以编制得非常紧凑。

这种方法的应用受到如下限制：第一受到必须大量花费计算机时间的限制，其次受到难于找出变量的最佳组合的限制。在变量数目很多，以及变量与极点函数有复杂关系的情

况下，机时的耗费可能会成为使用网络的决定性障碍。然而，如能进行仔细分析，明确哪些是必需的、最少数目的变量参数，以及这些参数对函数值的不同影响程度，就会使这个方法的有效利用成为可能。

在函数只有一个优化参数的情况下，绝对极点的盲目搜索法变得特别有效。

梯度法属于多变量函数极点的连续局部搜索法。梯度法可用来找出对应于给定函数具有最小值时的未知量 x_1，x_2，…，x_i。因此，对于下列形式的非线性方程组

$$F_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ i) \tag{1.22}$$

在通过相应的对于方程式 $F(x_n)$ 的变换后，其寻解过程必须归结为上述问题。例如，研究下列函数：

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i)=\sum[F_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i)]^2 \tag{1.23}$$

这个函数只当其自变量满足所有（1.22）类型的方程式时才具有最小值。梯度法能指出计算的顺序性，也即参数变化的每一循环都能使所研究的函数逼近极点。大家知道，标量函数的梯度向量朝着这个函数增加最快的方向。

利用递推公式可找到引向极点 $L(p_i)$ 的若干变量 p_i 的连续变化：

$$p_{i(j+1)}=p_{ij}-K_{\min}(\partial L/\partial p_i)$$

式中　$K_{\min}$——某正数。

偏导数 $\partial L/\partial p_i$ 总合起来可确定移动到极点的方向，而对于所有 p_i 共同的 $K_{\min}$ 数则只能确定向这一方向的移动量 $L_{\text{onт}}$，也即“沿梯度方向的步长”。在上述公式中，必须预先通过“试验步长”来逐步确定偏导数 $\partial L/\partial p_i$。试验步长是借助于变量之一的某一增量来实现的，其余变量则保持不变。

此后即可引出同时用于所有变量的沿梯度的工作步长K_{min}($\partial L/\partial p_i$)。所以，按梯度法的搜索可分为两个阶段：

在第一阶段中确定梯度分量

$$\mathrm{grad}\,L=\sum_{i=1}^{n}(\partial L/\partial p_i)\vec{n}_i$$

式中 $\vec{n}_i$——单位向量。

在第二阶段中确定相反于梯度方向上的分量。

在这种方法中，确定偏导数时精确度的检验具有特别的意义。无论是太大的步长，或者是太小的步长，都会使$\partial L/\partial p_i$的计算不稳定，使得向函数极点移动的方向可能会发生畸变。所以梯度法在原则上可认为只适用于线性优化函数的一种线性方法，这种方法使移动沿着相反于梯度的方向进行。

梯度法的突出特点是精度较高，但当有约束时，应用这种方法就有困难。

同时优化法利用梯度法按所有变量同时优化的这一固有性质，但是又不与计算偏导数的过程联系起来。这个方法的本质是在选取变量p_i的某一些初始值时，顺序地按照每一个p_i进行，而保持其余的变量不变，这样来计算和存储所研究函数在对应Δp_i时的增量（可行增量）ΔL。正的增量ΔL表示极大值L在右边；负的增量表示极大值L在左边。按下式确定新点的坐标：

$$p_{i(j+1)}=p_{ij}\pm\Delta p_i$$

（向L_{max}移动时，符号的选取可对应于ΔL_{ij}的符号），并用新坐标对函数L进行重新计算（若检验结果超出约束条件）。对于某些个别变量p_i来说，在向极大值L运动的同时会达到“当地的”极大值L_i，此时，这些变量就开始在自己的近