数学故事丛书

# 变量中的常量

## ——函数的故事

张 远 南

上海科学普及出版社

（沪）新登字第 305 号

责任编辑　毕淑敏

变量中的常量
——函数的故事
张　远　南
上海科学普及出版社出版
（上海曹杨路 500 号　邮政编码 200063）

新华书店上海发行所发行　　常熟高专印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 4.25　插页 2　字数 101000
1990 年 4 月第 1 版　　1996 年 4 月第 4 次印刷
印数 100801—123800

ISBN　7-5427-0199-1/O·8　　定价：4.50 元

# 内 容 提 要

本书系数学故事丛书中的一册。全书由24篇生动有趣的小故事组成。介绍了函数的概念和函数在日常生活中的应用，寓数学知识于趣味之中。主要目的是为提高中学生学习数学的兴趣，加深和扩展中学数学课堂知识。

本书可供中学生、中学数学教师以及广大数学爱好者阅读。

# 序

函数是中学数学最为重要的概念之一。函数概念的出现，是人类思维从静飞跃到动的必然。当人们试图描述一个运动和变化的世界的时候，导入变量和因变量是极为自然的！

然而，今天的函数的含义与三百年前是大不相同的。公元1692年，莱布尼兹使用“函数”(function)这个词时，所表示的仅仅是“幂”、“坐标”、“切线长”等与曲线上点有关的几何量。而到十八世纪，这一概念已扩展为“由变量和常量所组成的解析表示式”。到十九世纪，解析式的限制被取消，并为对应关系所替代。函数概念的几度扩张，反映了近代数学的迅速发展。

关于函数的理论，是数学王国一座金碧辉煌的城堡，这本书既不打算也不可能对此作详尽的介绍。作者的目的只是希望激起读者的兴趣，并由此引起他们自觉学习这一知识的欲望。因为作者认定：兴趣是最好的老师，一个人对科学的热爱和献身往往是从兴趣开始。然而人类智慧的传递，是一项高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，又从用到创造，这是一连串极为能动的过程。作者在长期实践中，有感于普通教学的局限和不足，希望能通过非教学的手段，实现人类智慧接力棒的传

递。

基于上述目的，作者计划尽自己的力量，写一套各自独立的趣味数学读物。它们是：《偶然中的必然》、《未知中的已知》、《否定中的肯定》、《无限中的有限》、《变量中的常量》、《抽象中的形象》等。分别讲述概率、方程、逻辑、极限、函数、图形等故事。作者心目中的读者，是广大的中学生和数学爱好者，他们是衡量本书最为精确的天平。

由于作者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者不吝指出。

但愿本书能为读者开拓视野，探求未来，充当引导！

张远南

1987 年 4 月

# 再版前言

数学教育在文化教育中所占比例相当大，它不仅是数学知识与方法的传授，也是思维能力与思想方法的训练。对于青少年学生，开发智力的途径是多方面的，数学训练却是一种不可替代的特殊的思维训练。当前，科学的数学化浪潮正席卷着自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，数学作为科学技术的语言和思想的工具，越来越被科学家所重视。古代的科学家伽俐略说，大自然的书是数学写成的。现在人们普遍认为：科学的本质是数学。

数学充满了辩证法，正数与负数，常量与变量，数与形，微分与积分，直观与抽象，有限与无限，分析与综合，等等，都是客观世界矛盾运动与数量空间形式上的反映。解数学应用题的过程，是将实际问题转化为数学问题，又用数学方法解决实际问题的过程。

数学是一门优美的科学，从形式到内容，从理论到实践，都体现着美的特征，展现着独特的风格。一位伟人曾赞美是一首数学的诗。数学具有形态美，和谐、整洁、对称、有序；思维美，思路清晰、多向传导、构思巧妙；作用美，数学是人类最高超的智力成就，人类心灵最独特的创作；历史美，每一个重要公式、定理，每一个重要方法，都

隐载着一个美好的历史故事。若说音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌可以动人心弦，科学可以改善物质生活，则数学可以提供以上的一切。

福建省南平市教师进修学校校长、特级教师张远南编著的《数学故事丛书》，以引人入胜的故事把学生导入数学乐园，是青少年启迪智慧灵感、步入科学殿堂的好伙伴。

南平地处建溪与剑溪汇合处，两溪在这里汇流成闽江向东注入东海。当地志书说："南平自晋雷焕之携剑成龙，从此剑州、镡州名播海内"。传说晋焕之得二剑于丰城，一与张华，留一自佩。华死，失剑所在。其后焕子佩剑经此，跃入水，化为龙，剑溪由此得名，又曰剑津。据地方志记载，南剑州（今南平市）在天圣三年（1025 年）就以官办的形式创办剑学，设置学田，以助学子。该地"遥望双溪入海，仰观九迭摩云"。现尚存宋碑《南剑州重建州学记碑文》立于现南平第二中学校园内。这样算起来，南平二中有九百六十多年的办学历史了。张远南曾长期在该校执教数学。运笔得山川之灵秀，可谓山美水美书也美了。

**马长冰**

一九九一年三月于福州

# 目 录

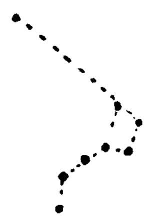
# 1.

## 一个永恒运动的世界

我们这个星球，宛如飘浮在浩瀚宇宙中的一方岛屿，从茫茫中来，又向茫茫中去。生息在这一星球上的生命，经历了数亿年的繁衍和进化，终于在创世纪的今天，造就了人类的高度智慧和文明。

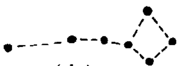
然而，尽管人类已经有着如此之多的发现，但仍不知道我们周围的宇宙是怎样开始的，也不知道它将怎样终结！万物都在时间长河中流淌着，变化着。从过去变化到现在，又从现在变化到将来。静止是暂时的，运动却是永恒！

天地之间，大概再没有什么能比闪烁在天空中的星星，更能引起远古人的遐想。他们想象在天庭上应该有一个如同人世间那般繁华的街市。而那些本身发着亮光的星宿，则忠诚地守护在天宫的特定位置，永恒不动。后来，这些星星便区别于月亮和行星，称之为恒星。其实，恒星的称呼是不确切的，只是由于它离我们太远了，以致于它们间的任何运动，都慢得使人一辈子感觉不出来！

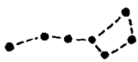


北斗七星，大约是北天最为明显的星座之一。在天文学上有个正式的

名字叫大熊星座。大熊星座的七颗亮星，组成一把勺子的样子（见上页图），勺底两星的连线延长约5倍处，可寻找到北极星。在北天的夜空是很容易辨认的。



（1）



（2）

（3）

大概所有的人一辈子见到的北斗七星，总是如同上页图那般形状，这是不言而喻的。人的生命太短暂了！几十年的时光，对于天文数字般的岁月，是几乎可以忽略不计的！然而有幸的是：现代科学的进展，使我们有可能从容地追溯过去和精确地预测将来。左图的（1）、（2）、（3）是经过测算，人类在十万年前、现在和十万年后应该看到和可以看到的北斗七星，它们的形状是大不一样的！

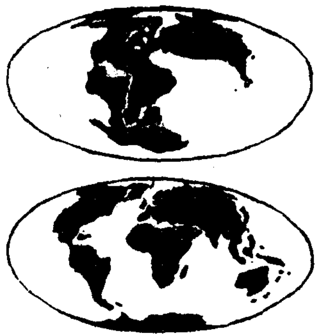
不仅天在动，而且地也在动。火山的喷发，地层的断裂，冰川的推移，泥石的奔流，这一切都还只是局部的现象。更加不可思议的是：我们脚下站立着的大地，也如同水面上的船只那样，在地幔上缓慢地漂移着！

本世纪初，德国年青的气象学家魏根纳（Wegener，1880～1930）发现：大西洋两岸，特别是非洲和南美洲，海岸轮廓非常相似。这其间究竟隐含着什么奥秘呢？魏根纳为此而深深思索着。

一天，魏根纳正在书房看报，一个偶然的变故，激发了他的灵感。由于座椅年久失修，某个接头突然断裂，魏的身体骤然间向后仰去，持在手中的报纸被猛然撕裂。在这一切

过去之后，当魏根纳重新注视手上的两半报纸时，顿时醒悟了！长期萦回在脑中的思绪跟眼前的现象，碰撞出智慧的火花！一个伟大的思想在魏根纳的脑中闪现了：世界的大陆原本是连在一起的，后来由于某种原因而破裂分离了！

此后，魏根纳奔波于大西洋两岸，为自己的理论寻找证据。公元 1912 年，“大陆漂移说”终于诞生了！



今天，大陆漂移学说已为整个世界所公认。据美国宇航局的最新测定表明，目前大陆移动仍在持续：如北美正以每年 1.52 厘米的速度远离欧洲而去；而澳大利亚却以每年 6.858 厘米的速度，向夏威夷群岛飘来！

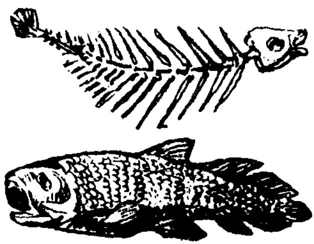
世间万物都在变化，“不变”反而使人充满着疑惑，下面的故事是再生动也不过了。

公元 1938 年 12 月 22 日，在非洲的科摩罗群岛附近，渔民们捕捉到一条怪鱼。这条鱼全身披着六角形的鳞片，长着四只“肉足”，尾巴就像古代勇士用的长矛。当时渔民们对此并不在意，因为每天从海里网上来的奇形怪状的生物多的是！于是这条鱼便顺理成章地成了美味佳肴。

话说当地博物馆有个年轻的女管理员叫拉蒂迈，此人平时热心于鱼类学研究。当她听到消息闻讯赶来的时候，见到的已是一堆残皮剩骨。不过，出于职业的爱好，拉蒂迈小姐还是把鱼的头骨收集了起来，寄给当时的鱼类学权威，南非罗兹大学的史密斯教授。

教授接信后，顿时目瞪口呆。原来这种长着矛尾的鱼，早在七千万年前就已绝种了。科学家们过去只是在化石中见到

过。眼前发生的一切，使教授由惊震转为打一个大大的问号。于是不惜定下十万元重金，悬赏捕捉第二条矛尾鱼！



时间一年又一年地过去，不知不觉过了十四个年头。正当史密斯博士抱恨绝望之际，公元 1952 年 12 月 20 日，教授突然收到了一封电报，电文是："捉到了您所需要的鱼。"史密斯见电欣喜若狂，立即乘飞机赶往当地。当教授用颤抖的双手打开鱼布包时，一股热泪夺眶而出……

那么，为什么一条矛尾鱼竟会引起这样大的轰动呢？原来现在捉到的矛尾鱼和七千万年前的化石相比，几乎看不到变异！矛尾鱼在经历了亿万年的沧桑之后，竟然既没有灭绝，也没有进化。这一"不变"的迷惑，无疑是对"变"的进化论的挑战！究竟是达尔文的理论需要修正呢，还是由于其他更加深刻的原因？争论至今仍在继续！

我们前面讲过，这个世界的一切量，都跟随着时间的变化而变化。时间是最原始的自行变化的量，其他量则是因变量。一般地说，如果在某一变化过程中有两个变量 x，y，对于变量 x 在研究范围内的每一个确定的值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么变量 x 就称为自变量，而变量 y 则称为因变量，或变量 x 的函数，记为：

$$y=f(x)$$

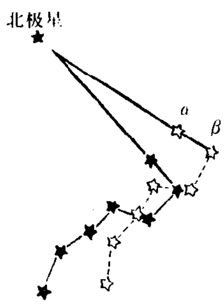
函数一语，起用于公元 1692 年，最早见自德国数学家莱布尼兹的著作。记号 f(x) 则是由瑞士数学家欧拉于公元 1724 年首次使用的。上面我们所讲的函数定义，属于德国数学家黎曼（Riemann，1826～1866）。我国引进函数概念，始于 1859

年，首见于清代数学家李善兰（1811～1882）的译作。

Riemann

（1826～1866）

一个量如果在所研究的问题中保持同一确定的数值，这样的量我们称为常量。常量并不是绝对的。如果某一变量在局部时空中，其变化是那样地微不足道，那么这样的量，在这一时空中便可以看成常量。例如读者所熟知的“三角形内角和为 180°”的定理，那只是在平面上才成立的。但绝对平的面是不存在的。即使是水平面，由于地心引力的关系，也是呈球面弯曲的。然而，这丝毫没有影响广大读者，去掌握和应用平几的这条定理！又如北斗七星，诚如前面所说，它前十万年与后十万年的位置是大不相同的。但在近几个世纪内，我们完全可以把它看成是恒定的，甚至可以利用它来精确地判定其他星体的位置！




左图中 α、β 是北斗七星中极亮的两颗星。沿 βα 方向延长到原来的 5 倍，那里有一颗稍微暗一点的星，那就是北天群星都绕它旋转的北极星！尽管这些星体的相对位置也在改变，但上述的位置法则，至少还可以延用几百年！

# 2.

## “守株待兔”古今辩

有一则寓意深刻的故事叫《守株待兔》，大意是：

宋国有个农民，有一天，他在地里耕作，看到一只兔子从身旁飞跑而过，恰好撞在地边的一棵大树上，折断了颈项，死于树下。那个农民不费吹灰之力，拾得了一只现成的兔子。

这个农民自从拾到兔子之后，就想入非非，从此废弃耕耘，每天坐在那棵大树底下，等待着又一只兔子撞树而来。结果非但没有再拾到兔子，反而把田地给荒芜了！

这则寓言，出自先秦著作《韩非子》，脍炙人口，已经流传了二千二百多年。

两千年来，人们总以为“待兔”不得，罪在“守株”！其实，抱怨“守株”是没有道理的。问题的关键在于兔子的运动规律。倘若通往大树的路是兔子所必经的，那么“守株”又将何妨？

Leonardo da Vinci

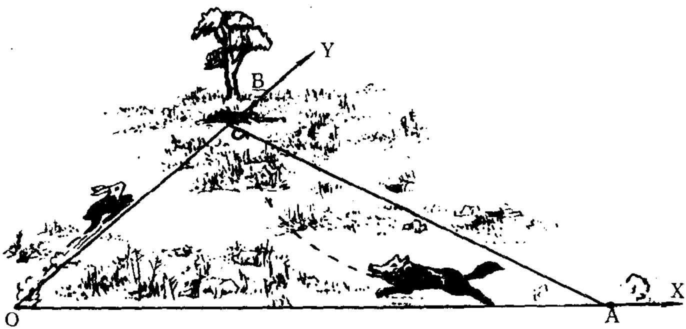
(1452～1519)

然而正如上节故事中我们讲到的，我们周围的世界是一个不断运动的世界。兔子的活动，在时空的长河中，划出一条千奇百怪的轨迹，希望这条轨迹能与树木在时空中的轨线再次相交，无疑是极为渺茫的，这正是这位农人悲剧之所在！

下面一则更为精妙的例子，可以使人

们生动地看到问题的症结。例中表明如能弄清了兔子运动的规律，有时“守”甚至还是明智的！

列奥纳多·达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452～1519）是意大利文艺复兴时期的艺术大师，他那传闻很广的《画蛋》故事，对于青少年读者，可说是很熟悉的。达·芬奇不仅对绘画艺术造诣极深，而且对数学也颇有研究。他曾提出过一个饶有趣味的“饿狼扑兔”问题：




一只兔子正在洞穴（c）南面 60 码的地方（o）觅食，一只饿狼此刻正在兔子正东 100 码的地方（A）游荡。兔子回首间猛然遇见了饿狼的贪婪的目光，预感大难临头，于是急忙向自己的洞穴奔去。说时迟，那时快，恶狼见即将到口的美食就要失落，旋即以一倍于兔子的速度紧盯着兔子追去。于是，狼与兔之间，展开了一场生与死惊心动魄的追逐。

问：兔子能否逃脱厄运？

有人作过以下一番计算：

以 O 为原点，OA，OC 分别为 X，Y 轴，以 1 码为单位长。则 OA＝100，OC＝60。根据勾股定理，在 Rt△AOC 中

$$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{100^2+60^2}=116.6$$