卢同善 编 著

# 随机泛函分析及应用

青岛海洋大学出版社

# 随机泛函分析及应用

卢同善 编著

青岛海洋大学出版社

## 内 容 简 介

“随机泛函分析”是由概率论和泛函分析相结合而产生的一门新的边缘学科。它是通过对广义随机变量、随机算子、随机算子方程、随机不动点理论和随机积分方程等课题的研究而建立起一个新的理论体系，为各种随机方程提供了坚实的理论基础和有力的工具，并且在不少工程技术学科中都得到了应用。

本书简明而系统地介绍了随机泛函分析的理论、方法和应用，可作为数学和应用数学专业高年级学生和研究生的教材，也可供从事泛函分析，概率论和各类随机方程研究工作的教师、科技人员参考。

随 机 泛 函 分 析 及 应 用

卢同善　编著

青岛海洋大学出版社出版

（青岛市鱼山路5号）

新华书店发行

泰安师专印刷厂印刷

*

1990年9月第1版　　1990年9月第1次印刷

32开（850×1168毫米）　6.375印张　168千字

印数 1—2500

ISBN　7-81026-034-0/O·4

定价：1.80元

# 前　言

“随机泛函分析”是概率论和泛函分析之间的一门边缘学科．它是一门新的数学学科，在1947年，*Fréchet*开始提出了研究在一般拓扑空间中取值的随机变量的必要性，*Mourier*在1953年及*Hanš*在1956年对其值在*Banach*空间中的随机变量进行了系统的研究，才正式提出“随机泛函分析”的名称。正如王梓坤先生在1962年所指出的[1]，“随机泛函分析”的产生有两方面的原因：一是由于概率论研究对象的日益扩大。经典概率论主要研究数值的随机变量，这已远不能满足近年来其它学科和技术发展的需要，这些学科和技术要求研究更一般的随机变量，如随机的曲线，连续函数，可积函数等，这些元素已不再是实数和复数了．换句话说，科学和技术的发展，要求人们研究取值于抽象空间的随机变量，这已进入了泛函分析的领域。二是由于实际问题中，不断提出随机方程。正如泛函分析的一般算子理论被作为研究（确定性）方程的理论基础和工具一样，随机方程的研究，即要求人们建立一般的随机算子理论，作为研究各种随机方程的理论基础和工具。近年来，随机泛函分析这一学科得到了较快的发展，特别是其中的“随机不动点理论”和“随机积分方程”理论。“随机不动点理论”被创立以后，立即成为研究各种随机方程的有力工具。而“随机积分方程”理论已经在许多科学技术领域，如力学、电话通讯理论、生物种群的增殖理论、化学反应动力学和随机控制系统中得到了应用。

在我国，王梓坤先生于 1962 年首先向国内介绍了这一学科[1]。近年来，张石生、丁协平等学者在这一学科的研究方面作

了大量工作，取得了丰富的、很有价值的成果。

我国目前尚未见到较系统地介绍随机泛函分析这一学科的专著或教材，故在本人1984年所编写的选修课讲义的基础上，修订编写了这本教材。本书以不长的篇幅，较系统地阐述了随机泛函分析这一学科的基础、理论、方法和应用。在本书的引论部分，较详细地介绍了学习本书所必备的测度理论和积分理论。特别是，随机泛函分析以向量值函数的可测性和积分理论为基础，所以本书较详细地阐述了这一内容，为阅读本书做好较充分的准备。本书包括了随机泛函分析的基础部分，即广义随机变量、随机算子理论和随机方程理论(前三章)。本书也扼要地介绍了近年来蓬勃发展的随机不动点理论（第四章）。作为随机泛函分析基本理论的应用，本书简明地介绍了线性和非线性的随机积分方程理论以及在某些具体应用领域中的应用（第五章和第六章）。因篇幅所限，本书未包括近年来发展迅速的概率度量空间理论。本书的目的是作为学习随机泛函分析的教材，因而在力求取材先进、论述严谨、精练的同时，也力求在阐述方式上，层次分明，逻辑推理清晰，易于接受。本书不少内容取自近年来国内外发表的论文，对有的内容做了简化，对其中的错误做了修正。

阅读本书，只需泛函分析，概率论和随机过程的基础知识。

本书可作为数学专业和应用数学专业高年级学生和研究生的教材，也可作为从事泛函分析、概率论和各类随机方程研究工作的教师和科技工作者的参考书。

在本书即将出版之时，我要感谢张石生教授对我编写此书所给予的鼓励和指导。

限于本人水平，本书定有不少缺点和错误。恳请专家和读者给予批评指正

卢同善

1990.8.

# 目　　录

# 引论　向量值函数的可测性与积分

## §0.1　拓扑空间与连续映照

以下均设$X$为一非空集合。

**定义0.1.1**　称$X$的某些子集所组成的集类$\tau$，为$X$中的一个拓扑，如果$\tau$满足：

(i)　$\varnothing\in\tau$，$X\in\tau$($\varnothing$表示空集)；

(ii)　若$V_i\in\tau$，$i=1,2,\cdots n$，则$\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_i\in\tau$；

(iii)　若$V_\lambda\in\tau$，$\lambda\in\Lambda$，($\Lambda$为任一号标集，有限、可数、或不可数)则$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda\in\tau$。

若$\tau$为$X$中的一个拓扑，则称$X$为一拓扑空间，记为$(X,\tau)$，简记为$X$。$\tau$中的元素(均为$X$的子集)称之为$X$中之开集。

**例1**　设$(X,\rho)$为一度量空间，$\tau$为$(X,\rho)$中所有开集之全体，则易知，$(X,\tau)$为一拓扑空间。故任何度量空间均为拓扑空间。此时，称$\tau$为由距离$\rho$所导出的拓扑。以后若不特别说明，当说到度量空间$(X,\rho)$是一拓扑空间时，其拓扑均为由距离$\rho$所导出的拓扑。

**例2**　取$\tau_1=\{X,\varnothing\}$。则$(X,\tau_1)$为一拓扑空间，称之为平凡的拓扑空间，称$\tau_1$为平凡拓扑。

**例3**　取$\tau_2=\{A,A\subseteq X\}$，即$\tau_2$为$X$的一切子集之全体，则$(X,\tau_2)$成一拓扑空间，称之为离散的拓扑空间，称$\tau_3$为离散拓扑。

以下均设$(X,\tau)$为一拓扑空间。

**定义0.1.2** 设$x\in X$，则包含$x$的任一开集，均称之为$x$的一个邻域，记之为$O(x)$。

**定义0.1.3** 设点列$\{x_n\}\subseteq X$，$x_o\in X$。如果对于$x_0$的每一邻域$O(x_o)$，均存在一自然数$N$，使当$n>N$时，有$x_n\in O(x_o)$，则称$x_o$为点列$\{x_n\}$的极限，或称点列$\{x_n\}$收敛于$x_o$，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0\text{或}x_n\to x_o。$$

**定义0.1.4** 设$X$和$Y$均为拓扑空间，$f: X\to Y$为由$X$到$Y$的映照，$x_o\in X$。如果对于$f(x_o)$的任一邻域$O(f(x_o))$，均存在$x_o$的一个邻域$O(x_o)$，使得 $f(O(x_o))\subseteq O(f(x_o))$，则称映照$f$在$x_o$处连续。

若$f$在$X$的每一点处均连续，则称$f$在$X$上连续。

**定理0.1.1** 设$X$和$Y$均为拓扑空间，则映照$f: X\to Y$在$X$上连续之充要条件为，对$Y$中之任一开集$V$，其原象$f^{-1}(V)$均为$X$中之开集。

**证明** 先证明必要性。假设$f$在$X$上连续，$V$为$Y$中之任一开集，下面证明，其原象$f^{-1}(V)$为$X$中之开集。$\forall x\in f^{-1}(V)$，则$f(x)\in V$，即$V$为$f(x)$之一邻域。因$f$在$x$处连续，故$\exists O(x_o)$，使$f(O(x))\subseteq V$，从而有$O(x)\subseteq f^{-1}(V)$，显然

$$\bigcup_{x\in f^{-}(V)} O(x)=f^{-1}(V),$$

故$f^{-1}(V)$为一开集。必要性得证。

现证充分性。设$f$满足：对$Y$中之任意开集$V$，$f^{-1}(V)$均为$X$中之开集，$\forall x_0\in X$，下面证明，$f$在$x_c$处连续。$\forall O(f(x_o))$，则$f^{-1}(O(f(x_o)))$为$X$中之开集，且包含$x_o$，即为$x_o$的一个领域，且

$$f(f^{-1}(O(f(x_o)))\subseteq O(f(x_o)),$$

故$f$在$x_o$处连续。充分性得证。

# §0.2　抽象测度与抽象积分

## 一、可测空间与可测映照

**定义0.2.1**　称$X$的某些子集所组成的集类**A**为$X$中的一个$\sigma$-代数，如果**A**满足：

(i)　$X\in \mathbf{A}$；

(ii)　若$A\in \mathbf{A}$，$B\in \mathbf{A}$，则$A-B\in \mathbf{A}$；

(iii)　若$A_i\in \mathbf{A}, i=1,2,\cdots$，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in \mathbf{A}$。

若**A**是$X$中的一个$\sigma$-代数，则称$X$为一可测空间，记为$(X,\mathbf{A})$，简记为$X$。**A**中的元素（均为$X$的子集）称之为$X$中的可测集。

**例1**　设$X$为$n$维欧氏空间$R^n$，则易知，$R^n$中Lebesgue可测集之全体$L$即为$R^n$中的一个$\sigma$-代数，即$(R^n,\mathrm{L})$为一可测空间。

**例2**　取$\mathbf{A}=\{A, A\subseteq X\}$，即$X$的一切子集之全体，则**A**为一$\sigma$-代数，$(X,\mathbf{A})$为一可测空间。

**定理0.2.1**　设**A**是$X$中的一个$\sigma$-代数，则：

(i)　$\varnothing\in \mathbf{A}$；

(ii)　若$A_i\in \mathbf{A}$，$i=1,2,\cdots n$，则$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in \mathbf{A}$，即**A**对有限并运算封闭；

(iii)　若$A_i\in \mathbf{A}$，$i=1,2,\cdots$，则$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in \mathbf{A}$，即**A**对可列交（或有限交）运算封闭；

(iv)　若$A\in \mathbf{A}$，则$A$的余集$C(A)\in \mathbf{A}$。（证明略）

**定理0.2.2**　设**F**是$X$的一个集类，则必存在一个$\sigma$-代数$\mathbf{A}^*$，它是包含**F**的最小的$\sigma$-代数（所谓“最小”，即$\mathbf{A}^*$含于包含

F的任何$\sigma$-代数中）。该A*称之为由F所张成的$\sigma$-代数。

**证明** 设$\Omega$为$X$中包含F的$\sigma$-代数的全体。因为$X$的所有子集全体即为一个包含F的$\sigma$-代数，故$\Omega$非空。令A*为$\Omega$中所有$\sigma$-代数之交，则：

(i) A*$\supseteq$F；

(ii) A*仍是一个$\sigma$-代数；

(iii) A*含于包含F的任何$\sigma$-代数中。

故A*即为包含F的最小的$\sigma$-代数。

**定义0.2.2** 设$X$是一可测空间，$Y$是一拓扑空间，若映照$f:X\to Y$满足：对$Y$中之任一开集$V$，其原象$f^{-1}(V)$均为$X$中之可测集，则称$f$为由$X$到$Y$的可测映照。

**定理0.2.3** 设$X,Y$和$Z$均为拓扑空间，$f:X\to Y$及$g:Y\to Z$均为连续映照，设其复合映照为$h=g\circ h$，则$h:X\to Z$也是连续映照。

**定理0.2.4** 设$X$为可测空间，$Y$、$Z$均为拓扑空间，$f:X\to Y$为可测映照，$g:Y\to Z$为连续映照，设其复合映照为$h=g\circ h$，则$h:X\to Z$为可测映照。

以上两定理由读者自证。

**二、Borel集与Borel可测空间**

**定义0.2.3** 设（$X,\tau$）是一拓扑空间，则称由拓扑$\tau$所张成的$\sigma$-代数B为Borel集类，该集类中的成员（均为$X$的子集）称之为Borel集，称可测空间（$X$,B）为Borel可测空间。Borel可测空间（$X$,B）上的可测映照，称之为Borel可测映照，简称为Borel映照或Borel函数。

由此定义，易知，以下两定理成立。

**定理0.2.5** Borel可测空间($X$, B)中，一切开集、闭集、$F\sigma$型集(闭集之可数并)以及$G_\sigma$型集(开集之可数交)均为可测集。

**定理0.2.6** 在Borel可测空间（$X$,B）上的连续映照均为

可测映照。

以下结论由读者自证。

设$\mathbf{A}$是$X$中的一个$\sigma$-代数，$(Y,\tau)$为一拓扑空间，$f:X\to Y$，则以下四结论成立：

(a) 若$\Omega=\{E;E\subseteq Y$且$f^{-1}(E)\in\mathbf{A}\}$，则$\Omega$为$Y$中的一个$\sigma$-代数。

(b) 设$f$是一可测映照，$E$是$Y$中的Borel集，则$f^{-1}(E)\in\mathbf{A}$。因而可得：映照$f:X\to Y$可测$\Longleftrightarrow Y$中之任何Borel集的原象均可测。

(c) 设$f$为一可测映照，又设$Z$为一拓扑空间，$g:Y\to Z$是一Borel映照，$h=g\circ f$为$g$与$f$的复合映照，则$h:X\to Z$为一可测映照。

(d) 设$Y=(-\infty,+\infty)$且对任何实数$\alpha$，$f^{-1}((\alpha,+\infty))$均可测，则$f$为一可测映照。

**三、测度与测度空间**

**定义0.2.4** 设$(X,\mathbf{A})$为一可测空间，$\mu$是$\mathbf{A}$上的一个集函数，满足：

1° $\mu(\varnothing)=0$；

2° 非负性：$\mu(A)\geqslant 0$，$A\in\mathbf{A}$；

3° 可列可加性：设$A_i\in\mathbf{A}$，$i=1,2,\cdots$，且$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，则有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i),$$

则称$\mu$为$\mathbf{A}$上的一个测度。

**注1** 测度$\mu$的值域为$[0,+\infty]$。

**注2** 若$\mu(A)\not\equiv+\infty$，则由2°和3°可推得1°。

事实上，取$A\in\mathbf{A}$，$\mu(A)<+\infty$，令$A_1=A,A_2=A_3=\cdots$

$=\varnothing$，则因$\varnothing$与任何集合均不相交，故由3°，即得$\mu(\varnothing)=0$。

**定理0.2.7** 设$(X,\mathbf{A})$为一可测空间，$\mu$为$\mathbf{A}$上的测度，则$\mu$满足：

(a) 有限可加性：设$A_i\in\mathbf{A}, i=1,2,\cdots n$，且$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，则有：

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)。$$

(b) 单调性：若$A\in\mathbf{A}$且$B\in\mathbf{A}, A\subseteq B$，则$\mu(A)\leqslant\mu(B)$。

(c) 次可列可加性：若$A_i\in\mathbf{A}$，$i=1,2,\cdots$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)。$$

(d) 可减性：若$A\in\mathbf{A}$且$B\in\mathbf{A}$，$A\supseteq B, \mu(B)<+\infty$，则有：

$$\mu(A-B)=\mu(A)-\mu(B)。$$

(e) 下连续性：若$A_i\in\mathbf{A}$，$i=1,2\cdots$，且$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}A_n$，则有：

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)。$$

(*f*) 上连续性：若$A_i\in\mathbf{A}$，$i=1,2,\cdots$，且$A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$，$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}A_n$，又至少存在一个$A_i$，使$\mu(A_i)<+\infty$，则有：

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)。$$

（证明从略）

**定义0.2.5** 设$(X,\mathbf{A})$为一测度空间，$\mu$为$\mathbf{A}$上的一个测度，则称$(X,\mathbf{A})$和$\mu$成一测度空间，记为$(X,\mathbf{A},\mu)$或简记为$X$。

**定义0.2.6** 设$(X,\mathbf{A},\mu)$为一测度空间，若对任何$A\in\mathbf{A}$，$A$均可表示为一串属于$\mathbf{A}$的、单调递增的、具有有限测度的集合

之并，则称$\mu$为$\sigma$-有限的测度，称$(X, \mathbf{A}, \mu)$为$\sigma$-有限的测度空间。若$\mu(X)<+\infty$，则称$(X, \mathbf{A}, \mu)$为有限测度空间。

**定义0.2.7** 设$A\in\mathbf{A}$且$\mu(A)=0$，则称$A$为$\mu$-零集。若任何$\mu$-零集的任何子集均属于$\mathbf{A}$，则称$\mu$是一完全测度，称$(X, \mathbf{A}, \mu)$为一完全测度空间。

**定义0.2.8** 设$P(x)$为一个与变元$x$有关的命题，如果使这个命题$P(x)$不正确的变元$x$的全体只是一个$\mu$-零集，则称这个命题$P$"几乎处处正确"。

如：若$\mu\{x; f(x)\neq g(x)=0\}$，则称"$f$和$g$在$X$上几乎处处相等"，记为$f\underset{\mu}{\dot{=}}g$或$f=g, a.e.$在后面各章中，"几乎处处"也用$a.s.$表示。

**四、测度空间上的可测函数列的收敛性**

设$(X, \mathbf{A}, \mu)$为一测度空间，$E\in\mathbf{A}$，$f_n(x)$，$f(x)$均为$E$上的实可测函数$(n=1,2,\cdots)$。除了象数学分析中一样的处处收敛、一致收敛概念外，如同Lebesgue可测函数一样，在抽象测度理论中也有几乎处处收敛和依测度收敛概念。

**定义0.2.9** 称$\{f_n(x)\}$几乎处处收敛于$f(x)$，如果使函数列$\{f_n(x)\}$不收敛于$f(x)$的$x$的全体为一$\mu$-零集，记为$f_n\underset{\mu}{\dot{\rightarrow}}f$，或$f_n\rightarrow f$，$a.e.$。

**定义0.2.10** 称$\{f_n(x)\}$依测度收敛于$f(x)$，如果对任何$\varepsilon>0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E(|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon))=0,$$

此时，记为$f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f$。

**定理0.2.8** 若$f_n\Rightarrow f$，则必有子列$\{f_{n_i}(x)\}$几乎处处收敛于$f$。

**定理0.2.9** 若$\mu(E)<+\infty$且$f_n\underset{\mu}{\dot{\rightarrow}}f$，则$f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f$。

（证明从略）

## 五、函数的抽象积分

本段内容参阅〔67〕。本段中假设$(X, \mathbf{A}, \mu)$为一测度空间。

**定义0.2.11** 设函数$s: X \to [0, +\infty)$具有性质：$X$可分解为有限个互不相交的可测集$A_i$，$i=1,2,\cdots,n$，之并，而在每一$A_i$上，$s$均取常数值$\alpha_i \in [0, +\infty)$，则称$s$为$X$上的简单函数。（下面均取$\alpha_i$各不相同）。

若用$\chi A_i$表示$A_i$的特征函数，则有

$$S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \chi A_i。 \tag{1}$$

**定义0.2.12** 设$s$为$X$上的由式(1)所表示的简单函数，集合$E \in \mathbf{A}$，则称

$$\int_E s d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mu(A_i \cap E) \tag{2}$$

为简单函数$s$在$E$上的Lebergue积分。

**定义0.2.13** 设$f: X \to [0, +\infty)$为一非负可测函数，集合$E \in \mathbf{A}$，令$S=\{s: s$为简单函数，$0 \leqslant s \leqslant f\}$则称

$$\int_E f d\mu=\sup_{s \in S}\int_E s d\mu$$

为函数$f$在集$E$上关于测度$\mu$的Lebesgue积分。

**定义0.2.14** 设$f: X \to R(R=(-\infty, +\infty)$为一可测函数，集合$E \in \mathbf{A}$，若

$$\int_E |f| d\mu < +\infty,$$

则称$f$是Lebesgue可积函数（关于测度$\mu$），且称

$$\int_E f d\mu=\int_E f^{+} d\mu-\int_E f^{-} d\mu \tag{3}$$

为函数$f$在集$E$上的Lebesgue积分。其中：

$$f^{+}=\max\{f, 0\}, \quad f^{-}=-\min\{f, 0\}。$$

按上述定义的抽象的Lebesgue积分具有完全可加性，积分的绝对连续性等性质及控制收敛定理，Levi定理，Fatou引理等极限定理，可参阅〔67〕等各种抽象Lebesgue积分书籍，不再赘述。

## §0.3 向量值函数及其可测性

### 一、向量值函数与算子值函数的定义

在本节及§0.4中，均设$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$为一有限测度空间，$X$、$Y$为Banach空间，$B(X\to Y)$为由$X$到$Y$的有界线性算子空间，集$(X, \mathbf{B})$为$X$上的Borel可测空间，即$\mathbf{B}$是由$X$上全体Borel集所成的$\sigma$-代数。

**定义0.3.1** 称映照$x:\Omega\to X$为由$\Omega$到Banach空间$X$的**向量值函数**。

按向量值函数之定义，对任何$\omega\in\Omega$，均有唯一的向量$x(\omega)\in X$与之对应。

**定义0.3.2** 称映照$T:\Omega\to B(X\to Y)$为由$\Omega$到有界算子空间$B(X\to Y)$的算子值函数。

按算子值函数之定义，对任何$\omega\in\Omega$，均有一算子$T(\omega)\in B(X\to Y)$与之对应。故算子值函数为向量值函数之特例。

### 二、向量值函数的收敛概念

**定义0.3.3** 设$x(\omega)$，$x_n(\omega)(n=1,2,\cdots)$均为测度空间$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$到Banach空间$X$的向量值函数。

(i) 称$\{x_n(\omega)\}$几乎一致收敛于$x(\omega)$，如果对任何$\varepsilon>0$，均存在$A_\varepsilon\in\mathbf{A}$，满足：$\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$且对任何$\delta>0$，均有正整数$n(\varepsilon,\delta)$，使得对任何$\omega\in\Omega-A_\varepsilon$及$n>n(\varepsilon,\delta)$，均有

$$\|x_n(\omega)-x(\omega)\|<\delta。$$

(ii) 称$\{x_n(\omega)\}$在$\Omega$中强几乎处处收敛于$x(\omega)$，如果存在集$A_0\in\mathbf{A}$，满足：$\mu(A_0)=0$且对任何$\omega\in\Omega-A_0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n(\omega)-x(\omega)\|=0,$$

此时，记为$x_n(\omega)\xrightarrow{强 a.e}x(\omega)$。

（iii）称$\{x_n(\omega)\}$在$\Omega$中弱几乎处处收敛于$x(\omega)$，如果存$A_0\in\mathbf{A}$，满足：$\mu(A_0)=0$且对任何$x^*\in X^*$（$X$的共轭空间）以及$\omega\in\Omega-A_0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}x^*(x_n(\omega))=x^*(x(\omega)),$$

此时，记为$x_n(\omega)\xrightarrow{弱 a.e}x(\omega)$

（iv）称$\{x_n(\omega)\}$在$\Omega$中依测度收敛于$x(\omega)$，如果对任何$\varepsilon>0$，有

$$\mu\{\omega;\ \|x_n(\omega)-x(\omega)\|>\varepsilon\}\to 0\ (当 n\to\infty 时)$$

此时，记为：$x_n(\omega)\Rightarrow x(x)$。

### 三、向量值函数的可测性

**定义0.3.4** 向量值函数$x:\Omega\to X$，称之为可测的，如果对任何集合$B\in\mathbf{B}$，均有$x^{-1}(B)\in\mathbf{A}$。即对$X$中之任何Borel集，在映照$x$之下的原象均为$\Omega$中之可测集。

注：由此定义，不难证得以下结论：向量值函数$x$可测之充要条件为：对$X$中之任何开集（或闭集）其原象均可测。

**定义0.3.5** 设$x:\Omega\to X$为一向量值函数：

(1)若$\Omega$可分解为有限个互不相交的可测集$A_i$，$i=1,2,\cdots,n$之并，且在每个$A_i$上，$x(\omega)$均取常值$x_i\in X$，则称$x$为简单函数。

(2)若$\Omega$可分解为可数个互不相交的可测集$A_i$，$i=1,2,\cdots$之并，并且在每个$A_i$上，$x(\omega)$均取常值$x_i\in X$，则称$x$为可数值函数。

注：易证，简单函数，可数值函数均为可测函数。特别，常值函数，$x(\omega)\equiv x_0$，$\forall\omega\in\Omega$，是可测函数。可数值函数与常数之积，可数值函数之和仍为可数值函数，因而都是可测的。