

1986

成人高校入学考试复习辅导用书

数学

(下)

福建省高教厅成人教育处编

福建教育出版社

成人高校入学考试辅导用书

数 学

(下册)

福建省高等教育厅成人教育处编

福建教育出版社

成人高校入学考试辅导用书
数 学(下册)

编著: 福建省教育厅
成人教育处

出版: 福建教育出版社

发行: 福建省新华书店

印刷: 福建教育出版社印刷厂

787×1092毫米 32开本 5.625印张 126千字

1985年10月第一版 1985年10月第一次印刷

书号: 7159·1056 定价: 0.84元

目 录

第三篇 立体几何

第一章 平面	(1)
一 空间图形	(1)
二 平面	(1)
第二章 空间两条直线	(6)
一 两条直线的位置关系	(6)
二 平行直线	(7)
三 两条异面直线所成的角与距离	(8)
第三章 空间直线和平面	(12)
一 直线和平面的位置关系	(12)
二 直线和平面平行	(12)
三 直线和平面垂直	(14)
四 直线和平面斜交	(17)
第四章 空间两个平面	(23)
一 两个平面的位置关系	(23)
二 两个平面平行	(23)
三 二面角	(25)
四 两个平面垂直	(27)
第五章 多面体	(32)
一 多面体	(32)
二 棱柱	(33)
三 棱锥	(36)
四 棱台	(39)
五 棱柱、棱锥、棱台的侧面积计算	(41)

六 棱柱、棱锥、棱台的体积计算	(44)
第六章 旋转体	(49)
一 旋转体	(49)
二 圆柱、圆锥、圆台	(49)
三 球	(58)

第四篇 平面解析几何

第一章 平面直角坐标系和曲线方程	(67)
一 平面直角坐标系	(67)
二 曲线与方程	(73)
第二章 直线方程	(81)
一 直线方程	(81)
二 两直线的位置关系	(88)
第三章 二次曲线	(99)
一 圆	(99)
二 椭圆	(109)
三 双曲线	(118)
四 抛物线	(125)
五 坐标轴平移	(131)
第四章 极坐标方程与参数方程	(142)
一 极坐标方程	(142)
二 参数方程	(148)

复习题

下册部分习题答案

* 第三篇 立体几何

第一章 平 面

一 空间图形

空间图形是由空间的点、线、面所构成，也可以看成是空间点的集合。

平面几何是研究平面图形(由同一平面内的点、线所构成的图形)的形状、大小和位置关系。立体几何研究的对象是空间图形，空间图形的点，不一定在同一平面内，而平面几何关于平面图形的性质，在空间的任何一个平面内都是成立的。因此，立体几何的问题，往往可以转化为平面几何问题加以研究。

二 平 面

(一) 平面及其表示法 经过一个面内任意两点的直线，如果这条直线都在这个面内，那么，这个面是平面。

平面是可以无限伸展的，通常画平行四边形来表示平面。当平面是水平放置时，可把平行四边形的锐角画成 45° ，横边画成等于邻边的两倍。当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画(如图 3—1)。这样，看起来立体感强一些。

平面通常用一个大写拉丁字母 M 或一个希腊字母 α 来表示，读作“平面 M ”或“平面 α ”。有时也用平行四边形相对两个顶点的字母来表示，读作“平面 AC ”或“平面 BD ”。

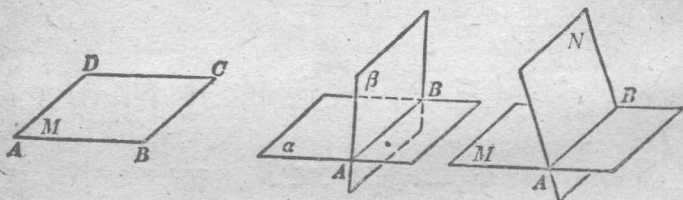


图 3-1

(二) 平面的基本性质 在生产与生活中, 人们经过长期的观察与实践, 总结出来关于平面的三个基本性质, 我们把它当作公理, 作为进一步推理的基础.

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内. 如图 3-2, 记作:

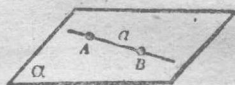


图 3-2

$$\left. \begin{array}{l} \text{点 } A, B \in \text{直线 } a \\ A, B \in \text{平面 } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha (\text{直线 } a \text{ 在平面 } \alpha \text{ 内})$$

公理 2 如果两个平面有一个公共点, 那么它们相交于过这点的一条直线, 如图 3-3, 记作:

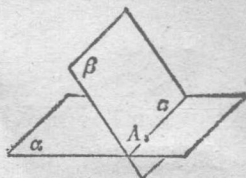


图 3-3

$$\left. \begin{array}{l} \text{点 } A \in \text{平面 } \alpha \\ \text{点 } A \in \text{平面 } \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = \text{直线 } a \\ A \in a \end{array} \right.$$

公理 3 经过不在同一直线上的三个点, 有且只有一个平面, 如图 3-4,

$$\left. \begin{array}{l} \text{记作: } a \text{ 是任意一条直线,} \\ \text{点 } A, B, C \text{ 不共属于 } a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A, B, C \in \text{平面 } \alpha, \\ \text{且 } \alpha \text{ 是唯一的.} \end{array} \right.$$

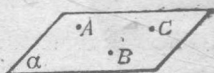


图 3-4

注: 点 A 在直线 a 外, 记作 $A \notin a$. 点 A 在平面 M 外, 记

作 $A \notin M$.

根据上述公理 3, 可以得出下面的推论:

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面.

推论 2 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.

推论 3 经过两条平行线, 有且只有一个平面.

“有”是表述存在性, “只有”是表述唯一性. “有且只有一个平面”, 我们也说“确定一个平面”, 其含义是存在并且只有唯一的一个平面.

(三) 水平放置的平面图形的直观图画法规则 在纸上画空间图形, 就是用一个平面图形来表示空间图形. 这样的平面图形不是空间图形的真实形状, 而是它的直观图. 要画空间图形的直观图, 首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法, 其画法要按下列两条规则:

1. 把图形的水平线段画成水平线段, 并且长度不变;

2. 垂直于水平线段的线段画成与水平线段成 45° (或 135°) 的倾斜线段, 并且长度变为原来的一半.

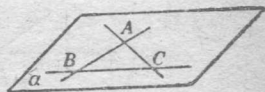


图 3-5

例 1 直线 AB 、 BC 、 CA 两两相交, 交点分别为 A 、 B 、 C (如图 3-5), 求证: 直线 AB 、 BC 、 CA 在同一平面内.

证明 $\because$ 直线 AB 和 AC 相交于点 A ,

$\therefore$ 直线 AB 和 AC 确定一个平面 α .

$\because B \in AB, C \in AC,$

$\therefore B \in \alpha, C \in \alpha.$

$\therefore BC \subset \alpha.$

因此, 直线 AB 、 BC 、 CA 都在平面 α 内, 即它们在同一

平面内.

例 2 直线 a 、 b 、 c 互相平行, 又都和直线 d 相交, 交点分别是 A 、 B 、 C , 求证: a 、 b 、 c 共面.

证明 $\because a \parallel b$,

则 a 、 b 确定一个平面, 设为 α .

$\because A \in a, a \subset \alpha$, 则 $A \in \alpha$.

$B \in b, b \subset \alpha$, 则 $B \in \alpha$.

$\therefore d \in \alpha$.

若平行线 b 、 c 所确定的平面为 β , 同理可证 $d \in \beta$. 于是相交直线 b 、 d 既同在 α 内, 又同在 β 内, 则平面 α 、 β 必须重合,

$\therefore a$ 、 b 、 c 共面于 α .

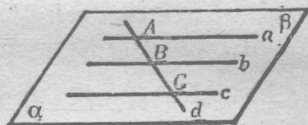


图 3-6

例 3 画水平放置的正五边形的直观图.

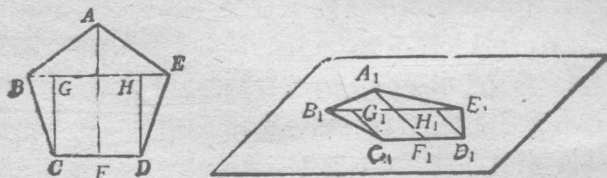


图 3-7

画法 如图 3-7.

例 4 画水平放置的平面四边形 $ABCD$ 的直观图.

画法 如图 3-8.

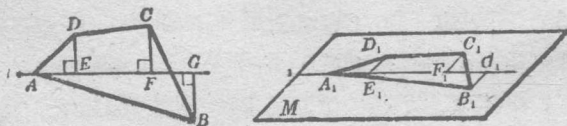


图 3-8

习 题 3.1

1. 用符号表示下列关系，并画图形：

(1) 点 A 、 B 在直线 L 上，点 C 不在 L 上，又 A 、 B 、 C 都在平面 α 内。

(2) 直线 a 和 b 相交于平面 α 内，交点为 M 。

(3) 点 A 、 B 都在直线 L 上，直线 a 和点 B 都在平面 α 内， B 不在 a 上，点 A 在 α 外。

2. 一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？

3. 三角形是否一定是平面图形？为什么？

4. 一点和一条直线能确定一个平面吗？为什么？

5. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

6. 回答下列问题：

(1) 五个点不在同一直线上，过其中三个点的平面，最多有几个？

(2) 三条直线相交于一点、两点、三点，过其中两条直线的平面，最多各有几个？

(3) 空间四个点，过其中三个点的平面，最多有几个？

7. 试就两两相交且不过同一个点的四条直线的不同情况，画出图形，并证它们必在同一平面内。

8. 过已知直线外一点，向这条直线上的三定点分别连结三条线段，证明这三条线段共面。

9. 有一条直线和两条平行线相交，另一条直线也和这两条平行线相交，证明这四条直线共面。

10. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的下端，是否在

同一平面内。

11. 画出下列水平放置的图形的直观图:

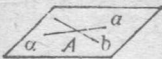
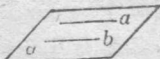
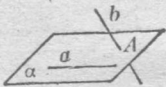
(1) 底边长为 2cm、高为 6cm 的等腰三角形;

(2) 边长为 a 的正六边形。

第二章 空间两条直线

一 两条直线的位置关系

空间不重合的两条直线，它们的位置关系有三种：

	共 面 关 系		异 面 直 线
	相 交 直 线	平 行 直 线	
定义	在同一个平面内，有且只有一个公共点的两条直线	在同一个平面内，没有公共点的两条直线	不能同在任何一个平面内的两条直线
图形			
记法	$a \cap b = A$	$a // b$	$b \cap a = A, a \subset \alpha, A \notin \alpha$
特点	共面且只有一个公共点	共面且无公共点	不共面且无公共点

画异面直线时，常用平面衬托，还可画成如图 3—9 那样，以显示出它们不共面的特点。

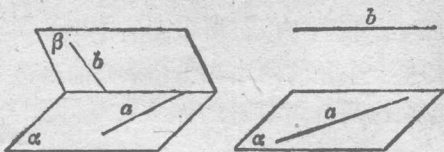


图 3-9

注意：分别在两个平面内的两条直线 a 和 b ，它们不一定是异面直线。（如图 3-10）



图 3-10

例 a, b 是直线, α 是平面, 若 $b \cap \alpha = A, a \subset \alpha, A \notin a$, 求证: a, b 是异面直线。（如图 3-11）

证明（用反证法）

假定 a, b 共面, 那么 这个平面一定经过点 A 和直线 a .

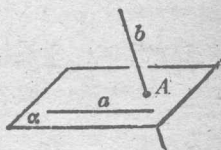


图 3-11

- $\because A \notin a$, 过 A 与直线 a 只能有一个平面 α ,
- $\therefore$ 直线 b 与 a 应在平面 α 内.
- $\therefore b \subset \alpha$, 这与已知 $b \cap \alpha = A$ 矛盾.
- $\therefore$ 直线 a, b 是异面直线.

二 平行直线

公理 4 平行于同一直线的两条直线平行.

根据公理 4，我们可以证得下面的定理：

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

三 两条异面直线所成的角与距离

(一) 两条异面直线所成的角

经过空间任意一点分别作两条异面直线的平行线，这两条相交直线所交成的锐角(或直角)，叫做两条异面直线所成的角。(如图 3—12)

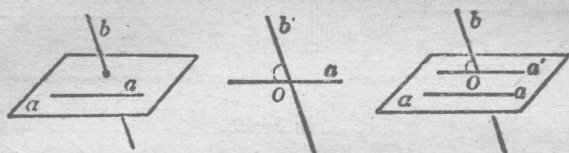


图 3—12

为了简便，空间任意一点 O 常取在两条异面直线 a 与 b 中的一条上。例如，取在直线 b 上，然后过 O 作直线 $a' \parallel a$ (图 3—12)，那么 a' 和 b 所成的锐角(或直角)就是异面直线 a, b 所成的角。

如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这两条异面直线垂直。

(二) 两条异面直线的距离 和两条异面直线都垂直相交的直线叫做这两条异面直线的公垂线。

公垂线在两条异面直线间的线段的长叫做两条异面直线的距离。

例 1 如果 AB 和 CD 是异面直线，则分别和 AB, CD 同时相交的两条直线 AC, BD 一定是异面直线。试证之。

已知 AB 和 CD 是异面直线，如图3—13。

求证 AC 和 BD 也是异面直线。

证明 (用反证法)

假如 AC 和 BD 不是异面直线，
则可设 AC 和 BD 共面于平面 α ，
于是， $A, B, C, D \in \alpha$ 。
因此， $AB \subset \alpha, CD \subset \alpha$ 。

这与已知条件(AB 和 CD 是异面直线)矛盾，

$\therefore AC$ 和 BD 一定是异面直线。

例 2 设图3—14中的正方体的棱长为 a 。

(1) 图中哪些棱所在的直线与直线 BA' 成异面直线？

(2) 求直线 BA' 和 CC' 所成角的大小；

(3) 求异面直线 BC 和 AA' 的距离。

解 (1) $\because A' \notin$ 平面 BC' ，而点 B 、直线 CC' 都在平面 BC' 内，且 $B \notin CC'$ 。

$\therefore$ 直线 BA' 与 CC' 是异面直线。

同理，直线 $C'D'$ 、 $D'D$ 、 DC 、 AD 、 $B'C'$ 都和直线 BA' 成异面直线。

(2) $\because CC' \parallel BB'$ ，

$\therefore BA'$ 和 BB' 所成的锐角就是 BA' 和 CC' 所成的角。

$\because \angle A'BB' = 45^\circ$ ，

$\therefore BA'$ 和 CC' 所成的角是 45° 。

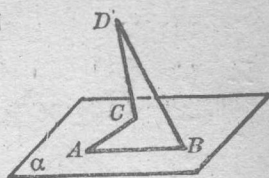


图 3—13

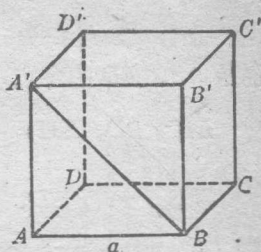


图 3—14

(3) $\because AB \perp AA', AB \cap AA' = A,$

又 $\because AB \perp BC, AB \cap BC = B,$

$\therefore AB$ 是 BC 和 AA' 的公垂线段.

$\because AB = a.$

$\therefore BC$ 和 AA' 的距离是 $a.$

例 3 已知 E, F, G, H 分别是空间四边形的四条边 AB, BC, CD, DA 的中点, 两对角线 AC 与 BD 互相垂直, 求证: 四边形 $EFGH$ 是矩形.

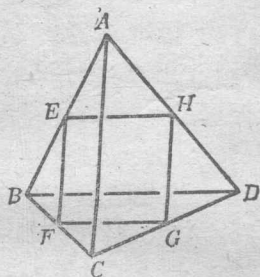


图 3—15

证明 如图 3—15, 由 E, H 分别是 AB, AD 的中点, 得

$$EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2}BD.$$

$$\text{同理, } FG \parallel BD, FG = \frac{1}{2}BD.$$

$\therefore EH \parallel FG, EFGH$ 为平行四边形.

又 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

则 $EF \parallel AC.$

$\therefore \angle EFG$ 是异面直线 AC, BD 所成的角.

$\because AC \perp BD,$

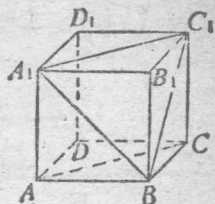
$\therefore \angle EFG$ 是直角.

$\therefore EFGH$ 是矩形.

习 题 3.2

1. 直线 a 和两条异面直线 b, c 都相交, 画出每两条相交直线所确定的平面, 并标上字母.

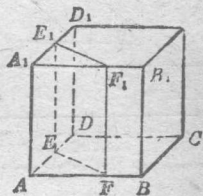
2. 有三条直线，每两条都成异面直线. 画出这三条直线.
3. 如图所示的正方体中，下列每一对直线各是什么位置关系？如果它们不是平行直线，它们所成的角是几度？



(第3题)

- (1) AB 和 CC_1 ;
 - (2) A_1A 和 BC_1 ;
 - (3) A_1B 和 BC_1 ;
 - (4) A_1C_1 和 AC ;
 - (5) AC 和 A_1B .
4. 已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形， E 、 H 分别是边 AB 、 AD 的中点， F 、 G 分别是边 CB 、 CD 上的点，且 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$ ，求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

5. 空间四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 与 CD 相等，两条对角线 AC 与 BD 也相等，另一组对边 AD 、 BC 的中点分别为 P 、 Q ，求证： PQ 是异面直线 AD 、 BC 间的距离.

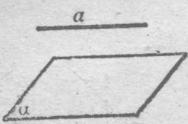
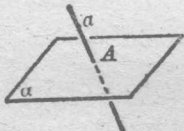
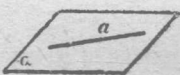


(第6题)

6. 如图，在正方体中， $AE = A_1E$ ， $AF = A_1F_1$ ，求证：四边形 EFF_1E 是平行四边形.

第三章 空间直线和平面

一 直线和平面的位置关系

	直线在平面外		直线在平面内
	直线和平面平行	直线和平面相交	
定义	直线和平面没有公共点,叫做直线和平面平行	直线和平面只有一个公共点,叫做直线和平面相交	直线和平面有无数个公共点,叫做直线在平面内
图形			
记法	$a // \alpha$	$a \cap \alpha = \text{点} A$	$a \subset \alpha$
特点	没有公共点	只有一个公共点	有两个以上公共点

二 直线和平面平行

(一) 直线和平面平行的判定定理

如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线就和这个平面平行。

已知 直线 a 平行于平面 P 内的直线 a' , a 不在平面 P 内(如图3—16)

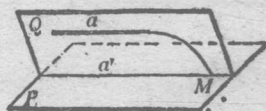


图 3—16