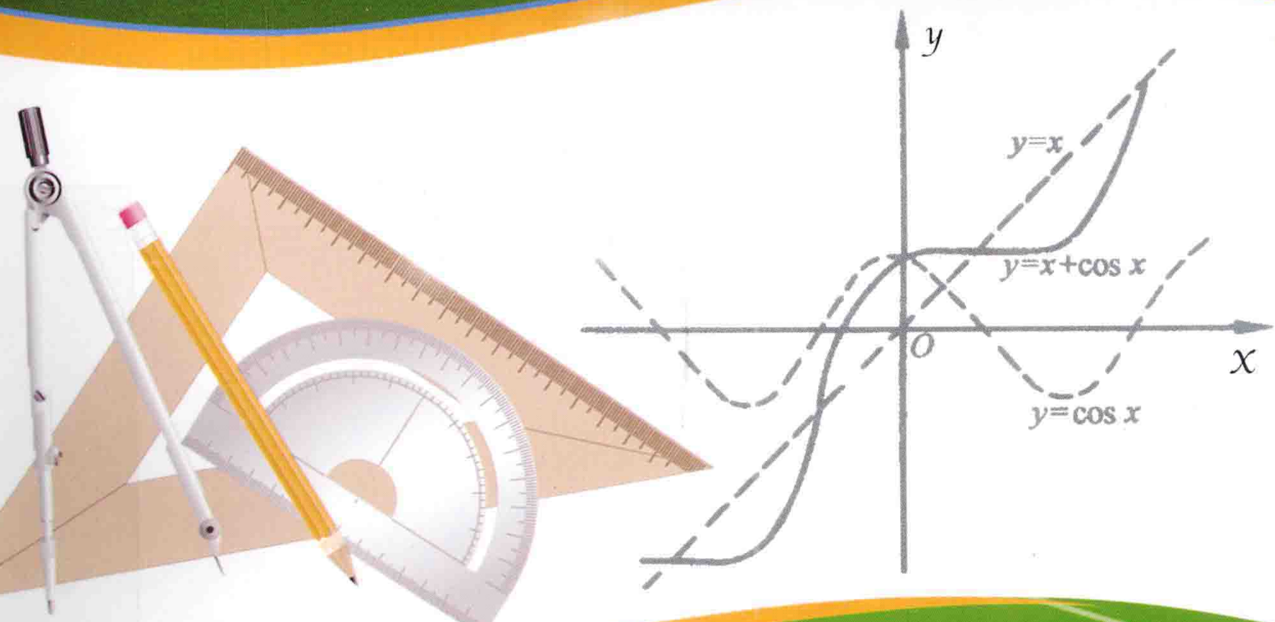
普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

学习指导与精练 下

主编 张野芳 何再乐



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学学习指导与精练

（下）

主　编　张野芳　何再乐
副主编　李长青

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书在总结多年教学经验的基础上精心编写而成，目的是指导学生结合课堂学习，系统地复习高等数学，全面地进行题解训练，为后续课程的学习及硕士研究生入学考试打下良好基础.

全书共十二章，分为上、下两册，上册介绍了函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册介绍了微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 每章包括知识要点、常见题型、常规训练和考研指导与训练，使学生在熟悉本章主要内容的基础上掌握各种解题方法与技巧，同时提高学习能力及应试能力. 书末附有训练题的参考答案或简单提示.

本书可作为高等院校本科生高等数学的辅助教材和硕士研究生入学考试的参考复习用书，同时可作为本专业教师的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与精练．下/张野芳，何再乐主编．—北京：北京理工大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5640-9448-5

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①张…②何…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第141419号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 16
字　　数 / 370千字
版　　次 / 2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
定　　价 / 35.00元

责任编辑 / 王俊洁
文案编辑 / 侯瑞娜
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 马振武

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

编　委　会

主　编　张野芳　何再乐

副主编　李长青

编　委　（以姓氏英文字母为序）

陈丽燕　郝　彦　姜　静　卢海玲

童爱华　王小双　王朝平　徐优红

周　杰

前言 PREFACE

高等数学是高等院校理工科专业的一门重要的基础课程，也是全国硕士研究生理工类与管理类专业入学考试的统考科目.

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了本书. 本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧. 有效地指导和分层次地训练是本书的特点，进而提高读者的应试能力. 本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性，所配例题与习题都是老师多年累积的经典题型，只要认真练习，一定会有所收获.

考虑到高等数学这门课程的特点，在内容上我们做了以下安排：

1. 知识要点

从本课程的知识体系出发，对各个章节的主要内容、知识要点、易错点等进行了概括与总结，使知识全面系统，便于掌握.

2. 常见题型

对各章节的常见解题类型进行解题思路的概括与分析，引导学生思考问题，熟悉多种解题方法，进而初步掌握常规的解题思路和方法.

3. 常规训练

根据每节新课的要求，设计常规训练题. 通过训练，使学生熟练掌握基础知识与基本解题方法. 题目类型有判断题、选择题、填空题、计算题和证明题等.

4. 考研指导与训练

每一章对考研常规题型进行了分析，并配有一定数量的考研训练题. 题目的类型和难度以最近几年研究生入学试题为标准，通过训练，使学生初步掌握研究生入学考试的要求.

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题，在使用本书时，读者应尽量多做一些练习题，通过练习真正掌握每章的内容. 对于本书提供的例题，学生应力求吸收解题思路与方法，做到举一反三. 考研训练部分对于基础较好的读者，可在每章学完后进行，一般学生可在期末总复习时训练.

在编写本书的过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了一些其他教材和参考书，在很多方面得到启发与教益，在此不一一指明，谨对原书作者表示由衷的感谢. 由于编者水平有限，书中不妥之处恳请读者批评指正.

编　者

目 录 CONTENTS

第七章 微分方程

学习导引

微分方程有深刻而生动的实际背景，它从生产实践与科学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具. 本章主要学习了可分离变量的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、可降阶的高阶线性微分方程等一些比较简单的微分方程的解法，让大家对微分方程有一个基本的了解.

第一节 微分方程的基本概念

知识要点

定义 1 凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫作微分方程，有时也简称方程. 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫作微分方程的阶. 未知函数为一元函数的微分方程，被称为常微分方程.

定义 2 如果有这样的函数，代入微分方程能使其成为恒等式，则这函数叫作微分方程的解. 如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫作微分方程的通解. 确定了通解中的任意常数后，就得到了微分方程的特解. 其解是一元函数 $y=f(x)$ 或 $\Phi(x,y)=0$. 若自变量多于一个，则称为偏微分方程.

定义 3 确定微分方程特解的条件，如 $y|_{x=x_0}=y_0$，$y'|_{x=x_0}=y'_0$，称为微分方程的初始条件. 而求微分方程满足初始条件的特解的问题，称为微分方程的初值问题.

定义 4 微分方程的解的图形是一条曲线，叫作微分方程的积分曲线.

注：

①一阶微分方程的积分曲线是原方程的一阶导函数形成的曲线；

②有时微分方程的通解并不包含方程的全部解；在解常微分方程时，如果在方程的两边施行了消去某一因子的运算，则可能会丢失某些解，应把这些解都求出，它们与求得的通解合起来才构成方程的全部解. 也就是说，求通解与求全部解是不同的概念.

常见题型

1. 验证函数是否是常微分方程的解或通解

例 1 验证函数 $y=\sin(\arcsin x+C)$ 及 $y=\pm 1$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $(-1,1)$ 上的解,其中 C 是任意常数.

【思路点拨】 一般地,将函数代入常微分方程,如果能使方程成立,则其是方程的解,否则不是;如果微分方程的阶数与任意常数的个数一致,且不可以通过变形将任意常数的个数约减,则其是方程的通解.

解 因为 $y=\sin(\arcsin x+C)$,所以 $(\arcsin y)'=(\arcsin x+C)'$,即

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

即 $y=\sin(\arcsin x+C)$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 的解.

对于函数 $y=\pm 1$,因为 $y'=0$, $\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$,于是也有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

从而 $y=\pm 1$ 也是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 的解.

2. 建立已知函数族满足的微分方程

例 2 曲线在点 $P(x,y)$ 处的切线与 y 轴的交点为 Q,线段 PQ 的长度为 2.求此曲线的微分方程.

【思路点拨】 根据已知条件,找出未知函数与其导数间的关系,从而列出微分方程.

解 由题设切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

由此解得 Q 的坐标 $(0,y-y'x)$,而 PQ 间的距离为

$$|PQ|=\sqrt{x^2+(y'x)^2},$$

再由 $|PQ|=2$ 就可得出曲线方程所满足的微分方程为

$$x^2+(y'x)^2=4.$$

3. 化积分方程为微分方程

例 3 已知 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，写出相应的微分方程.

【思路点拨】 将方程两边同时求导，将积分方程化为微分方程，然后求解微分方程. 在求导时注意应用变上限定积分所确定的函数导数公式.

解 由题设将方程整理为

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

将其左右两边同时关于 x 求导得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

再将其左右两边同时关于 x 求导，可得相应的微分方程

$$f''(x)+f(x)=-\sin x.$$

常规训练

1. 判断题.

(1) $(y')^2+xy+y^2=1$ 是二阶微分方程 (　　)

(2) 函数 $y=C_1\sin 2x+C_2\sin x\cos x$ 是方程 $y''+4y=0$ 的通解，其中 C_1, C_2 为任意常数 (　　)

(3) 微分方程的通解包含了该微分方程的所有特解. (　　)

2. 填空题.

(1) $(y')^2+2\sin y''=2y$ 的阶数为__________________.

(2) $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$ 的阶数为__________________.

(3) 设 $f(x)$ 是可微函数. 满足方程 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x[f(t)]^2\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 所满足的微分方程为__________________.

3. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

(1) $4y'=2y-x$, $y_1=\frac{1}{2}x+1$, $y_2=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$；

(2) $x(y')^2-1=0$，　$y^2-4x=0$；

(3) $y''+a^2y=e^x, y=c_1\sin ax+c_2\cos ax+\frac{1}{2}e^x$;

(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0, y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$.

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1)曲线在点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的三次方;

(2)曲线上点$P(x,y)$处的法线与x轴的交点为Q,且线段PQ被y轴平分;

(3)一曲线通过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线段均被切点所平分,求此曲线方程.

第二节 可分离变量的微分方程

知识要点

1. 定义

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

的形式,即等号一端只含关于y的函数和$\mathrm{d}y$,另一端只含关于x的函数和$\mathrm{d}x$,那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

2. 解法

将微分方程$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$两端积分

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x+C,$$

上式即原微分方程的隐式解,其中C为任意常数.

3. 解法依据

若可分离变量的微分方程$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$中的$g(y)$与$f(x)$是连续的,设函数$y=\varphi(x)$是上述微分方程的解,将其代入到原微分方程中可得出如下的恒等式

$$g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,$$

将上式两端积分，并记 $\varphi(x)=y$，有

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

设 $G(y)$ 及 $F(x)$ 依次为 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的原函数，则有

$$G(y)=F(x)+C. \tag{2}$$

由前述讨论知，方程(1)的解满足式(2). 反之，如果函数 $y=\Phi(x)$ 是由式(2)所确定的隐函数，则在 $g(y)\neq 0$ 的条件下，由隐函数求导法可求得 $\Phi'(x)$，即

$$\Phi'(x)=\frac{F'(x)}{G'(y)}=\frac{f(x)}{g(y)},$$

这说明函数 $y=\Phi(x)$ 满足方程(1). 由此即知，如果已分离变量的微分方程(1)中，函数 $g(y)$ 与 $f(x)$ 是连续的，且 $g(y)\neq 0$，则方程式两端积分得到的式(2)就用隐函数的形式给出了方程(1)的解，通常称式(2)为微分方程(1)的隐式解. 又因为式(2)中含有一个任意常数，所以式(2)所确定的隐函数是方程(1)的通解，而式(2)也称作微分方程(1)的隐式通解.

注：

①在解微分方程时变量代换是重点，也是难点，应根据具体问题尽量简化方程.

②在求解微分方程时，应注意不要像求不定积分那样，最后一步才将任意常数加以整理，而应该同时施以相应的化简，目的是使解的结构更加整齐、美观.

常见题型

1. 可分离变量的微分方程的解

例 1 求微分方程

$$(y^2+xy^2)\mathrm{d}x-(x^2+yx^2)\mathrm{d}y=0$$

满足初始条件 $y|_{x=1}=-1$ 的特解.

【思路点拨】 可分离变量的微分方程很简单，把两个不同变量的函数及其微分全部分开，各自积分即可.

解 将原方程分离变量得

$$\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

将其积分可得

$$-\frac{1}{y}+\ln|y|=-\frac{1}{x}+\ln|x|+\ln|C|,$$

整理得原方程的通解为

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{Cx}{y}\right|=0.$$

将初始条件代入得原方程的特解

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|+2=0.$$

2. 简单应用问题

例 2 一曲线通过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线段均被切点所平分,求这曲线方程.

【思路点拨】 根据已知条件,建立起未知函数与其导数间的关系,从而得到微分方程.

解 设切点为(X,Y),过此切点的切线方程为

$$y-Y=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}(x-X),$$

当$x=0$时,按已知可知$y=2Y$,代入切线方程可得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{Y}{X},$$

分离变量求积分可得

$$XY=C,$$

替换成一般变量为

$$xy=C,$$

将(2,3)点代入曲线,可得曲线方程为

$$xy=6.$$

常规训练

1. 判断题.

(1)在解代数方程时,可能因将方程变形导致丢根,但用分离变量法对微分方程进行变形时,不会丢解. (　　)

(2) 对可分离变量的微分方程 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$,通过两边积分$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$ 得 $G(y) = F(x) + c$,其中$G(y)$,$F(x)$ 分别是$g(y)$,$f(x)$ 的原函数,则这样得到的原微分方程的解是错误的,因为左边是对 y 积分,而右边是对 x 积分. (　　)

2. 填空题.

(1)微分方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为____________________.

(2)已知曲线 $y=f(x)$过点$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,且其上任一点$(x,y)$处切线的斜率为 $x\ \ln(1+x^2)$,则 $f(x)=$________________.

3. 选择题.

设 $y=f(x)$是 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解.若 $f(x_0)>0$,$f'(x_0)=0$,则 $f(x)$在点 x_0(　　).

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)某邻域内单调增　　(D)某邻域内单调减

4. 求 $y'=1-x+y^2-xy^2$ 满足条件 $x=0$,$y=1$ 的解.

5. 求下列微分方程的通解：

(1) $y'=2xy+xy^2$；

(2) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$；

(3) $3\mathrm{e}^x\tan y\mathrm{d}x+(2-\mathrm{e}^x)\sec^2 y\mathrm{d}y=0$.

6. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=nf(x)\quad(n\neq 1)$，求 $f(x)$.

7. 设函数 $f(u)$ 与 $g(u)$ 连续，证明方程 $yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y=0$ 经过代换 $u(x)=xy$ 可化为可分离变量的微分方程.

第三节　齐次方程

知识要点

1. 定义

如果一个一阶微分方程能写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式，则称此方程为齐次方程.

2. 解法

令 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=ux$，求导，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原微分方程，有

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u,$$

这是变量可分离的方程，分离变量求解即可.