高等数学辅导

（下　册）

盛祥耀　葛严麟
胡金德　张元德　编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书基本上是根据教育部1980年制定的工科高等数学教学大纲的要求编写的，也是编者多年来在清华大学教学、辅导工作的结晶。

下册内容共六章，包括空间解析几何及矢量代数、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等。是工科大学生、电大和职工大学学员、自学高等数学者学习高等数学时的辅导教材。也可供从事工科高等数学教学的教师、非数学专业的研究生及中学数学教师参考。

高 等 数 学 辅 导

（下册）

盛祥耀　葛严麟　胡金德　张元德　编

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

景山学校印刷厂　排版

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

☆

开本：787×1092　1/32　印张：$16\,^1/_8$　字数：362千字

1983年10月第一版　1983年10月第一次印刷

印数：1—120000

统一书号：15235·47　定价：2.60元

目　录

第七章　空间解析几何、矢量代数

§1　行列式

（一）　内容提要

1　二阶行列式

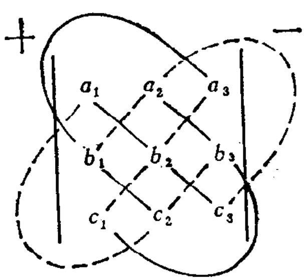
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

2　三阶行列式

定义：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

沙路展开式：



实线上三数的连乘积都带正号，虚线上三数的连乘积都带负号.

性质：

1°　行、列依次对调，行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2° 某两行（或两列）对调，行列式的值变号.

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

3° 某行（或某列）的元素有公因数，则此公因数可提到行列式记号之外。例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4° 某两行(或两列)的元素对应成比例，包括某两行（或两列）元素对应相等及某一行（或列）元素全为零．行列式等于零．例如：

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5° 某行（或列）的元素都是两项之和，则该行列式可以分解成为两个相应行列式的和.

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1^* & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2^* & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3^* & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^* & b_1 & c_1 \\ a_2^* & b_2 & c_2 \\ a_3^* & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6° 某行（或列）的所有元素乘以同一倍数 λ(λ 为任何常数)，加到另一行（或列）的对应元素上，行列式的值不变.

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + kc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

代数余子式及行列式按一行（或列）的展开式：

代数余子式：设 x 是行列式中位于第 i 行第 j 列的元素，在这个行列式中，去除 x 所在的第 i 行及第 j 列元素后，剩下的元素构成的行列式乘以 $(-1)^{i+j}$，称为 x 的代数余子式，记 **X**．例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad b_1 \text{ 的代数余子式：} B_1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

按一行（或列）的展开式：

行列式的值等于其任一行（或列）的元素与它们的代数余子式两两乘积之和。例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

$$= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3.$$

行列式的任一行（或列）的元素与另一行（或列）的对应元素的代数余子式的两两乘积之和为零。例如：

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0,$$

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0.$$

3　高阶行列式：

四阶和四阶以上的行列式称为高阶行列式，高阶行列式无

沙路（对角线）展开法，但按某行（或列）的展开法仍适用，例如：四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

三阶行列式的性质对高阶行列式均成立。

（二） **例题**

7.1　计算下列行列式：

$1°\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$；　$2°\begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix}$；

$3°\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$；　$4°\begin{vmatrix} \log_b a & \log_b c & 1 \\ \log_c a & 1 & \log_c b \\ 1 & \log_a c & \log_a b \end{vmatrix}$.

7.2　求出满足方程的 x 值。

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7.3　分解因式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

7.4　利用性质计算下列行列式：

$$1°\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix};$$

$$2°\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 3°\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix};$$

7.5 证明平面上三点$M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$、$M_3(x_3, y_3)$共线的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7.6 计算行列式: $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

7.7 证明若平面上三点$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ 不共线，则过此三点的圆的方程为:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 \\ x & x_1 & x_2 & y_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(三) 例题分析

7.1 计算下列行列式:

$$1°\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \qquad 2°\begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix};$$

3° $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$； 4° $\begin{vmatrix} \log_b a & \log_b c & 1 \\ \log_c a & 1 & \log_c b \\ 1 & \log_a c & \log_a b \end{vmatrix}$.

解：行列式的计算，除由沙路法直接计算外，一般可利用性质及展开定理计算，这往往使计算简便得多，而且计算的途径也是多种多样的，这里首先要观察行列式中各行或列的对应元素间是否有某种规律性，使利用性质计算，达到预期的效果。

1° 用沙路法计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9+4\cdot8\cdot3+7\cdot2\cdot6-(7\cdot5\cdot3+4\cdot2\cdot9+1\cdot8\cdot6)$$
$$=45+84+96-(105+72+48)$$
$$=225-225=0.$$

用性质计算：

$$\underset{\underset{\times(-1)}{\llcorner\!\!\!\uparrow}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}} \overset{(6)}{=\!=} \underset{\underset{\times(-1)}{\llcorner\!\!\!\uparrow}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}} \overset{(6)}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=\!=} 0.$$

$\underset{\times(\lambda)}{\llcorner\!\!\!\uparrow}$ 表示某行（列）元素乘 λ 后加到另一行（一列）对应元素上。等号上的数字表示利用了第几条性质。例 $\overset{(4)}{=\!=}$ 表示此等号利用了性质 4°.

2° 用沙路法计算

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix} = n(n-1)(n+1)+(n+1)n(n-1)$$

$$+(n-1)(n+1)n-((n-1)^3+(n+1)^3+n^3)$$

$$=3n^3-3n-3n^3-6n=-9n.$$

用性质计算：

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix} \xlongequal{(6)} \begin{vmatrix} 3n & n+1 & n-1 \\ 3n & n-1 & n \\ 3n & n & n+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \times(-1) \end{matrix}$$

$\times(1)$ $\times(1)$

$$\xlongequal{(3)\,(6)} 3n\begin{vmatrix} 1 & n+1 & n-1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3n\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -9n.$$

3° 显然 $\sin x=0$ 或 $\cos x=0$ 时，有

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix} = 0.$$

故设 $\sin x\neq 0$ 及 $\cos x\neq 0$，则

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(3)} \frac{1}{\cos x\sin x}\begin{vmatrix} 2\sin x\cos x & \sin^2 x-\cos^2 x & \sin^2 x+\cos^2 x \\ \sin x\cos x & -\cos^2 x & \cos^2 x \\ \cos x\sin x & \sin^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix} \times(1)$$

$$\xlongequal{(6)} \frac{1}{\cos x\sin x}\begin{vmatrix} 2\sin x\cos x & \sin^2 x-\cos^2 x & \sin^2 x+\cos^2 x \\ 2\sin x\cos x & \sin^2 x-\cos^2 x & \sin^2 x+\cos^2 x \\ \sin x\cos x & \sin^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix} \xlongequal{(4)} 0.$$

4° 显然 $a\neq 1$ $b\neq 1$ $c\neq 1$ 且有 $a>0$，$b>0$，$c>0$。

$$\begin{vmatrix} \log_b a & \log_b c & 1 \\ \log_c a & 1 & \log_c b \\ 1 & \log_a c & \log_a b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\log a}{\log b} & \dfrac{\log c}{\log b} & \dfrac{\log b}{\log b} \\ \dfrac{\log a}{\log c} & \dfrac{\log c}{\log c} & \dfrac{\log b}{\log c} \\ 1 & \log_a c & \log_a b \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=\!=} \frac{1}{\log b \log c} \begin{vmatrix} \log a & \log c & \log b \\ \log a & \log c & \log b \\ 1 & \log_a c & \log_a b \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} 0.$$

7.2　求满足方程的x值。

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

解：行列式当它的元素全部是已知数时，它是由这些元素按一定规律运算后得到的一个数。当元素中有未知数时，它是一个包含未知数的代数式，令这个代数式为零，就是一个包含未知数的方程。

法一：展开后直接解代数方程：

因为$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(6)}{=\!=} \begin{vmatrix} x^2-4 & 4 & 5 \\ x-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} x^2-4 & 5 \\ x-2 & 1 \end{vmatrix}$

$\times(-1)\times(-1)$

$$= -(x^2-4) + 5(x-2) = (x-2)(3-x).$$

故$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$，　　即　$(x-2)(3-x) = 0$.

得方程的解为：　　$x = 2$，$x = 3$.

法二：$\begin{vmatrix}x^2&4&9\\x&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0$。

行列式的展开式中各项是不同行不同列的元素的乘积，而现行列式中未知数均在第一列，不会乘在一起，且元素最高次方为二次，故这是一个一元二次方程，它应有两个根，由观察，当 $x=2$ 时，行列式第一列和第二列的对应元素相等，行列式为零，故 $x=2$ 满足方程．是方程的根，同理 $x=3$ 也是方程的根，所以由察观法得：方程的两个根为，　$x=2$，$x=3$。

7.3　分解因式：

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}.$$

解：这是一个用行列式表示的关于 x、y、z 的代数式，我们用下列两种方法来分解因式。

法一：利用行列式性质计算行列式，然后再分解因式：

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}\overset{(6)}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&0\\x&y-x&z-x\\x^2&y^2-x^2&z^2-x^2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}y-x&z-x\\y^2-x^2&z^2-x^2\end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$\times(-1)$

$$\overset{(3)}{=\!=}(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1&1\\y+x&z+x\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z-y).$$

在计算过程中，我们提出了公因子，使分解因式的工作比较顺利，若用沙路法展开后再分解因式，就会麻烦得多。

法二：直接从行列式中分析有些什么公因式，找出其全部公因式，再确定行列式是否和全部公因式的乘积相等。

观察行列式知，当用 x 代替 y 时，有 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x & z \\ x^2 & x^2 & z^2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=\!=} 0$。

故行列式有因子 $(x-y)$，同理用 y 代替 z，z 代替 x，也使行列式为零，因此我们至少已观察到行列式有三个因子 $(x-y)$，$(y-z)$，$(z-x)$。是否还有别的因子呢？因为行列式展开式中各项的次数都为三次，而已求的三个因子的乘积亦为三次，所以不会再有别的因子了，（若还有别的因子，则将出现比三次更高的项，这是不可能的。）当然，我们还不能说行列式就等于这三个因子的连乘积，因为还可能差一个常数因子。故可设，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = k(x-y)(y-z)(z-x).$$

比较等式两边的系数就可以确定 k。这里只要比较一项的系数即可，例如主对角线元素的乘积项的系数：$1\cdot y\cdot z^2$，即比较 yz^2 项的系数，得 $k=1$，故

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

7.4 利用性质计算下列行列式：

$1°\ \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$；

$2°\ \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　　$3°\ \begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix}$。

解：一般计算行列式的主要思路是：利用性质 6，将某行

（或列）中元素尽可能多的消成零，再以该行（或列）元素展开，降为低阶行列式计算。

1° 法一：

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \times(-1)$$

（每列中均有两元素相同，可将一个消成零.）

$$\overset{(6)}{=\!=}\begin{vmatrix} a+b+c & -(a+b+c) & 0 \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$\times(1)$

$$\overset{(6)}{=\!=}\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ c & b+2c+2a & b \\ c & c+a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ c+a & c+a+2b \end{vmatrix} \times(-1)$$

（虽然第一列中还有两相同元素c，但消成零对展开好处不多，应在已有的零所在的行（或列）中尽可能多的将非零元素消成零.）

$$\overset{(6)}{=\!=}(a+b+c)\begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ -(a+b+c) & a+b+c \end{vmatrix},$$

$$\overset{(3)}{=\!=}(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)^3.$$

法二：由观察三列对应元素之和均为：$2a+2b+2c$，故可如下计算：

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & a+c+2b \end{vmatrix}$$

$\times(1)$

$\times(1)$

$$\overset{(6)}{=\!=}\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=\!=}2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \times(-1) \end{matrix}$$

$$\overset{(6)}{=\!=}2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} a+b+c & 0 \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix}=2(a+b+c)^3.$$

指出下列计算的错误：

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \text{(1)行}-\text{(2)行}$$

$$\overset{(6)}{=\!=}\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ a+b+c & -(a+b+c) & 0 \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=\!=}(a+b+c)\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ 1 & -1 & 0 \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}=\cdots\cdots$$