

NG YU KONGZHI
IG
DE
JUZHEN LILUN
(DI-ER BAN)

系统与amp;控制中的

矩阵理论

(第2版)

张 显 仲光苹 高翔宇◇编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

YONG YU KONGZHI
YONG
DE
JUZHEN LILUN
(DI-ER BAN)

系统与控制中的 矩阵理论

(第2版)

张 显 仲光苹 高翔宇◇编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

系统与控制中的矩阵理论 / 张显等编著. -- 2 版.
— 哈尔滨 : 黑龙江大学出版社 ; 北京 : 北京大学出版社, 2017. 8

ISBN 978-7-5686-0112-2

I. ①系… II. ①张… III. ①矩阵—理论 IV.
① 0151. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 124384 号

系统与控制中的矩阵理论

XITONG YU KONGZHI ZHONG DE JUZHEN LILUN

张 显 仲光苹 高翔宇 编著

责任编辑 肖嘉慧

出版发行 北京大学出版社 黑龙江大学出版社

地 址 北京市海淀区成府路 205 号 哈尔滨市南岗区学府三道街 36 号

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787×1092 1/16

印 张 18

字 数 333 千

版 次 2017 年 8 月第 1 版

印 次 2017 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5686-0112-2

定 价 45.00 元

本书如有印装错误请与本社联系更换。

版权所有 侵权必究

第2版前言

本书第1版于2011年8月出版以来,一直是黑龙江大学数学科学学院的本科生和研究生教材,也被中南大学、沈阳航空航天大学、东北石油大学、哈尔滨理工大学等高校的一些同人作为参考书,得到了这些高校师生的欢迎.在整个修改过程中,得到了许多同行、同事的热情帮助,特别是黑龙江大学数学科学学院的王艳涛老师.张显2011~2016年间的在读研究生也做了许多书稿的校对工作.本次修订也得到了黑龙江大学出版社和教务处的大力支持.我们在此表示衷心的感谢.

这次新版保持了第1版的基本内容和特色,同时吸收了好的建议,主要修订如下:

1. 调整了章节顺序.本书第一作者张显为黑龙江大学数学科学学院讲授研究生课程“矩阵代数”和本科课程“矩阵分析”,2011~2016年一直选用本书第1版作为主要教材.基于使用过程中学生的感受,以及读者向我们提出的一些宝贵意见,这次修订将内容分为两部分:第一部分是基础篇,主要涉及矩阵理论中常用的一些基本概念和重要结论;第二部分为提高篇,主要涉及系统与控制中常用的经典矩阵理论.

2. 增加了一些内容.这次修订增加了一些系统和控制文献中经常涉及的矩阵理论,包括非负矩阵(第10章)、Jensen不等式的推广(第11.8节)、有理实函数矩阵的既约分解(第17章)、 H_2 范数和 H_∞ 范数(第16.4、16.5节)等.值得指出的是,Jensen不等式的推广介绍的是近两年刚刚发表的成果.

3. 简化了一些结论的证明.主要包括矩阵 m_p -范数与向量 p 范数的相容性(第2.3节)、矩阵秩可加性的充要条件(第5.2节)等.

4. 修订了第1版的笔误和打字错误.

尽管已经做了努力,但由于我们水平有限,本书可能仍有不当之处,甚至错误,热诚地欢迎各位同行和读者批评指正.

作者

2017年4月于哈尔滨

第1版前言

本书的第一作者张显,曾连续五年为黑龙江大学数学科学学院的研究生讲授“矩阵代数”课程,本书是在其讲稿的基础上,进行增删、改写而成的.书中详细、准确地介绍了矩阵的列空间与核空间、矩阵(对)分解与标准型、向量范数、矩阵序列的极限与矩阵级数、函数矩阵的微积分、矩阵特征值和奇异值的不等式、矩阵广义逆、线性矩阵不等式、代数Riccati矩阵方程等方面的内容.力求做到论述严谨、深入浅出,能够体现矩阵的理论、思想和方法.为了便于读者理解和消化内容,每章均配有适量的习题,较难的习题附有提示.

本书有两个特色:一是为了内容的连贯、衔接,方便读者阅读,作者给出了许多与原文献不同的证明;二是部分内容摘自近几年出版的控制方面的学术论文,其中有的是作者的科研成果.

全书共分十二章,第一至七章及附录A至D由仲光苹执笔,第八至十一章及附录E和F由高翔宇执笔,第十二章由张显执笔,最后由张显统稿.

本书适合作为系统与控制等相关专业的研究生教材,也可作为数学系本科生的选修课教材,还可供相关专业的高等学校教师、广大科技工作者、工程技术人员参考.

本书的部分内容摘自国内外的同类著作、相关文献以及黑龙江大学曹重光教授的讲稿,在此向这些作者表示衷心的感谢.

本书的出版得到了黑龙江省精品课程(近世代数)建设经费的资助,在此深表谢意,同时还要感谢黑龙江大学和东北石油大学的有关领导和同志的大力支持和帮助.黑龙江大学数学科学学院的一些研究生参与了本书的打字和校对工作,在此一并致谢.

由于我们水平有限,本书可能有不当之处,甚至错误,热诚地欢迎各位同行专家和读者批评指正.

作者

2011年3月于哈尔滨

符号

如果没有特殊说明, 本书将使用下面的符号.

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{F}$	$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$
$\mathbb{F}^n$	集合 $\mathbb{F}$ 中所有 n 维列向量的集合
$\mathbb{F}^{m \times n}$	集合 $\mathbb{F}$ 中所有 $m \times n$ 矩阵的集合
$\mathbb{F}_k^{m \times n}$	集合 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 中所有秩为 k 矩阵的集合
$\max$	最大值
$\min$	最小值
$\lambda_{\max}(\cdot)$	矩阵的最大特征值
$\lambda_{\min}(\cdot)$	矩阵的最小特征值
$\sigma_{\max}$	矩阵的最大奇异值
$\sigma_{\min}$	矩阵的最小奇异值
$\mathcal{R}(\cdot)$	矩阵的列空间
$\mathcal{N}(\cdot)$	矩阵的核空间
N_A	$\mathcal{N}(\mathbf{A})$ 的一组基作为列排成的矩阵
$\text{span}\{\cdot\}$	生成子空间
$\text{Im}(\cdot)$	线性变换的像空间
$\text{ker}(\cdot)$	线性变换的核空间
E_{ij}	(i, j) 位置元素为1而其余位置为0的矩阵
I_n 或 $\mathbf{I}$	(n) 阶单位阵
$\mathbf{0}_{m \times n}$ 或 $\mathbf{0}$	$(m \times n)$ 阶零矩阵
A_{ij}	矩阵 $\mathbf{A}$ 的 (i, j) 位置元素的代数余子式
$\text{adj}(\cdot)$	伴随矩阵
$\det(\cdot)$	行列式
$\text{rank}(\cdot)$	秩
$\lambda(\cdot)$	矩阵的所有特征根的集合

$\{\cdot\}_{o.n.}$	标准正交向量组
$A > B$ 或 $B < A$	矩阵 $A - B$ 是实对称(复Hermite)正定矩阵
$A \geq B$ 或 $B \leq A$	矩阵 $A - B$ 是实对称(复Hermite)半正定矩阵
$\mathbb{RH}_2$	所有极点的实部均小于0的严真传递函数矩阵全体
$\mathbb{RH}_2^\perp$	所有极点的实部均大于0的严真传递函数矩阵全体
$\mathbb{RH}_\infty$	所有极点的实部均小于0的传递函数矩阵全体
$\mathbb{RH}_\infty^\perp$	所有极点的实部均大于0的传递函数矩阵全体
$G^\sim(s)$	传递函数矩阵 $G(-s)^T$
$\rho(\cdot)$	谱半径
$\text{tr}(\cdot)$	迹
$(\cdot)^{-1}$	逆
$(\cdot)^T$	转置
$(\cdot)^*$	共轭转置
$\overline{(\cdot)}$	共轭
$ \cdot $	复数的模长
$\dim$	维数
$\int$	积分
$\lim$	极限
diag	对角(块)矩阵
$(\cdot)^\perp$	正交补
$\ \cdot\ $	范数
$\ \cdot\ _1$	1-范数
$\ \cdot\ _2$	2-范数或谱范数
$\ \cdot\ _\infty$	∞ -范数或 H_∞ 范数
$\ \cdot\ _F$	Frobenius 范数
$\text{Cond}_{\ \cdot\ }$ 或 Cond	条件数
$\sup$	上确界
$\inf$	下确界
$\text{Ind}(\cdot)$	矩阵的指标
$(\cdot)_d$	矩阵的Drazin逆
$(\cdot)_g$	矩阵的群逆
$(\cdot)^{(1)}$	矩阵的{1}逆
$(\cdot)\{1\}$	矩阵的所有{1}逆的集合
$(\cdot)^{(1,2)}$	矩阵的{1,2}逆
$(\cdot)\{1,2\}$	矩阵的所有{1,2}逆的集合

$(\cdot)^{(1,3)}$	矩阵的 $\{1, 3\}$ 逆
$(\cdot)\{1, 3\}$	矩阵的所有 $\{1, 3\}$ 逆的集合
$(\cdot)^{(1,4)}$	矩阵的 $\{1, 4\}$ 逆
$(\cdot)\{1, 4\}$	矩阵的所有 $\{1, 4\}$ 逆的集合
$(\cdot)^+$	矩阵的Moore-Penrose逆
$\mu_{\ \cdot\ }(\cdot)$ 或 $\mu(\cdot)$	矩阵测度
$\text{Vec}(\cdot)$	拉直运算
M/A	矩阵 M 关于主子阵 A 的Schur补
$\widehat{M/A}$	矩阵 M 关于主子阵 A 的广义Schur补
$\frac{d}{dx}A$ 或 $A'(x)$	变量 A 对变量 x 求导数
$\frac{\partial}{\partial x}A$	变量 A 对变量 x 求偏导数
$C_{k,X,Y}$	矩阵 $[Y \quad XY \quad \cdots \quad X^{k-1}Y]$
$P^{L,M}$	从子空间 M 到子空间 L 的投影算子
P^L	$P^{L,L}$
$P_{L,M}$	投影算子 $P^{L,M}$ 在给定基下的矩阵
P_L	正交投影算子 $P_{L,L^\perp}$
C_n^m	从 n 个元素中任取 m 个的组合数
$\mathbb{F}[x]_n$	$\mathbb{F}$ 上所有次数小于 n 的多项式和零多项式的集合
$\sum$	求和
$\prod$	乘积
$\otimes$	Kronecker积
$A^{[k]}$	$A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$ (k 个 A)
$\circ$	Hadamard积
e_i	单位矩阵的第 i 列
$\text{Re}(\cdot)$	实部
$\text{Im}(\cdot)$	虚部
$\mathbb{C}^-$	左半开复平面
$\mathbb{C}^+$	右半开复平面
$\overline{\mathbb{C}^+}$	右半闭复平面
$\overline{\mathbb{C}^-}$	左半闭复平面
$:=$	定义
$\Leftrightarrow$	等价于
$\Rightarrow$	推出
$\forall$	任意的

$\subseteq$
 $\supseteq$
 $\in$
 $\notin$
 $\square$

包含于
包含
属于
不属于
结束符

目 录

符 号.....	I
第一部分 基础篇	
第1章 预备知识	3
1.1 内积空间	3
1.2 矩阵的对角化	8
1.3 矩阵的等价分解	11
1.4 矩阵的Fitting分解	12
1.5 复矩阵的Jordan分解	13
1.6 复(实)矩阵的奇异值分解	15
1.7 实对称矩阵的惯性指数分解	15
习 题	16
第2章 范数	18
2.1 范数的定义和例子	18
2.2 范数的等价性	23
2.3 矩阵范数	25
2.3.1 矩阵范数的相容性	26
2.3.2 从属范数	27
2.4 谱半径和条件数	30
习 题	32
第3章 矩阵序列的极限与矩阵级数	34
3.1 矩阵序列的极限	34
3.2 矩阵级数	36

3.3 矩阵幂级数	37
习 题	41
第4章 函数矩阵的微积分	43
4.1 函数矩阵对单变量的导数	43
4.2 纯量函数对矩阵变量的导数	46
4.3 函数矩阵对矩阵变量的导数	50
4.4 函数矩阵的微积分	51
习 题	53
第5章 矩阵的列空间与核空间	55
5.1 矩阵的列空间与核空间的定义	55
5.2 列空间与核空间的性质和应用	56
5.3 列空间与核空间的和是直和的条件	59
习 题	61
第6章 矩阵广义逆	62
6.1 矩阵 $\{i, j, \dots, k\}$ 逆	62
6.1.1 矩阵 $\{i, j, \dots, k\}$ 逆的定义及其存在唯一性	62
6.1.2 矩阵 $\{1\}$ 逆和Moore-Penrose逆的性质	66
6.1.3 矩阵 $\{1\}$ 逆的表示	67
6.1.4 矩阵 $\{1\}$ 逆与矩阵方程的解	69
6.1.5 矩阵 $\{1, 4\}$ 逆与线性方程组的最小范数解	71
6.1.6 矩阵 $\{1, 3\}$ 逆与线性方程组的最小二乘解	72
6.1.7 矩阵M-P逆与线性方程组的最小范数最小二乘解	73
6.1.8 Schur补与分块矩阵的 $\{1\}$ 逆	74
6.2 矩阵Drazin逆	76
6.2.1 矩阵Drazin逆的定义及其存在唯一性	76
6.2.2 矩阵Drazin逆的性质	77
6.3 矩阵群逆	80
习 题	81

第7章 矩阵的Kronecker积和Hadamard积	84
7.1 矩阵的Kronecker积的定义和性质	84
7.2 矩阵的Kronecker积与线性矩阵方程的解	90
7.3 矩阵的Hadamard积	91
习 题	93
第8章 幂等矩阵与投影算子	95
8.1 幂等矩阵	95
8.2 投影算子与投影矩阵	99
8.3 正交投影矩阵	102
习 题	103
第9章 矩阵的特征值和奇异值不等式	104
9.1 Courant-Fischer定理	104
9.2 Courant-Fischer定理的应用	105
9.2.1 Sturm分离原理	105
9.2.2 Weyl型不等式	106
9.3 Kantorarich不等式	109
习 题	111
第二部分 提高篇	
第10章 非负矩阵	115
10.1 非负矩阵的定义及其性质	115
10.2 Perron定理	117
10.3 Perron-Frobenius定理	121
10.4 M 矩阵	125
习 题	129
第11章 线性矩阵不等式	131
11.1 Schur补引理及其应用	132
11.2 Dualization引理	134
11.3 Projection引理及其应用	136
11.4 含线性参数的线性矩阵不等式	142
11.5 鲁棒控制中的几个基础不等式	145

11.6	含范数有界不确定性的线性矩阵不等式	149
11.7	含线性分式不确定性的线性矩阵不等式	151
11.8	积分不等式	152
11.8.1	Jensen不等式及其推广	153
11.8.2	两个不等式的比较	160
	习 题	161
第12章	矩阵对的分解和标准型	163
12.1	(非)正则矩阵对的等价标准型	163
12.2	矩阵对的能控能观结构分解	170
12.3	能控矩阵对的规范形	175
12.4	满足秩条件的矩阵对的标准型	179
	习 题	186
第13章	矩阵对的广义特征值与特征向量链	188
13.1	矩阵对的广义特征值与广义特征向量链的定义	188
13.2	矩阵对的广义特征值与广义特征向量链的性质	189
第14章	矩阵测度	192
	习 题	197
第15章	Courant-Fischer定理的推广	198
15.1	一般情形	198
15.2	两个矩阵乘积的奇异值和特征值不等式	208
15.3	两个矩阵和的奇异值和特征值不等式	211
	习 题	213
第16章	代数Riccati矩阵方程	215
16.1	Lyapunov矩阵方程	215
16.1.1	矩阵对的能稳性和能检测性	215
16.1.2	连续Lyapunov矩阵方程	216
16.1.3	内矩阵	217
16.2	Hamilton矩阵	219
16.3	代数Riccati矩阵方程的实对称稳定解	221

16.4	H_2 范数与 H_2 代数Riccati矩阵方程	226
16.4.1	H_2 范数的定义	226
16.4.2	H_2 范数的计算	228
16.4.3	H_2 代数Riccati矩阵方程的实对称半正定稳定解	230
16.5	H_∞ 范数与 H_∞ 代数Riccati矩阵方程	231
16.5.1	H_∞ 范数的定义	231
16.5.2	H_∞ 范数与 H_∞ 代数Riccati矩阵方程	233
16.5.3	H_∞ 范数的计算	238
习 题		240
第17章	有理实函数矩阵的既约分解	242
附录A	非奇异 M 矩阵的等价性证明	250
A.1	预备知识	250
A.2	非奇异 M 矩阵的等价性证明	254
附录B	定理11.5.1的证明	265
参考文献		267

第一部分 基础篇

第1章 预备知识

本章主要介绍内积空间的相关概念, 以及几种矩阵分解和标准型, 它们是学习本书的基础. 矩阵标准型在矩阵分析中有着非常重要的作用, 它起到简化问题的作用. 每种标准型都给处理某一类问题带来方便, 如: 等价分解可用来处理许多与秩、行列式相关的问题; Fitting分解可用来处理与矩阵Drazin逆相关的问题; Jordan分解可用来解决与矩阵相似相关的问题; 奇异值分解可用来解决与矩阵Moore-Penrose逆相关的问题.

1.1 内积空间

定义 1.1.1 (内积) 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 如果映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ 满足下面的(i)~(iii), 则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 上的内积(inner product).

$$(i) \quad \langle x, y \rangle = \begin{cases} \overline{\langle y, x \rangle}, & \text{若 } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \\ \langle y, x \rangle, & \text{若 } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \end{cases} \quad \forall x, y \in V;$$

$$(ii) \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V, \text{ 并且等号成立的充要条件是 } x = 0;$$

$$(iii) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

称定义了内积的线性空间为内积空间(inner product space). 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时, 称内积空间为酉空间(unitary space); 当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时, 称内积空间为欧氏空间(Euclidean space).

性质 1.1.1 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的内积空间, 则

$$(i) \quad \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F};$$

$$(ii) \quad \langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0, \quad \forall x \in V;$$