NG YU KONGZHI
IG
DE
JUZHEN LILUN
(DI-ER BAN)

系统与控制中的
矩阵理论

（第2版）

张　显　仲光苹　高翔宇◇编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

ONG YU KONGZHI
ONG
DE
JUZHEN LILUN
（DI-ER BAN）

系统与控制中的矩阵理论

（第2版）

张 显 仲光苹 高翔宇◇编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

系统与控制中的矩阵理论 / 张显等编著. -- 2版
. -- 哈尔滨 : 黑龙江大学出版社 ; 北京 : 北京大学出
版社, 2017.8
ISBN 978-7-5686-0112-2

Ⅰ. ①系… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①矩阵一理论 Ⅳ.
①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 124384 号

系统与控制中的矩阵理论
XITONG YU KONGZHI ZHONG DE JUZHEN LILUN
张 显 仲光苹 高翔宇 编著

责任编辑 肖嘉慧
出版发行 北京大学出版社 黑龙江大学出版社
地 址 北京市海淀区成府路 205 号 哈尔滨市南岗区学府三道街 36 号
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787×1092 1/16
印 张 18
字 数 333 千
版 次 2017 年 8 月第 1 版
印 次 2017 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5686-0112-2
定 价 45.00 元

第2版前言

本书第1版于2011年8月出版以来，一直是黑龙江大学数学科学学院的本科生和研究生教材，也被中南大学、沈阳航空航天大学、东北石油大学、哈尔滨理工大学等高校的一些同人作为参考书，得到了这些高校师生的欢迎. 在整个修改过程中，得到了许多同行、同事的热情帮助，特别是黑龙江大学数学科学学院的王艳涛老师. 张显2011~2016年间的在读研究生也做了许多书稿的校对工作. 本次修订也得到了黑龙江大学出版社和教务处的大力支持. 我们在此表示衷心的感谢.

这次新版保持了第1版的基本内容和特色，同时吸收了好的建议，主要修订如下:

1. 调整了章节顺序. 本书第一作者张显为黑龙江大学数学科学学院讲授研究生课程“矩阵代数”和本科课程“矩阵分析”，2011~2016年一直选用本书第1版作为主要教材. 基于使用过程中学生的感受，以及读者向我们提出的一些宝贵意见，这次修订将内容分为两部分：第一部分是基础篇，主要涉及矩阵理论中常用的一些基本概念和重要结论；第二部分为提高篇，主要涉及系统与控制中常用的经典矩阵理论.

2. 增加了一些内容. 这次修订增加了一些系统和控制文献中经常涉及的矩阵理论，包括非负矩阵(第10章)、Jensen不等式的推广(第11.8节)、有理实函数矩阵的既约分解(第17章)、$\boldsymbol{H}_2$范数和$\boldsymbol{H}_\infty$范数(第16.4、16.5节)等. 值得指出的是，Jensen不等式的推广介绍的是近两年刚刚发表的成果.

3. 简化了一些结论的证明. 主要包括矩阵m_p-范数与向量p范数的相容性(第2.3节)、矩阵秩可加性的充要条件(第5.2节)等.

4. 修订了第1版的笔误和打字错误.

尽管已经做了努力，但由于我们水平有限，本书可能仍有不当之处，甚至错误，热诚地欢迎各位同行和读者批评指正.

作者
2017年4月于哈尔滨

第1版前言

本书的第一作者张显，曾连续五年为黑龙江大学数学科学学院的研究生讲授"矩阵代数"课程，本书是在其讲稿的基础上，进行增删、改写而成的. 书中详细、准确地介绍了矩阵的列空间与核空间、矩阵(对)分解与标准型、向量范数、矩阵序列的极限与矩阵级数、函数矩阵的微积分、矩阵特征值和奇异值的不等式、矩阵广义逆、线性矩阵不等式、代数Riccati矩阵方程等方面的内容. 力求做到论述严谨、深入浅出，能够体现矩阵的理论、思想和方法. 为了便于读者理解和消化内容，每章均配有适量的习题，较难的习题附有提示.

本书有两个特色：一是为了内容的连贯、衔接，方便读者阅读，作者给出了许多与原文献不同的证明；二是部分内容摘自近几年出版的控制方面的学术论文，其中有的是作者的科研成果.

全书共分十二章，第一至七章及附录A至D由仲光苹执笔，第八至十一章及附录E和F由高翔宇执笔，第十二章由张显执笔，最后由张显统稿.

本书适合作为系统与控制等相关专业的研究生教材，也可作为数学系本科生的选修课教材，还可供相关专业的高等学校教师、广大科技工作者、工程技术人员参考.

本书的部分内容摘自国内外的同类著作、相关文献以及黑龙江大学曹重光教授的讲稿，在此向这些作者表示衷心的感谢.

本书的出版得到了黑龙江省精品课程(近世代数)建设经费的资助，在此深表谢意，同时还要感谢黑龙江大学和东北石油大学的有关领导和同志的大力支持和帮助. 黑龙江大学数学科学学院的一些研究生参与了本书的打字和校对工作，在此一并致谢.

由于我们水平有限，本书可能有不当之处，甚至错误，热诚地欢迎各位同行专家和读者批评指正.

作者

2011年3月于哈尔滨

符　号

如果没有特殊说明, 本书将使用下面的符号.

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{F}$	$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$
$\mathbb{F}^n$	集合$\mathbb{F}$中所有n维列向量的集合
$\mathbb{F}^{m\times n}$	集合$\mathbb{F}$中所有$m \times n$矩阵的集合
$\mathbb{F}_k^{m\times n}$	集合$\mathbb{F}^{m\times n}$中所有秩为k矩阵的集合
$\max$	最大值
$\min$	最小值
$\lambda_{\max}(\cdot)$	矩阵的最大特征值
$\lambda_{\min}(\cdot)$	矩阵的最小特征值
$\sigma_{\max}$	矩阵的最大奇异值
$\sigma_{\min}$	矩阵的最小奇异值
$\mathcal{R}(\cdot)$	矩阵的列空间
$\mathcal{N}(\cdot)$	矩阵的核空间
$\boldsymbol{N_A}$	$\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$的一组基作为列排成的矩阵
$\mathrm{span}\{\cdot\}$	生成子空间
$\mathrm{Im}\,(\cdot)$	线性变换的像空间
$\ker(\cdot)$	线性变换的核空间
$\boldsymbol{E}_{ij}$	(i,j)位置元素为1而其余位置为0的矩阵
$\boldsymbol{I}_n$或$\boldsymbol{I}$	(n阶)单位阵
$\boldsymbol{0}_{m\times n}$或$\boldsymbol{0}$	($m \times n$阶)零矩阵
$\boldsymbol{A}_{ij}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的(i,j)位置元素的代数余子式
$\mathrm{adj}(\cdot)$	伴随矩阵
$\det(\cdot)$	行列式
$\mathrm{rank}(\cdot)$	秩
$\lambda(\cdot)$	矩阵的所有特征根的集合

$\{\cdot\}_{o.n.}$	标准正交向量组
$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{B} < \boldsymbol{A}$	矩阵$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$是实对称(复Hermite)正定矩阵
$\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{B}$ 或$\boldsymbol{B} \leqslant \boldsymbol{A}$	矩阵$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$是实对称(复Hermite)半正定矩阵
$\mathbb{RH}_2$	所有极点的实部均小于0的严真传递函数矩阵全体
$\mathbb{RH}_2^{\perp}$	所有极点的实部均大于0的严真传递函数矩阵全体
$\mathbb{RH}_\infty$	所有极点的实部均小于0的传递函数矩阵全体
$\mathbb{RH}_\infty^{\perp}$	所有极点的实部均大于0的传递函数矩阵全体
$\boldsymbol{G}^{\sim}(s)$	传递函数矩阵$\boldsymbol{G}(-s)^T$
$\rho(\cdot)$	谱半径
$\mathrm{tr}(\cdot)$	迹
$(\cdot)^{-1}$	逆
$(\cdot)^T$	转置
$(\cdot)^*$	共轭转置
$\overline{(\cdot)}$	共轭
$\lvert\cdot\rvert$	复数的模长
dim	维数
$\int$	积分
lim	极限
diag	对角(块)矩阵
$(\cdot)^{\perp}$	正交补
$\lVert\cdot\rVert$	范数
$\lVert\cdot\rVert_1$	1−范数
$\lVert\cdot\rVert_2$	2−范数或谱范数
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	∞−范数或$\boldsymbol{H}_\infty$范数
$\lVert\cdot\rVert_F$	Frobenius范数
$\mathrm{Cond}_{\lVert\cdot\rVert}$或Cond	条件数
sup	上确界
inf	下确界
$\mathrm{Ind}(\cdot)$	矩阵的指标
$(\cdot)_d$	矩阵的Drazin逆
$(\cdot)_g$	矩阵的群逆
$(\cdot)^{(1)}$	矩阵的$\{1\}$逆
$(\cdot)\{1\}$	矩阵的所有$\{1\}$逆的集合
$(\cdot)^{(1,2)}$	矩阵的$\{1,2\}$逆
$(\cdot)\{1,2\}$	矩阵的所有$\{1,2\}$逆的集合

$(\cdot)^{(1,3)}$	矩阵的$\{1,3\}$逆
$(\cdot)\{1,3\}$	矩阵的所有$\{1,3\}$逆的集合
$(\cdot)^{(1,4)}$	矩阵的$\{1,4\}$逆
$(\cdot)\{1,4\}$	矩阵的所有$\{1,4\}$逆的集合
$(\cdot)^{+}$	矩阵的Moore-Penrose逆
$\mu_{\lVert\cdot\rVert}(\cdot)$ 或$\mu(\cdot)$	矩阵测度
$\mathrm{Vec}(\cdot)$	拉直运算
$\boldsymbol{M}/\boldsymbol{A}$	矩阵$\boldsymbol{M}$关于主子阵$\boldsymbol{A}$的Schur补
$\widehat{\boldsymbol{M}/\boldsymbol{A}}$	矩阵$\boldsymbol{M}$关于主子阵$\boldsymbol{A}$ 的广义Schur补
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}$ 或$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})$	变量$\boldsymbol{A}$ 对变量$\boldsymbol{x}$求导数
$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}$	变量$\boldsymbol{A}$对变量$\boldsymbol{x}$求偏导数
$\boldsymbol{C}_{k,X,Y}$	矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{XY} & \cdots & \boldsymbol{X}^{k-1}\boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{P}^{L,M}$	从子空间M到子空间L的投影算子
$\boldsymbol{P}^{L}$	$\boldsymbol{P}^{L,L}$
$\boldsymbol{P}_{L,M}$	投影算子$\boldsymbol{P}^{L,M}$在给定基下的矩阵
$\boldsymbol{P}_{L}$	正交投影算子$\boldsymbol{P}_{L,L^{\perp}}$
$\boldsymbol{C}_{n}^{m}$	从n个元素中任取m个的组合数
$\mathbb{F}[\boldsymbol{x}]_n$	$\mathbb{F}$上所有次数小于n的多项式和零多项式的集合
$\sum$	求和
$\prod$	乘积
$\otimes$	Kronecker积
$\boldsymbol{A}^{[k]}$	$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{A}$ (k 个$\boldsymbol{A}$)
$\circ$	Hadamard积
e_i	单位矩阵的第i列
$\mathrm{Re}(\cdot)$	实部
$\mathrm{Im}(\cdot)$	虚部
$\mathbb{C}^{-}$	左半开复平面
$\mathbb{C}^{+}$	右半开复平面
$\overline{\mathbb{C}^{+}}$	右半闭复平面
$\overline{\mathbb{C}^{-}}$	左半闭复平面
$:=$	定义
$\Leftrightarrow$	等价于
$\Rightarrow$	推出
$\forall$	任意的

$\subseteq$	包含于
$\supseteq$	包含
$\in$	属于
$\notin$	不属于
□	结束符

目　录

第一部分　基础篇

第1章　预备知识

本章主要介绍内积空间的相关概念, 以及几种矩阵分解和标准型, 它们是学习本书的基础. 矩阵标准型在矩阵分析中有着非常重要的作用, 它起到简化问题的作用. 每种标准型都给处理某一类问题带来方便, 如:等价分解可用来处理许多与秩、行列式相关的问题; Fitting分解可用来处理与矩阵Drazin逆相关的问题; Jordan分解可用来解决与矩阵相似相关的问题; 奇异值分解可用来解决与矩阵Moore-Penrose逆相关的问题.

1.1　内积空间

定义 1.1.1 (内积)　设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, 如果映射$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{F}$满足下面的(i)~(iii), 则称$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$V$上的内积(inner product).

(i) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \begin{cases} \overline{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}, & 若\mathbb{F}=\mathbb{C}, \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle, & 若\mathbb{F}=\mathbb{R}, \end{cases}\quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V;$

(ii) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \geqslant 0, \forall \boldsymbol{x}\in V$, 并且等号成立的充要条件是$\boldsymbol{x}=0$;

(iii) $\langle \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\beta\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle, \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V, \alpha,\beta\in\mathbb{F}$.

称定义了内积的线性空间为内积空间(inner product space). 当$\mathbb{F}=\mathbb{C}$时, 称内积空间为酉空间(unitary space); 当$\mathbb{F}=\mathbb{R}$时, 称内积空间为欧氏空间(Euclidean space).

性质 1.1.1　设V是$\mathbb{F}$上的内积空间, 则

(i) $\langle \boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}+\beta\boldsymbol{z}\rangle = \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\overline{\beta}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle,\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V, \alpha,\beta\in\mathbb{F}$;

(ii) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{0}\rangle = \langle \boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\rangle = 0,\ \forall \boldsymbol{x}\in V$;