一致连续与一致收敛

吕通庆　编

人民教育出版社

本书是作为数学分析中有关部分的教学参考书编写的. 是在读者已经熟悉连续、收敛概念的基础上进一步讨论一致连续、一致收敛的概念及性质的. 其特点是用较多的例题说明定理条件的作用. 可供综合大学、师范院校数学系师生参考. 也可作为自学数学分析读者的辅助读物.

一致连续与一致收敛

吕通庆 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 9.375 字数 210,000

1981 年 9 月第 1 版　1982 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—12,000

书号 13012·0653　　定价 0.96 元

序

本书是做为数学分析中有关部分的教学参考书编写的. 在这里,我们认为读者已经熟悉极限论,一元微积分,二元微积分,级数和广义积分,以及有关集合的基本知识. 因此,涉及到上述内容,我们都直接引用.

本书是在读者已经熟悉连续,收敛的基础上,进一步讨论一致连续,一致收敛的. 读者要特别注意一致连续与连续,一致收敛与收敛之间的联系和区别. 尤其重要的是,读者要掌握一致连续函数有哪些一般的连续函数所不具有的性质;一致收敛函数级数有哪些一般的收敛函数级数所不具有的性质;一致收敛含参变量广义积分有哪些一般的收敛含参变量广义积分所不具有的性质. 这些问题搞清楚了,读者就会真正了解到研究一致连续和一致收敛的意义. 为此,我们设计、编选了大量的例题,来说明定理条件的作用.

由于函数级数的理论基础是函数列,含参变量广义积分的理论基础是二元函数关于单变量的极限,因此,我们要把主要精力集中在研究函数列和二元函数关于单变量的极限上. 另一方面,当 $n\to+\infty$ 时序列 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性,当 $x\to\infty$ 时 $f(x,y)$ 关于 y 的一致收敛性,当 $x\to a$ 时 $f(x,y)$ 关于 y 的一致收敛性,三者之间有密切的联系;函数级数的一致收敛性,含参变量无穷限积分的一致收敛性,含参变量无界函数积分的一致收敛性,三者之间也有密切的联系. 所以,我们既要注意纵的联系,又要注意横的联系.

最后,诚恳期望同志们对本书的缺点错误给予批评指正.

编　者

于一九七九年元月

目　录

第一节　一致连续函数

我们知道，函数的连续性，是建立在点上的，即使是函数在区间上的连续性，也是建立在点上的．我们现在要讨论的函数的一致连续性，则是建立在整个区间上的．就是说，函数的连续性反映了函数的局部性质，而函数的一致连续性则反映了函数在整个区间上的整体性质．我们要注意二者的联系和区别．

一　定义

我们知道，函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，指的是对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立．这里，对给定的 $\varepsilon>0$，δ 并不唯一，而有无穷多个．事实上，若 δ 满足连续性定义的要求，那么，$\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{3}, \cdots, \frac{\delta}{n}, \cdots$ 都满足连续性定义的要求．这无穷多个满足连续性定义要求的 δ，构成一个无穷数集 $\{\delta$: 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立$\}$，我们记为 Δ．定义

$$\delta_0=\begin{cases}\sup\Delta, & \text{如果}\ \Delta\ \text{有上界},\\ 1, & \text{如果}\ \Delta\ \text{无上界}\end{cases}$$

则 δ_0 是唯一的正数．下面证明 δ_0 满足连续性定义的要求，即 $\delta_0\in\Delta$．事实上，只要 $|x-x_0|<\delta_0$，依 δ_0 的定义，存在 $\delta_1\in\Delta$，使得 $\delta_1>|x-x_0|$，即 $|x-x_0|<\delta_1$．由 Δ 的性质，可知 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．这就证明了 δ_0 满足连续性定义的要求．于是，对任意 $\varepsilon>0$，都存在唯一的如上定义的 $\delta_0>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta_0$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立．

下面假设函数 $f(x)$在区间X上连续,即在X上的每一点 x_0 都连续(如果X包括端点,则在端点右连续或左连续). 任意给定 $\varepsilon>0$,则对任一 $x_0\in X$,都存在唯一的如上定义的 $\delta_0>0$,使得当 $x\in X$且$|x-x_0|<\delta_0$ 时,恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立. 显然这个 δ_0 与 x_0 有关,就是说这个 δ_0 对于 x_0 满足连续性定义的要求,而对于其它点就未必如此. 那么,有没有那样一个 $\delta>0$,使对区间X上的每一点 x_0 都适合于连续性定义的要求呢?

自然,区间X上的所有点所对应的如上定义的 δ_0 构成一个数集$\{\delta_0:x_0\in X\}$. 显然它有下界,例如 0 就是它的一个下界. 从而有下确界,且 $\inf\{\delta_0:x_0\in X\}\geqslant 0$. 于是,

1° 如果 $\inf\{\delta_0:x_0\in X\}>0$,那么它就对区间 X 上的每一点 x_0 都适合于连续性定义的要求;

2° 如果 $\inf\{\delta_0:x_0\in X\}=0$, 则任何 $\delta>0$ 均不能对区间 X 上的每一点 x_0 都适合于连续性定义的要求. 事实上,对任意正数 $\delta<1$,依下确界的定义,都存在 $\bar{\delta}_0\in\{\delta_0: x_0\in X\}$,使 $\bar{\delta}_0<\delta<1$, 此时必有 $\bar{\delta}_0=\sup\overline{\Delta}=\sup\{\delta$: 当 $x\in X$ 且 $|x-\bar{x}_0|<\delta$时, 恒有$|f(x)-f(\bar{x}_0)|<\varepsilon$ 成立$\}$,此处 $\bar{x}_0$ 是 X 的某一点.而$\delta>\bar{\delta}_0$,故 δ 对于 $\bar{x}_0\in X$ 就不适合于连续性定义的要求.

由此可见,如果第二种情况,亦即 $\inf\{\delta_0: x_0\in X\}=0$, 永远不发生,那么,对于区间 X 上的连续函数 $f(x)$来说,当任意给定一个 $\varepsilon>0$ 以后,就一定存在 $\delta>0$,使对区间 X 上的每一点 x_0 都适合于连续性定义的要求. 然而,严峻的现实是,第二种情况,亦即 $\inf\{\delta_0:x_0\in X\}=0$,是完全可能出现的.

考虑函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内的情形. 设 x_0 是$(0, 1)$内的任意一点. 对任意正数 $\varepsilon<1$, 欲使当 $x\in(0,1)$且$|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$$

即

$$-\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}<x-x_0<\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}$$

成立，应取 $\delta\leqslant\min\left\{\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0},\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}\right\}=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$. 因此 $\Delta=\{\delta$: 当 $0<x<1$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$ 成 立$\}=\left\{\delta:\ 0<\delta\leqslant\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\right\}$, 而 $\delta_0=\sup\Delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$. 所以，

$$\inf\{\delta_0:x_0\in(0,1)\}=\inf\left\{\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}:\ 0<x_0<1\right\}=0.$$

于是，任何 $\delta>0$ 都不能对区间 $(0, 1)$ 内的每一点 x_0 都适合于连续性定义的要求.

上面的讨论告诉我们，一般说来，区间 X 上的连续函数并不具有这种性质：

对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使对区间 X 上的任意一点 x_0，都适合于连续性定义的要求.

就是说，这是一种新的性质. 这种新的性质，叫做一致连续性.

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使对区间 X 上的任意一点 x_0，当 $x\in X$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续.

这里，哪个是 x_0，哪个是 x，显然是无关紧要的. 因此，我们不加区分，而用 x', x'' 来表示它们. 这就得到我们常见的一致连续性定义.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使对区间 X 上的任意两点 x'、x''，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续.

由定义立刻可以知道，若函数 $f(x)$在区间 X 上一致连续，则在 X 上连续.

按定义容易证明函数 $f(x)=x$ 和常数 c 都在$(-\infty, +\infty)$内一致连续.

例 1 试证 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内一致连续.

证明 对任意 $\varepsilon>0$，欲使当$|x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$|\sin x'-\sin x''|$$
$$=\left|2\cos\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}\right|<\varepsilon$$

成立，只要当$|x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$|x'-x''|<\varepsilon$$

成立，只要取 $\delta=\varepsilon$ 即可. 依定义，$\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内一致连续.

同理，$\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内一致连续.

例 2 试证$\sqrt{x}$在$[1, +\infty)$上一致连续.

证明 对任意 $\varepsilon>0$，欲使当 $x'\geqslant 1$，$x''\geqslant 1$ 和$|x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}<\varepsilon$$

成立，只要当 $x'\geqslant 1, x''\geqslant 1$ 和$|x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$|x'-x''|<2\varepsilon$$

成立，只要取 $\delta=2\varepsilon$ 即可. 依定义，$\sqrt{x}$ 在$[1, +\infty)$上一致连续.

例 3 试证 x^2 在$[a, b]$上一致连续，但是在$(-\infty, +\infty)$内不一致连续.

证明 对任意 $\varepsilon>0$，欲使当 $a\leqslant x'\leqslant b, a\leqslant x''\leqslant b, |x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$|(x')^2-(x'')^2|=|x'+x''||x'-x''|<\varepsilon$$

成立，只要当$|x'-x''|<\delta$时，恒有

$$|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{2c}$$

成立，此处$c=\max\{|a|,|b|\}$. 只要取$\delta=\frac{\varepsilon}{2c}$即可. 依定义，$x^2$在$[a,b]$上一致连续.

但是，存在$\varepsilon_0=1$，对任意$\delta>0$，都存在$x'=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$和$x''=\frac{1}{\delta}$，满足$|x'-x''|<\delta$，却使

$$\begin{aligned}|(x')^2-(x'')^2|&=\left|\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)^2-\frac{1}{\delta^2}\right|\\&=1+\frac{\delta^2}{4}>1\end{aligned}$$

成立. 依定义，x^2在$(-\infty,+\infty)$内不一致连续.

例 4 试证$\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$内不一致连续.

证明 存在$\varepsilon_0=1$，对任意$\delta>0$，都有

$$x'=\frac{1}{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi},\quad x''=\frac{1}{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi+\frac{\pi}{2}},$$

满足$x',x''\in(0,1)$，且

$$\begin{aligned}|x'-x''|&=\left|\frac{1}{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi}-\frac{1}{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi+\frac{\pi}{2}}\right|\\&=\frac{\frac{\pi}{2}}{\left\{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi\right\}\left\{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi+\frac{\pi}{2}\right\}}\\&<\frac{1}{2\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)}<\frac{\delta}{2}<\delta,\end{aligned}$$

却使

$$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|$$

$$=\left|\sin\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi-\sin\left\{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi+\frac{\pi}{2}\right\}\right|$$

$$=\left|\sin\left\{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi+\frac{\pi}{2}\right\}\right|=1$$

成立. 依定义, $\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$内不一致连续.

例 5 试证 $x\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内不一致连续.

证明 借助于拉格朗日定理, 容易证明当 $0<x<\frac{\pi}{3}$时, 恒有

$$\sin x>\frac{x}{2}$$

成立.

存在 $\varepsilon_0=\frac{\pi}{4}$, 对任意正数 $\delta<\frac{2\pi}{3}$, 都存在 $x_1=\left[\frac{1}{\delta}+1\right]\pi$, $x_2=\left[\frac{1}{\delta}+1\right]\pi+\frac{\delta}{2}$, 满足 $|x_1-x_2|<\delta$, 却使

$$|x_1\sin x_1-x_2\sin x_2|$$

$$=\left(\left[\frac{1}{\delta}+1\right]\pi+\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{\delta}{2}$$

$$>\frac{\pi}{\delta}\sin\frac{\delta}{2}>\frac{\pi}{\delta}\cdot\frac{\delta}{4}=\frac{\pi}{4}$$

成立. 依定义, $x\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内不一致连续.

定义 若对任意$[\alpha,\beta]\subset X$, $f(x)$在$[\alpha,\beta]$上都一致连续, 则称函数 $f(x)$在区间 X 内闭一致连续.

由定义立刻可以知道, 若函数 $f(x)$在区间 X 上一致连续, 则在 X 内闭一致连续. 但反之未必成立.

例如, x^2 在$(-\infty,+\infty)$内闭一致连续, 但在$(-\infty,+\infty)$内不

一致连续(见例 3).

二　一致连续的条件

我们知道，若函数 $f(x)$在区间 X 上一致连续，则必连续. 但反之未必成立. 例如，$\frac{1}{x}$在$(0,1)$内就是如此. 然而，对于有限闭区间来说，这种情况不会发生. 这就是下面的定理 1.

定理 1　函数 $f(x)$在$[a, b]$上一致连续的充分必要条件是 $f(x)$在$[a,b]$上连续.

康托尔定理

证明　显然只需证明充分性.

证法 I　用魏尔斯特拉斯定理证明. 魏尔斯特拉斯

假设 $f(x)$在$[a,b]$上不一致连续，即存在 $\varepsilon_0>0$，对任意$\delta>0$，都在$[a, b]$上存在两点 x'_0 和 x''_0，满足$|x'_0-x''_0|<\delta$，却使$|f(x'_0)-f(x''_0)|\geqslant\varepsilon_0$ 成立. 因此，对于 $\delta=\frac{1}{n}$，在$[a,b]$上存在两点 x'_n 和 x''_n，满足$|x'_n-x''_n|<\frac{1}{n}$，却使$|f(x'_n)-f(x''_n)|\geqslant\varepsilon_0$ 成立 $(n=1, 2, \cdots)$. 于是，我们得到两个数列$\{x'_n\}$和$\{x''_n\}$，满足

1° $x'_n\in[a,b]$, $x''_n\in[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$;

2° $|x'_n-x''_n|<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$;

3° $|f(x'_n)-f(x''_n)|\geqslant\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$.

由 1°，$\{x'_n\}$有界，依魏尔斯特拉斯定理，$\{x'_n\}$有收敛的子列$\{x'_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}=\xi$. 依数列极限的性质，$\xi\in[a,b]$.

由 2°，$\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n-x''_n)=0$. 依数列与其子列的关系定理，$\lim\limits_{k\to\infty}(x'_{n_k}-x''_{n_k})=0$. 由于已经知道$\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}=\xi$，故$\lim\limits_{k\to\infty}x''_{n_k}=\xi$. 再由已知，$f(x)$ 在 ξ 连续（或右连续或左连续），依函数极限与数列

极限的关系定理,

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(\xi), \quad \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(\xi),$$

从而,

$$\lim_{k\to\infty}[f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})] = 0.$$

由3°, $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$对任意自然数 k 都成立, 此与刚证出的$\lim\limits_{k\to\infty}[f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})] = 0$ 相矛盾. 于是定理得证.

证法 II 用有限覆盖定理证明.

对任意 $\varepsilon>0$, 由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 故对任 $x_0\in[a,b]$, 都存在 $\delta_0>0$, 当 $x\in[a,b]$且$|x-x_0|<\delta_0$时, 恒有$|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$成立.

现对$[a,b]$上的每一点 x_0, 都做一小开区间$\left(x_0-\dfrac{\delta_0}{2}, x_0+\dfrac{\delta_0}{2}\right)$, 则这些小开区间构成的开区间集$\left\{\left(x_0-\dfrac{\delta_0}{2}, x_0+\dfrac{\delta_0}{2}\right): x_0\in[a,b]\right\}$覆盖了$[a,b]$. 依有限覆盖定理, $\left\{\left(x_0-\dfrac{\delta_0}{2}, x_0+\dfrac{\delta_0}{2}\right): x_0\in[a,b]\right\}$中必有有限个小开区间覆盖了$[a,b]$, 记这有限个小开区间为

$$\left(x_1-\frac{\delta_1}{2}, x_1+\frac{\delta_1}{2}\right), \left(x_2-\frac{\delta_2}{2}, x_2+\frac{\delta_2}{2}\right),$$
$$\cdots, \left(x_n-\frac{\delta_n}{2}, x_n+\frac{\delta_n}{2}\right).$$

今取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta_1}{2}, \dfrac{\delta_2}{2}, \cdots, \dfrac{\delta_n}{2}\right\}$, 则对$[a,b]$上的任意两点 x' 和 x'', 只要$|x'-x''|<\delta$, 由于$\left(x_i-\dfrac{\delta_i}{2}, x_i+\dfrac{\delta_i}{2}\right)(i=1, 2, \cdots, n)$覆盖了$[a,b]$, 故有$\left(x_{i0}-\dfrac{\delta_{i0}}{2}, x_{i0}+\dfrac{\delta_{i0}}{2}\right)(1\leqslant i_0\leqslant n)$覆盖了$x'$, 即

$|x'-x_{i0}|<\frac{\delta_{i0}}{2}$，故 $|x''-x_{i0}|\leqslant|x'-x''|+|x'-x_{i0}|<\delta+\frac{\delta_{i0}}{2}\leqslant$ δ_{i0}. 就是说，x', x'' 都满足 $|x-x_{i0}|<\delta_{i0}$，于是有

$$|f(x')-f(x_{i0})|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x'')-f(x_{i0})|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立，从而有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

成立. 依定义，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

对于任意区间，我们有下面的推论.

推论 函数 $f(x)$ 在区间 X 内闭一致连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上连续.

证明 先证必要性.

任取 $x_0\in X$，如果

1° x_0 不是区间 X 的端点，则总存在一个 $[a, b]\subset X$，使 $a<x_0<b$，由于 $f(x)$ 在 X 内闭一致连续，故在 $[a, b]$ 上一致连续，当然在 $[a, b]$ 上连续，从而在 x_0 点连续；

2° x_0 是 X 的端点，则总存在一个 $[a, b]\subset X$，使 x_0 是 $[a, b]$ 的左端点或右端点，由于 $f(x)$ 在 X 内闭一致连续，故在 $[a, b]$ 上连续，从而在 x_0 点右连续或左连续.

于是，$f(x)$ 在 X 上连续.

下面证明充分性.

任取 $[\alpha, \beta]\subset X$，由于 $f(x)$ 在 X 上连续，当然在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，依定理 1，$f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致连续，即在 X 内闭一致连续.

由此可知，$f(x)$ 在区间 X 上连续的充分必要条件是对任 $[\alpha, \beta]\subset X$，$f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上都连续.

例 6 试证 $\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

证明 由于 $\sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上连续，依定理 1，在 $[0, 1]$ 上一致连

续；又$\sqrt{x}$在$x=1$连续；再依例2，$\sqrt{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.于是，对任意$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使对任意x_1、$x_2\in[0,1]$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon$$

成立；使当$|x-1|<\delta$时，恒有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{1}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立；使对任意$x_3,x_4\in[1,+\infty)$，当$|x_3-x_4|<\delta$时，恒有

$$|\sqrt{x_3}-\sqrt{x_4}|<\varepsilon$$

成立.

因此，对任意$x',x''\in[0,+\infty)$，当$|x'-x''|<\delta$时，若x'、x''都在$[0,1]$或都在$[1,+\infty)$上，则恒有

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon$$

成立；若x'、x''一个在$[0,1]$上，一个在$[1,+\infty)$上，则恒有

$$|x'-1|<\delta,\ |x''-1|<\delta,$$

故恒有

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{1}|<\frac{\varepsilon}{2},\ |\sqrt{x''}-\sqrt{1}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立，从而恒有

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon$$

成立. 依定义，$\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

对于有限非闭区间，我们有下面的定理2.

定理2 函数$f(x)$在(a,b)内一致连续的充分必要条件是$f(x)$在(a,b)内连续且

$$\lim_{x\to a+0}f(x)\ 与\ \lim_{x\to b-0}f(x)$$

都存在.

证明 先证必要性. 显然只消证明

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ 与 } \lim_{x\to b-0} f(x)$$

都存在.

对任意 $\varepsilon>0$, 由于 $f(x)$在(a, b)内一致连续, 故存在正数 $\delta<b-a$, 使对任意 $x'\in(a,b)$, $x''\in(a,b)$, 只要$|x'-x''|<\delta$, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立. 因此, 对任意 x_1, x_2, 只要 $0<x_1-a<\delta$, $0<x_2-a<\delta$, 就有 $x_1\in(a,b)$, $x_2\in(a,b)$, 且$|x_1-x_2|<\delta$, 从而有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立. 依柯西收敛准则, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$存在.

同理, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$存在.

次证充分性. 考虑辅助函数

$$F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a+0} f(x), & x=a\\ f(x), & a<x<b\\ \lim\limits_{x\to b-0} f(x), & x=b\end{cases}$$

则 $F(x)$在$[a,b]$上连续, 依定理 1, 在$[a, b]$上一致连续, 当然在(a,b)内一致连续. 即 $f(x)$在(a,b)内一致连续.

类似地, 可以证明下面的定理 2′ 和 2″.

定理 2′ 函数 $f(x)$在$[a, b)$上一致连续的充分必要条件是 $f(x)$在$[a,b)$上连续且

$$\lim_{x\to b-0} f(x)$$

存在.

定理 2″ 函数 $f(x)$在$(a, b]$上一致连续的充分必要条件是 $f(x)$在$(a,b]$上连续且

$$\lim_{x\to a+0} f(x)$$

存在.

例 7 由于 $\ln x$ 在$(0, e]$上连续, 但

$$\lim_{x\to 0+0}\ln x=-\infty,$$

依定理 2″, $\ln x$ 在 $(0, e]$ 上不一致连续.

对于无穷区间,我们有如下的充分条件.

定理 3 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致连续的充分条件是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) \text{ 与 } \lim_{x\to+\infty}f(x)$$

都存在.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) \text{ 与 } \lim_{x\to+\infty}f(x)$$

都存在,依柯西收敛准则,存在 $l>0$, 当 $x_1<-l, x_2<-l$ 时,恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立;当 $x_3>l, x_4>l$ 时,恒有

$$|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$$

成立. 又由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 当然在 $-l$ 连续,在 l 连续, 在 $[-l, l]$ 上连续, 从而一致连续(见定理 1),故存在 $\delta>0$, 当 $|x-(-l)|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-f(-l)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立;当 $|x-l|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-f(l)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立;对任意 $x_5, x_6\in[-l, l]$, 当 $|x_5-x_6|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x_5)-f(x_6)|<\varepsilon$$

成立.

于是,当 $|x'-x''|<\delta$ 时,如果

1° x'、x'' 均在 $(-\infty, -l)$ 内,那么