

高等财经院校试用教材

经济应用数学基础(二)

线性代数

中国人民大学数学教研室编

中国人民大学出版社

第一章 行列式

本章从二阶、三阶行列式出发, 引入 n 阶行列式的概念, 并讨论行列式的一些基本性质与计算方法, 最后给出用行列式解线性方程组的克莱姆法则。

§ 1.1 二元、三元线性方程组与二阶、三阶行列式

(一) 二元线性方程组与二阶行列式

含有两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

用加减消元法分别消去方程组 (1.1) 中的 x_2, x_1 , 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (1.2)$$

是线性方程组 (1.1) 的解。

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.3)$$

二阶行列式表示的代数和，可以用绘图（图1-1）的方法记忆，即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积。

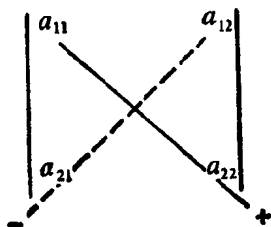


图 1-1

用二阶行列式的记号，线性方程组(1.1)的解(1.2)可以表示为：

当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (1.2')$$

其中分母是方程组(1.1)的系数按它们在方程组中的次序排列构成的行列式，称为方程组的系数行列式；分子是用常数项 b_1, b_2 分别替换行列式中 x_1 所在列的系数和 x_2 所在列的系数后构成的行列式。

例：解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-6=-7 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1+4=3 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2-3=-5 \end{aligned}$$

所以 $x_1 = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$, $x_2 = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$ 是所给方程组的解。

(二) 三元线性方程组与三阶行列式

含有三个未知量三个方程的线性方程组的一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

用加减消元法分别消去方程组 (1.4) 中的 x_2 与 x_3 , x_3 与 x_1 , x_1 与 x_2 ; 当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时, 得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases} \quad (1.5)$$

是线性方程组 (1.4) 的解。

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.6)$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用绘图（图1-2）的方法记忆。其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项。

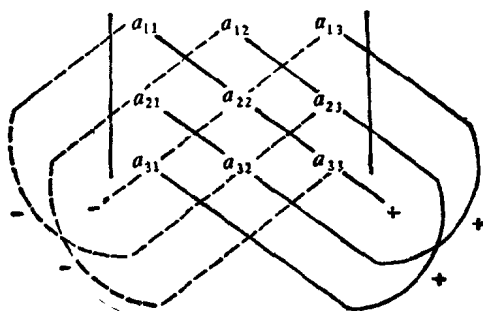


图 1-2

例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times (-9) + 2 \times 6 \times (-7) \\ + 3 \times 4 \times (-8) - 1 \times 6 \times (-8) \\ - 2 \times 4 \times (-9) - 3 \times 5 \times (-7) \\ = -45 - 84 - 96 + 48 + 72 + 105 = 0$$

用三阶行列式的记号，线性方程组(1.4)的解(1.5)可以表示

为:

当 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (1.5')$$

其中分母 D 是方程组(1.4)的系数按它们在方程组中的次序排列构成的行列式,称为方程组的系数行列式;分子 $D_j (j=1, 2, 3)$ 是用常数项 b_1, b_2 和 b_3 分别替换系数行列式 D 中 $x_j (j=1, 2, 3)$ 所在列的系数后构成的行列式。

例: 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} \\ = 10 - 12 + 7 + 56 + 5 + 3 = 69 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 69$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 23$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -23$$

所以 $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{69}{69} = 1$ $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{23}{69} = \frac{1}{3}$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-23}{69} = -\frac{1}{3}$$

是所给方程组的解。

§ 1.2 n 阶行列式的定义

这一节我们将把二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式。为了给出 n 阶行列式的定义，先介绍排列的逆序数的概念。

(一) 排列的逆序数

由数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列。

例如, 1234及2431都是4级排列, 25413是一个5级排列。

n 级排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$

例如, 1, 2, 3三个数码组成的所有三级排列共有 $3!=6$ 个, 它们是123, 132, 213, 231, 312, 321。

定义1.1 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中, 如果有较大的数 i_i 排在较小的数 i_s 前面($i_s < i_i$), 则称 i_i 与 i_s 构成一个逆序。一个 n 级排列中逆序的总数, 称为它的逆序数, 记为:

$$N(i_1i_2\cdots i_n)$$

例如, 排列23154中, 2在1前面, 3在1前面, 5在4前面, 共有三个逆序, 所以 $N(23154)=3$ 。

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数则称为奇排列, 是偶数则称为偶排列。

排列 $12\cdots n$ 的逆序数是零, 我们规定它是偶排列。

例如, 三级排列中,

123, 231, 312 是偶排列,

132, 213, 321 是奇排列。

在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中, 如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调, 得到另一个排列, $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$, 这样的变换, 称为一个对换, 记为对换 (i_s, i_t) 。

例如, 对排列21354施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列24351。

定理1.1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变。

证:

(1) 首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形, 设排列为

$$AijB$$

其中 A, B 表示除 i, j 两个数码外其余的数码, 经过对换 (i, j) , 变为排列

$$AjiB$$

比较上面两个排列中的逆序, 显然, A, B 中数码的次序没有改

变, 并且 i, j 与 A, B 中数码的次序也没有改变, 仅仅改变了 i 与 j 的次序, 因此, 新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i < j$ 时), 或减少了一个逆序(当 $i > j$ 时), 所以它们的奇偶性相反。

(2) 在一般情形, 设排列为

$$A i k_1 k_2 \cdots k_s j B$$

经过对换 (i, j) , 变为排列

$$A j k_1 k_2 \cdots k_s i B$$

新排列可以由原排列中将数码 i 依次与 $k_1, k_2, \dots, k_s, j$ 作 $s+1$ 次相邻对换, 变为

$$A k_1 k_2 \cdots k_s j i B$$

再将 j 依次与 $k_s, \dots, k_2, k_1$ 作 s 次相邻对换得到, 即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到。由(1)的结论可知它改变了奇数次奇偶性, 所以它与原排列的奇偶性相反。

(二) n 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(1) 二阶行列式表示所有不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和。两个元素的乘积可以表示为:

$$a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$j_1 j_2$ 为二级排列, 当 $j_1 j_2$ 取遍了二级排列 $(12, 21)$ 时, 即得到二阶行列式的所有项(不包含符号), 共为 $2! = 2$ 项。

三阶行列式表示所有位于不同的行不同的列的三个元素乘积

的代数和。三个元素的乘积可以表示为:

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

$j_1 j_2 j_3$ 为三级排列, 当 $j_1 j_2 j_3$ 取遍了三级排列时, 即得到三阶行列式的所有项 (不包含符号), 共为 $3! = 6$ 项。

(2) 每一项的符号是, 当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后, 如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 是奇排列则取负号。如在上述二阶行列式中, 当 $N(j_1 j_2)$ 为偶数时取正号, 为奇数时取负号; 在上述三阶行列式中, 当 $N(j_1 j_2 j_3)$ 为偶数时取正号, 为奇数时取负号。

根据这个规律, 可给出 n 阶行列式的定义。

定义 1.2 用 n^2 个元素 $a_{ij} (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 其中横排称为行, 纵排称为列。它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和, 各项的符号是: 当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后, 如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 是奇排列则取负号。因此, n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为:

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.7)$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 构成一个 n 级排列, 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时, 则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项, 共为 $n!$ 项。

当 $n=2$ 时就得到二阶行列式, 当 $n=3$ 时就得到三阶行列式, 一阶行列式 $|a|$ 就是 a 。

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$ 。

例如: 四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中 有 $4! = 24$ 项。

$a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ 列标的排列是 1234, 所以它是 D 的一项, 由于 $N(1234) = 0$, 所以它应取正号。

$a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$ 列标的排列是 4312, 所以它是 D 的一项, 由于 $N(4312) = 5$, 所以它应取负号。

$a_{11} a_{24} a_{33} a_{44}$ 列标的顺序是 1434, 因为它有两个元素同时取自第四列, 所以不是 D 的项。

例: 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 的值}$$

其中 $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

解: 记行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

D 中有很多项为零, 现在考察有哪些项不为零。一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行, 但第一行中只有 a_{11} 不为零, 因而 $j_1 = 1$, 即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零, 其它项均为零; 一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行, 第二行中有 a_{21} 和 a_{22} 不为零, 因第一个元素 a_{11} 已取自第一列, 因此第二个元素不能再取自第一列, 即不能取 a_{21} , 所以第二个元素只能取 a_{22} , 从而 $j_2 = 2$, 即 D 中只有含 $a_{11} a_{22}$ 的那些项可能不为零, 其它项均为零; 这样推下去, 可得 $j_3 = 3, j_4 = 4, \dots, j_n = n$ 。因此, D 中只有 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

这一项不为零，其它项均为零。由于 $N(1\ 2\cdots n)=0$ ，因此这一项应取正号，于是可得：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

我们称上面形式的行列式为下三角形行列式。

同理可得上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)。

特殊情况：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)。

这种行列式称为对角形行列式。

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线。

三角形行列式及对角形行列式的值，均等于主对角线上元素的乘积。

由行列式定义不难得出：一个行列式若有一行（或一列）中

的元素皆为零，则此行列式必为零。

n 阶行列式定义中决定各项符号的规则还可由下面的结论来代替。

定理 1.2 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的一般项可以记为：

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (1.8)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 均为 n 级排列。

证：由于 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列，因此，(1.8) 式中的 n 个元素是取自 D 的不同的行不同的列，所以它是 D 的一项。

如果交换 (1.8) 式中两个元素 $a_{i_s j_s}$ 与 $a_{i_t j_t}$ ，则其行标排列由 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 换为 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ ，由定理 1.1 可知其逆序数奇偶性改变，列标排列由 $j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n$ 换为 $j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n$ 其逆序数奇偶性亦改变，但对换后两下标排列逆序数之和的奇偶性则不改变，即有

$$\begin{aligned} & (-1)^{N(i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n) + N(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} \\ &= (-1)^{N(i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n) + N(j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n)} \end{aligned}$$

所以交换 (1.8) 式中元素的位置，其符号不改变。这样我们总可以经过有限次交换 (1.8) 式中元素的位置，使其行标 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 换为自然数顺序排列，设此时列标排列变为 $k_1 k_2 \cdots k_n$ ，则 (1.8) 式变为：

$$\begin{aligned} & (-1)^{N(1 2 \cdots n) + N(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{1 k_1} a_{2 k_2} \cdots a_{n k_n} \\ &= (-1)^{N(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{1 k_1} a_{2 k_2} \cdots a_{n k_n} \end{aligned}$$

上式结果即为定义中 D 的一般项，也就是说 D 的一般项也可以记为 (1.8) 式的形式。

§ 1.3 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^T 或 D' 。即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 将行列式转置，行列式不变，即 $D^T = D$ 。

证：记 D 的一般项为

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

它的元素在 D 中位于不同的行不同的列，因而在 D^T 中位于不同的列不同的行。所以这 n 个元素的乘积在 D^T 中应为

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

由定理 1.2 可知其符号也是 $(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)}$ 。

因此， D 与 D^T 是具有相同项的行列式，所以 $D = D^T$ 。

由此性质可知，行列式的行具有的性质，它的列也具有相应的性质。

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式变号。

证：设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ \\ (s \text{ 行}) \end{matrix}$$

交换 D 的第 i 行与第 s 行，得到行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ \\ (s \text{ 行}) \end{matrix}$$

记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为:

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

它的元素在 D 中位于不同的行不同的列, 因而在 D_1 中也位于不同的行不同的列, 所以也是 D_1 的一般项的 n 个元素乘积。由于 D_1 是交换 D 的第 i 行与第 s 行, 而各元素所在的列并没有改变, 所以它在 D 中的符号为:

$$(-1)^{N(1 \cdots i \cdots s \cdots n) + N(j_1 \cdots j_i \cdots j_s \cdots j_n)}$$

在 D_1 中的符号则为:

$$(-1)^{N(1 \cdots s \cdots i \cdots n) + N(j_1 \cdots j_i \cdots j_s \cdots j_n)}$$

由于排列 $1 \cdots i \cdots s \cdots n$ 与排列 $1 \cdots s \cdots i \cdots n$ 的奇偶性相反, 所以

$$\begin{aligned} & (-1)^{N(1 \cdots i \cdots s \cdots n) + N(j_1 \cdots j_i \cdots j_s \cdots j_n)} \\ &= -(-1)^{N(1 \cdots s \cdots i \cdots n) + N(j_1 \cdots j_i \cdots j_s \cdots j_n)} \end{aligned}$$

因而 D_1 中的每一项都是 D 的相应项的相反数, 所以 $D_1 = -D$ 。

推论: 如果行列式中有两行 (列) 的对应元素相同, 则此行列式为零。

因为将行列式 D 中具有相同元素的两行互换其结果仍是 D , 但由性质 2 可知其结果应为 $-D$, 因此 $D = -D$, 所以 $D = 0$ 。

性质 3 用数 k 乘行列式的一行 (列), 等于以数 k 乘此行列式。即, 如果设 $D = |a_{ij}|$ 则

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD$$

证： 因为行列式 D_1 的一般项为

$$\begin{aligned} & (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ & = k [(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}] \end{aligned}$$

上面等式右端括号内是 D 的一般项，所以 $D_1 = kD$ 。

由性质 1 可知，对列的情形必然成立。

同样，行列式的其他性质都只对行的情形加以证明就够了。

推论 1：如果行列式某行（列）的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面。

推论 2：如果行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于零。（因为由推论 1 可将行列式中这两行（列）的比例系数提到行列式外面，则余下的行列式有两行（列）对应元素相同，由性质 2 可知此行列式等于零，所以原行列式等于零。）

性质 4 如果将行列式 D 中的某一行（列）的每一个元素都写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式是分别以这两个数为所在行（列）对应位置的元素，其它位置的元素与 D 相同。即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D = D_1 + D_2$

证：因为 D 的一般项是

$$\begin{aligned} & (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij} + c_{ij}) \cdots a_{nj_n} \\ &= (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij} \cdots a_{nj_n} \\ &+ (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{ij} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

上面等式右端第一项是 D_1 的一般项，第二项是 D_2 的一般项，所以 $D = D_1 + D_2$ 。

推论：如果将行列式某一行（列）的每个元素都写成 m 个数（ m 为大于 2 的整数）的和，则此行列式可以写成 m 个行列式的和。

性质 5 将行列式某一行（列）的所有元素同乘以数 k 后加于另一行（列）对应位置的元素上，行列式不变。

证：设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ \\ (s \text{ 行}) \end{matrix}$$

以数 k 乘 D 的第 s 行各元素后加于第 i 行的对应元素上，得