理论物理概论

中册

山东师范大学 李法和 俞雪珍 编

理论物理概论

中册

山东师范大学 李法和 俞雪珍 编

目　录

第二编　电动力学

第二编 电动力学

第一章电磁现象的普遍规律

电动力学是在电磁学的基础上，系统地研究电磁场的基本属性、运动规律及与物质相互作用的基础理论。

一切电磁现象都是通过电磁场来体现的，所谓“路”只是场的特殊情况，从本质上讲场是根本的。

人们对于电磁现象的认识，是随着生产的发展而逐步深化的；到1864年Maxwel总结出了一套普适的场方程组，对电磁现象进行了全面的总结，找到了普遍的规律，使宏观电动力学的理论趋于完备，但它的内容尤其是在各方面的应用仍在不断丰富和发展。

对电磁现象的认识，使人们终于打破了机械论的影响，发现了牛顿——伽俐略时空观念的局限性，导致了相对论的诞生，使物理学产生了一次重要的革命，并成为电动力学的一个重要部分。但后来发现把电磁理论用于微观世界并不太成功，这表明了经典场论的局限性，为此人们对经典场论进行了量子化的“改造”以适应微观世界的要求，这就发展成为现代的一门新学科——量子电动力学，它是现代场论中最重要和最成熟的一部分，但它已超出了本书的范围我们将不涉及。

§1.1 电荷和电场

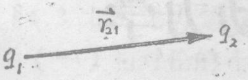

图 1-1

(1)库伦定律　这是静电中一个基本的实验定律，它表明在真空中，二个静止的点电荷之间的相互作用力为

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_{21}&=K\frac{q_1q_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}, \text{ } q_1\text{给}q\text{的力}\\ \vec{F}_{12}&=K\frac{q_1q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}, q_2\text{给}q_1\text{的力}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{—}1)$$

显然$r_{12}=r_{21}$；但$\vec{r}_{12}=-\vec{r}_{21}$，所以$\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$，$K$为比例系数，本书采用国际单位故$K=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，$\varepsilon_0$为真空中的介电系数，$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$法拉/米

这一定律是实验的总结，它无法由理论上推证出来，它的正确性由它推出的结论得到实验上的证明而得到确认。它只适用于静止的电荷之间的相互作用，如果二个电荷是运动的(对观察者来说)那么它们之间的相互作用力就不能再用库伦定律来表示，在运动的情况下，一般说来牛顿第三定律也不成立。如在等速运动的火车上有二个电荷都对火车相对静止，由火车上的观察者来测量它们的相互作用时可用库伦定律即为静电相互作用；但在路基上来看它们都在运动，由于它们之间导相对静止的，故仍有$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$；但由路基上所计算的$\vec{F}_{12}$(或$\vec{F}_{21}$)与火车上所计算的结果并不相同。所以库伦定律能成立的根本条件，是要求电荷是静止的，当然

“静止”的概念是相对的，故对于不同的参考系来说，二个点电荷间的相互作用是不同的。只要知道了静止的二点电荷间的相互作用，原则上也就可以知道一切分布的静电间的相互作用。对线、面和体电荷之间的相互作用也可以使用库伦定律，这只要把它们分成一些小的电荷元就可以进行运算，这不过是个积分问题。

库伦定律不仅可以推广于“非点”也可以推广于介质，介质的存在只是增加了极化电荷，如果把极化电荷考虑进去，就等于考虑了介质（对电的）影响，完全可以按真空中的库伦定律来计算静止的极化电荷和自由电荷或极化电荷之间的相互作用。其比例系数K仍然为$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$。

库仑定律是静电荷间的“独立”作用定律，即两电荷间的相互作用，不因其他电荷的存在而改变，这一特性即表现为场的迭加性。

（2）电场强度　空间某点的电场强度，定义为静止的单位正电荷在该点所受之力，故由库仑定律可知一静止的点电荷q在距它为$\vec{r}$处产生的电场强度即为

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} \tag{1—2}$$

故连续分布于某一区域V'中的电荷在空间任一点$P(x,y,z)$处产生的电场即为

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r'})\,dV'}{r^3}\vec{r} \tag{1—3}$$

其中$\rho(\vec{r'})$为电荷分布的体密度，它是源点$\vec{r'}$的函数，$\vec{r}$为$\rho(\vec{r'})dv$，到场点P的矢径。

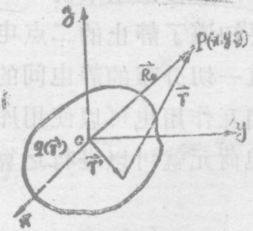

图 1-2

以上公式皆不能用于 $r=0$ 的情况，因为在 $r=0$ 时将不能再把电荷看成“点”电荷。

（3）高斯定理及电场的散度

高斯定理为：净穿出任一闭合面的电通量等于该面所包围的电荷总和的$\frac{1}{\varepsilon_0}$倍。

用点电荷很易证明这一点而不失其普遍性，设有一点电荷q，取任意闭合曲面S求其通量，取面元$d\vec{s}$，以外法线$\vec{n}$单位矢量为正方向，则穿过$d\vec{s}$的电通量为$d\phi$.

$d\Omega$为ds面π对q点所张的立体角，

故穿出正个闭合面S的电通量为

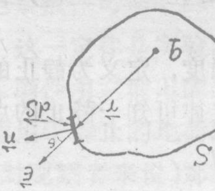

图 1-3

$$d\phi=\vec{E}\cdot d\vec{s}=Eds\cos\theta$$

$$=\frac{qds\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega\ ;$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s d\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0}\qquad(1-4)$$

对任何点电荷皆有如上的结果，高斯定理因而得证。这一结果与电荷在面内的位置无关，即只与总电量有关而与面内电荷的分布无关，通量的正负取决于总电量的正负，若总电量为正，则穿出的通量也为正，总电量为负穿出的通量也

为负即为穿进，这表明电力线是发自正电荷而止于负电荷。

对于连续分布的电荷高斯定理变为

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_s \rho dV \qquad (1—5)$$

体积分号下角的S是标明V为闭合面S所围之体积，由数学上的高斯定理可以得到电场的散度。

$$\because \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=\int \nabla\cdot\vec{E}dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV$$

$$\therefore \quad \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1—6)$$

P为该点的电荷体密度，这称为高斯定理的微分形式，即为定域式。

高斯定理表明了静电场的一个重要性质，即静电场是一个散发性的场，称为纵场，高斯定理的积分形式给出了一个计算对称分布电场的简便方法；而微分形式又给出了一个由电场分布求空间电荷分布的公式，另外（１—５）和（１—６）式虽是由静电场导出的，但都是一个普适的公式；即不仅适用于静电场，对任何电场它们的通量和散度都满足(1—5）和（１—６）式。

高斯定理的结论，完全由库伦定律$\frac{1}{r^2}$的形式决定的，可以断定所有与r^2反比的力场，都有上述形式的高斯定理，如引力场的散度也可如上表示，只不过是用质量密度代替电荷密度和系数有所不同而已。

例： 已知电场在某一区域中的分布为

$\vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{r}$，求电荷分布$\rho$？

解　由 $\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\nabla\cdot\vec{r}=\dfrac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

$$\because\quad \nabla\cdot\vec{r}=(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})\cdot$$

$$(\vec{i}x+\vec{j}y+kz)=3$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{3Q}{4\pi a^3}。$$

（4）静电场的旋度　通过对静电场通量的计算给出了，电场的散度，如计算静电场的环量就可以给出了静电场的旋度，可以证明静电场的环量即沿任意闭合曲线的积分为零，现仍以点电荷的场为例证明如下。

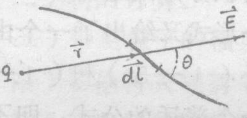

图 1-4

$$\vec{E}\cdot d\vec{l}=Edl\cos\theta=\frac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dl$$

而$dl\cos\theta=dr$，

$$\therefore\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{dr}{r^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d(-\frac{1}{r})=0\qquad(1—7)$$

因为任何全微分的闭合积分总为零。

同样由场的迭加原理可以得知对任何静止电荷产生的场皆有以上结果。

这表明静电场作的功与路径无关，只与起止位置有关，故静电场是有势的保守场。

由数学上的斯托克斯定理可把闭合线积分化为面积分

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_l \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{s}=0$$

积分号下角的l标明S是闭合曲线l所围的曲面，故

$$\nabla\times\vec{E}=0 \tag{1—8}$$

这说明静电场是无旋场，即静电场的力线不是闭合的。

§1.2　电流和磁场

（1）电荷守恒定律　流过导体的电流一般可用电流强度I表示，但要进行细致的分析应引进电流密度矢量$\vec{j}$来表示，$\vec{j}$的定义为：单位时间内垂直流过单位面积的电量即

$$dI=\vec{j}\cdot d\vec{s}$$

故流过某一截面的总电流I为

$$I=\int\vec{j}\cdot d\vec{s} \tag{1—9}$$

$\vec{j}$一般是坐标和时间的函数即$\vec{j}=\vec{j}(x,y,z,t)$，$\vec{j}$又表为　$\vec{j}=\rho\vec{v}$ 或 $\vec{j}=\sum\limits_{i=1}^{N_0}e_i\vec{v}_i$

ρ为电荷分布的体密度，$\vec{v}$应理解为平均速度，。N_0为单位体积中的电荷数。

过去和现在的所有实验都证明电荷是守恒的，如用数学来表述即为

$$\oint\vec{j}\cdot d\vec{s}=-\frac{\partial}{\partial t}\int\rho dV \tag{1—10}$$

或 $\nabla\cdot\vec{j}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$. (1—11)

即从任一闭合曲面单位时间内流出的电量等于到面内电荷的减少率。这称为电荷守恒定律。(1—11)式是这一定律的微分形式。

对于稳定情况(即恒直流)由于这时电荷的分布可变即$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$所以有$\nabla\cdot\vec{j}=0$，这称为稳定电流的条件，这表明稳定电流的电流线是闭合的。

(2)毕阿——沙法定律 即电流元 $I d\vec{l}$ 在距它为$\vec{r}$ 产生的磁场$\vec{B}$为

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

或 $$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}dV$$

$$\therefore\ \vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^2}dV; \qquad (1—12)$$

μ_0为真空中的磁系率，用国际单位时

$\mu_0=12.57\times10^{-7}$亨/米。

人们通常把$\vec{B}$称为磁感应强度而未称为磁场强度，这完全是历史的原因，而实际上它是真正的场强。

(3)磁场的散度与旋度 和电场一样可以通过计算磁场$\vec{B}$的通量和环量给出$\vec{B}$的散度与旋度，从而可以给出磁场的性质。但因为磁场的表达式比电场复杂故其证明也较电场复杂的多。为了使证明具有普遍性，可从$\vec{B}$的表达式出发来进

行分析，首先计算$\vec{B}$对任意闭合面的通量。

因$\vec{B}(x, y, z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')\times\vec{r}}{r^3}dV'$即为 (1—12)

这里公式标明了源点和场点的坐标以便于分析。其中$\vec{j}$为(x', y', z')的函数，而$\vec{B}$为场点(x, y, z)处的场，

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\because\quad \nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3};$$

$$\therefore\quad \vec{j}(\vec{r}')\times\frac{\vec{r}}{r^3}=-\vec{j}\times\nabla\frac{1}{r}$$（为了简单把$\vec{j}(\vec{r}')$写成$\vec{j}$）

因$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$，而$\vec{j}=\vec{j}(x', y', z')$

故$\vec{j}$与∇无关，因场点和源点的坐标是互相独立的，由矢量分析知

$$\nabla\times(\varphi\vec{A})=\varphi\nabla\times\vec{A}+\nabla\varphi\times\vec{A}\text{（见附录）}$$

$$\therefore\quad \nabla\times\left(\frac{\vec{j}}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla\times\vec{j}+\nabla\frac{1}{r}\times\vec{j}=\nabla\frac{1}{r}\times\vec{j}$$

$$=-\frac{\vec{r}\times\vec{j}}{r^3}=\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3};$$

因$\vec{j}$ 8 ∇无关故$\nabla\times\vec{j}=0$，所以有

$$\vec{B}(x, y, z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')\times\vec{r}}{r^3}dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\times\left(\frac{\vec{j}}{r}\right)dV'=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r}dV'\right]$$

$$\therefore \nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot\left[\nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r}dV'\right)\right]\equiv 0 \quad (1—13)$$

即 $\oint\vec{B}\cdot d\vec{s}=\int\nabla\cdot\vec{B}\,dV=0$

这表明磁场$\vec{B}$是无散的即磁力线永远是闭合的，这一结论具有普遍的意义。

现研究静磁场的旋度。上面已经证明

证明 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\vec{j}\,dV'}{r}$故$\vec{B}$的旋度为

$$\nabla\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left[\nabla\times\int\frac{\vec{j}\,dV'}{r}\right];$$

利用公式$\nabla\times(\nabla\times\vec{f})=\nabla(\nabla\cdot\vec{f})-\nabla^2\vec{f}$

可得

$$\nabla\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\nabla\int\nabla\cdot\left(\frac{\vec{j}}{r}\right)dV'-\int\nabla^2\left(\frac{\vec{j}}{r}\right)dV'\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\nabla\int\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{j}}{r}\right)dV'-\int\vec{j}\,\nabla^2\frac{1}{r}dV'\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\nabla\oint\frac{\vec{j}}{r}\cdot d\vec{s}-\int\vec{j}\,\nabla^2\frac{1}{r}dV'\right];$$

上面利用了对场点的微分与对源点微分差一负号的关系即$\nabla\to-\nabla'$，因为只有变为对积分区源点的散度才能化为闭合面积分。在第二项又一次利用了$\vec{j}$与∇和∇^2无关的条件而移开。

式中 $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ 故$\nabla^2\dfrac{1}{r}$为一特殊函数即

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(x-x',\ y-y',\ z-z')。\quad(1\text{—}14)$$

当$r\neq0$ 时 $\nabla^2\dfrac{1}{r}=0$ 很容易证明。而作为一般表达式，

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(x-x',\ y-y',\ z-z')$$

可利用δ函数的性质来证明，为此取一小球面包围的$r=0$ 的点，计算$\nabla^2\dfrac{1}{r}$对此小球体的积分。

$$\int\nabla^2\frac{1}{r}dV=\int\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}dV=\oint\nabla\frac{1}{r}\cdot d\vec{s}=-\oint\frac{\vec{r}\cdot d\vec{s}}{r^3}$$

$$=-\oint d\Omega=-4\pi,$$

而 $\delta(\vec{r})=\begin{cases}0, & r\neq0\text{时}\\ \infty, & r=0\text{时}\end{cases}$ 且有

$$\int\delta(\vec{r})dV=\begin{cases}1, & V\text{包括 }r=0\text{的点时。}\\ 0, & V\text{不包括 }r=0\text{的点时。}\end{cases}$$

$\therefore\int-4\pi\delta(\vec{r})dV=-4\pi$，($V$包括$r=0$的点在内)。